

必要最低限の数学

—高専・大学学部電磁気学のために—

1st. 2017/04/01

Lst. 2023/07/21

微分の表記方法

| | ライプニッツ | ラグランジュ | ニュートン |
|-----------|--|-----------------|-------------|
| 1次 導関数 | $\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ | $y', y'(x)$ | \dot{y} |
| 2次 導関数 | $\frac{d^2}{dx^2} f(x), \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ | $y'', y''(x)$ | \ddot{y} |
| 3次 導関数 | $\frac{d^3}{dx^3} f(x), \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ | $y''', y'''(x)$ | \dddot{y} |

京極一樹, 図解入門物理数学, pp.42, アーク出版, 2014

ベクトル微分演算子

$$\frac{d}{dx}$$

常微分演算子
(独立変数が1つのみの場合)

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$$

偏微分演算子
(独立変数が2つ以上の場合)

$$\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \equiv \nabla_x$$

ベクトル偏微分演算子(1次元)

$$\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} \equiv \nabla_t$$

ベクトル偏微分演算子(2次元断面)
奥行きz方向に対して

$$\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \equiv \nabla$$

ベクトル偏微分演算子(3次元)

ただし, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$: x方向, y方向, z方向の単位ベクトル $\int dx$ は積分演算子

2次方程式の解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$$

平方完成 両辺同じものを足す

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

平方根, 根号, 絶対値

a^2 の平方根(2乗したら a^2 になるような数 : square root) を求めよ。

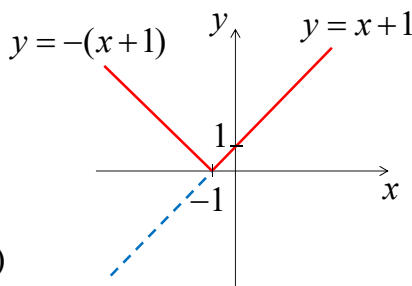
$$+a, -a$$

a^2 の根号またはルート($\sqrt{a^2}$) を求めよ。

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases} \quad \text{又は} \quad |a| = \sqrt{a^2}$$

次の絶対値を求めよ。

- (1) $|5| = 5 \quad (\because 5 > 0)$
- (2) $|-3| = -(-3) = 3 \quad (\because -3 < 0)$
- (3) $|5 - j3| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$
- (4) $\begin{cases} |x+1| = x+1 & (x+1 > 0) \\ |x+1| = -(x+1) & (x+1 < 0) \end{cases}$



対数・指数関数1

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ を証明せよ。 $\ln|x| \equiv \log|x| = \log_e|x|$

$$y = \ln x \quad (1)$$

とおくと、

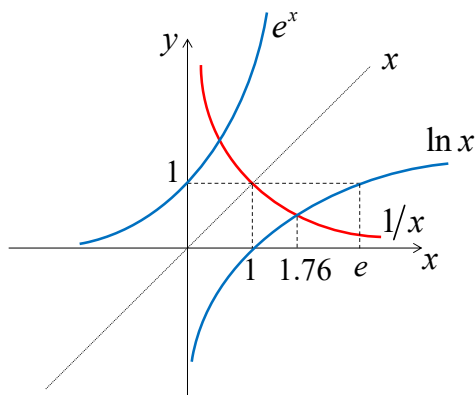
$$x = e^y \quad (2)$$

これをyで微分すると

$$\frac{dx}{dy} = e^y \quad (3)$$

両辺逆数をとると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad (4)$$



指数関数の定義

$\frac{da^x}{dx} = a^x$ を満たす定数 a を求めよ。

$$\frac{da^x}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \quad (\text{微分の定義})$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x)$$

$$a = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x} \quad 1/\Delta x = n \text{ とおけば}$$

村上雅人, なるほど微分積分, pp.35-36, 海鳴社

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37037\dots$$

$$a_\infty = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = 2.71828\dots$$

電磁気によく使う積分公式1

$$\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C \quad \text{where } p \neq -1$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C = \ln|x| + C$$

関数の和・差・積・商の微分

$$\frac{d}{dx}(cf) = c \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f \pm g) = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(fg) = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

大村平, 数学公式のはなし 楽しく学ぶ先人の知恵, p.148, 日科技連

関数の極大と極小

起電力 e [V], 内部抵抗 r [Ω]の電源を抵抗 x [Ω]の負荷に接続する。供給電力が最大となる x の値と、そのときの最大電力を求めよ。ヒント: 変数 x を少しだけ動かして y の値の変化を調べ、 y の極値(極大・極小)を調べる。

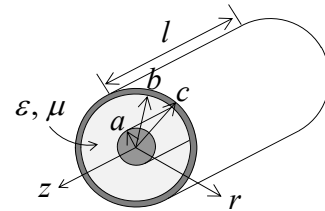
| | | | | | |
|------|---|--------------------------------------|--------------|------------------------------|------------|
| 電圧 | $\begin{cases} V = \frac{x}{r+x}e \\ I = \frac{e}{r+x} \end{cases}$ | 谷底 | 山頂 | | |
| 電力 | | $y = P = VI = e^2 \frac{x}{(r+x)^2}$ | | | $y = f(x)$ |
| 1階微分 | $y' = e^2 \frac{(r-x)}{(r+x)^3}$ | $f'(a) = 0$ | $f'(a) = 0$ | $f'(x) = 0$ | |
| 2階微分 | $y'' = -2e^2 \frac{(2r-x)}{(r+x)^4}$ | $f''(a) > 0$ | $f''(a) < 0$ | $f''(x) > 0$ $f''(x) < 0$ | |

大村平, 数学公式のはなし 楽しく学ぶ先人の知恵, p.160, 日科技連

関数の場合分け(1)

同軸線路内部の磁界分布を表す関数は次式で与えられる。これをグラフに示せ。

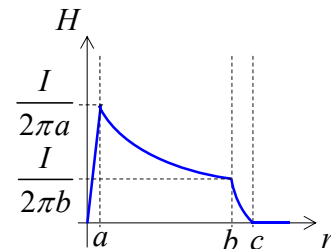
- (1) $H_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2}, \quad r < a$
- (2) $H_2 = \frac{I}{2\pi r}, \quad a < r < b$
- (3) $H_3 = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad b < r < c$
- (4) $H_4 = 0, \quad r > c$



$$H_3 = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} = \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left(\frac{c^2 - r^2}{r} \right)$$

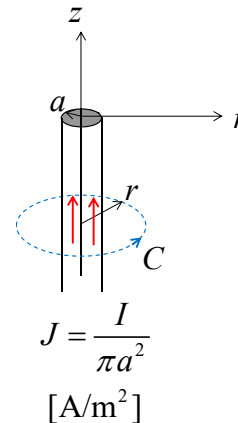
$$= \frac{I}{2\pi(c^2 - b^2)} \left(\frac{c^2}{r} - r \right)$$

※ H_3 は二つの関数 $1/r$ と $-r$ (逆数と原点を通過して負の傾きをもつ直線)の重ね合わせ



関数の場合分け(2)

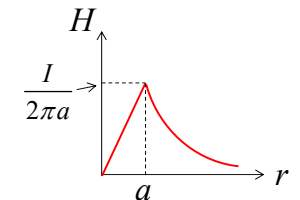
半径 a 、透磁率 μ の無限長円柱磁性体に一様電流が流れている場合の磁界と磁場は次式で与えられる。これをグラフに示せ。



$r < a$ のとき

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi a^2} r \hat{\phi}$$

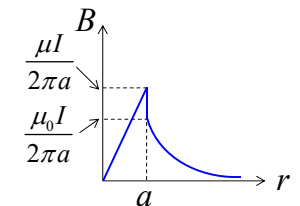
$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{\mu I}{2\pi a^2} r \hat{\phi}$$



$r > a$ のとき

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

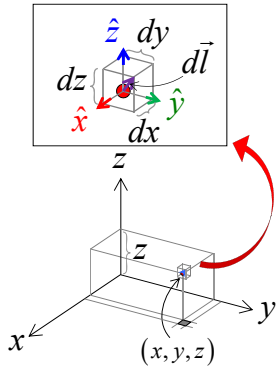
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$



直交座標系

$$d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

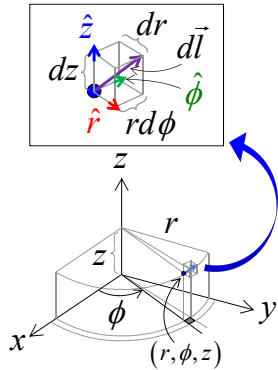
$$dv = dx dy dz$$



デカルト座標
Cartesian coordinate
または、直角座標
rectangular coordinate

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

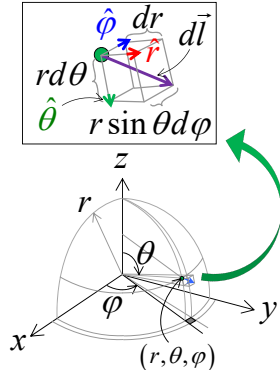
$$dv = r dr d\phi dz$$



円筒座標
cylindrical coordinate

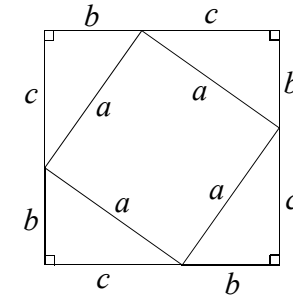
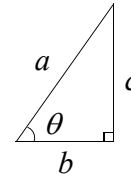
$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$



球座標
spherical coordinate

三平方の定理 (ピタゴラスの定理)¹⁴



正方形の面積

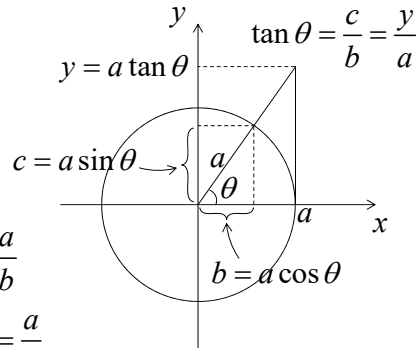
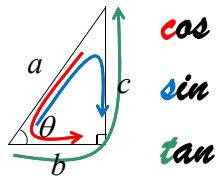
$$(b+c)^2 = 4 \times \frac{bc}{2} + a^2$$

$$b^2 + c^2 + 2bc = 2bc + a^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

大村平, 数学公式のはなし, p.48, 日科技連

三角関数1



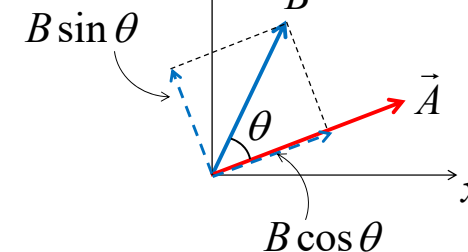
$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{b}{a}, \quad \Leftrightarrow \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{a}{b} \\ \text{コサイン} \quad \quad \quad \text{セカント} \\ \sin \theta = \frac{c}{a}, \quad \Leftrightarrow \quad \text{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{a}{c} \\ \text{サイン} \quad \quad \quad \text{コセカント} \\ \tan \theta = \frac{c}{b} = \frac{c/a}{b/a} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \Leftrightarrow \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{b}{c} \\ \text{タンジェント} \quad \quad \quad \text{コタンジェント} \end{array} \right.$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = 1$$

大村平, 数学公式のはなし, p.118, 日科技連

ベクトルの投影 (射影)

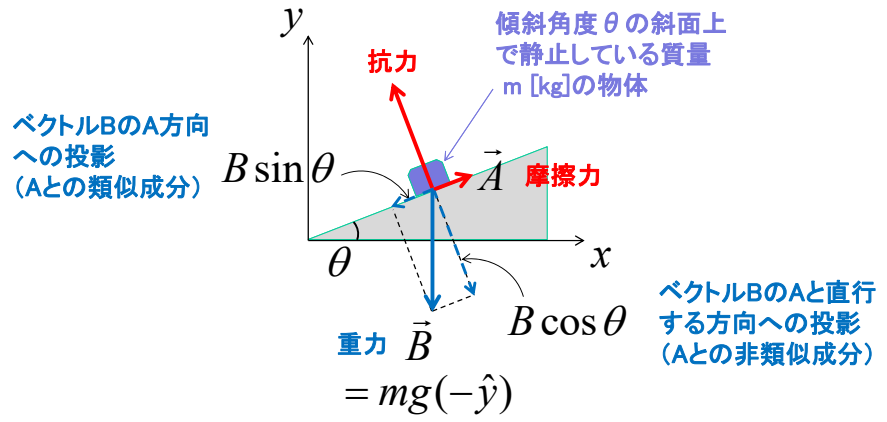
ベクトルBのAと直行する方向への投影 (Aとの非類似成分)



ベクトルBのA方向への投影 (Aとの類似成分)

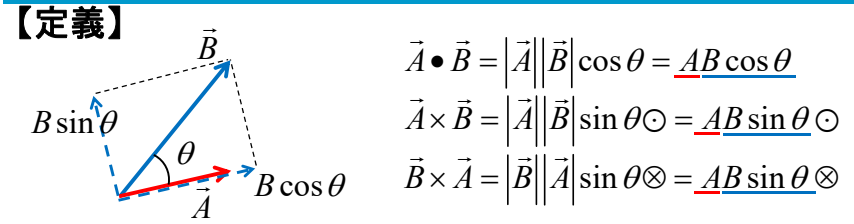
ベクトルBのベクトルAへの投影 (射影) と
ベクトルBのベクトルAの垂直方向への投影

ベクトルの投影(射影)



力学の問題では、力の釣合いを考えるときにベクトルを直角三角形を使って成分に分解する。電磁気も電気力、磁気力という力学なので同じ方法をとる。

内積(スカラー積)と外積(ベクトル積)



【物理的な意味】

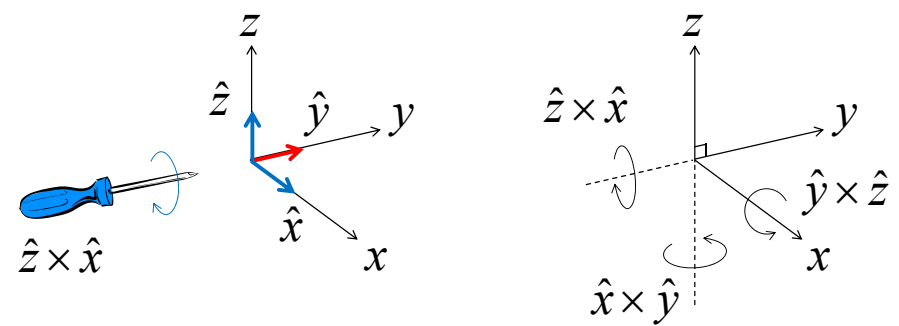
「内積」を取るということは、ベクトル A とベクトル B の類似成分(同相成分)がどれくらいかを示す指標

「外積」を取るということは、ベクトル A とベクトル B の非類似成分(直交成分)がどれくらいかを示す指標 例えば、交流電力の式

内積を取って1 = 外積を取ったら0 $P = VI \cos \theta = \vec{V} \cdot \vec{I} = \vec{V} \cdot \vec{I}$

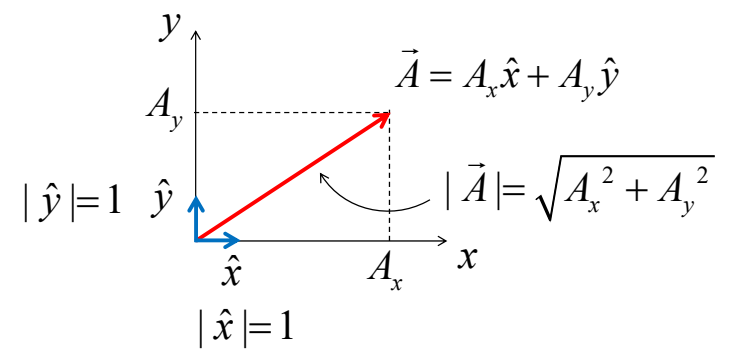
内積を取って0 = 外積を取ったら1 交流電圧と電流の内積は、電圧と電流の同相成分がどれくらいあるかを計算している。

外積の方向は右ねじの法則



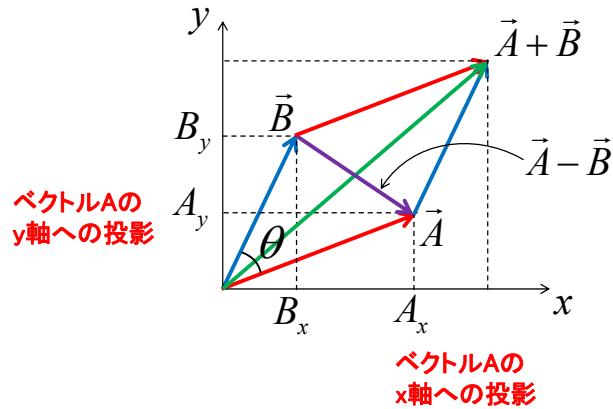
3次元 x, y, z 空間の単位ベクトル 一例として、 z ハットと x ハットの外積は「右ねじの法則」から y ハットとなる。

ベクトルと大きさ



2次元 x, y 平面上の任意ベクトル A の様子 A_x はベクトル A の x 成分 (x 方向の大きさ) を表し、 A_y はベクトル A の y 成分 (y 方向の大きさ) を表す。さらに、 x ハットは x 方向の単位ベクトルを表し y ハットは y 方向の単位ベクトルを表す。

ベクトルの和と差



ベクトルAの
y軸への投影

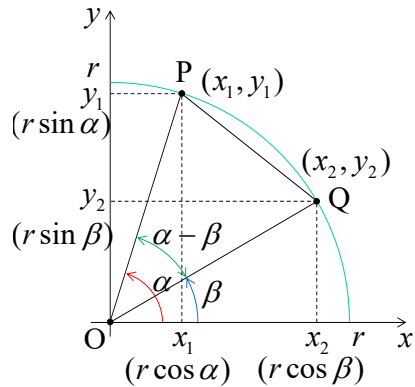
ベクトルAの
x軸への投影

2次元x,y平面上的の任意ベクトルAとベクトルBの和と差

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{x} + (A_y + B_y)\hat{y}$$

$$\vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\hat{x} + (A_y - B_y)\hat{y}$$

加法定理の導出(1)



余弦定理より

$$PQ^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\alpha - \beta)$$

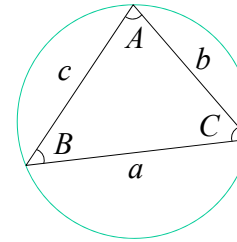
三平方の定理より

$$\begin{aligned} PQ^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= (r \cos \alpha - r \cos \beta)^2 + (r \sin \alpha - r \sin \beta)^2 \\ &= r^2 \left\{ (\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \beta) \right. \\ &\quad \left. + (\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta) \right\} \\ &= r^2 (2 - 2 \cos \alpha \cos \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2r^2 - 2r^2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

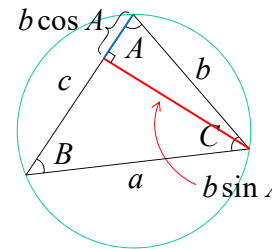
余弦定理と三平方の定理の結果を比較して

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

余弦定理(第2余弦法則)



$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

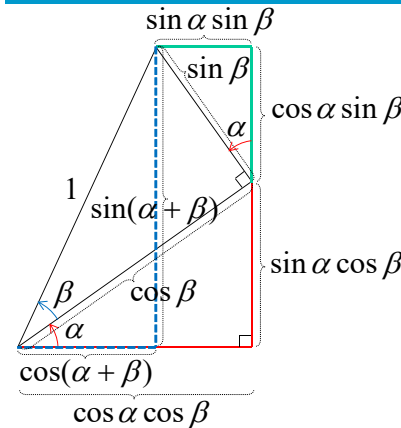


図のような補助線を引けば

$$a^2 = (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2$$

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A \\ &= c^2 - 2bc \cos A + b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

加法定理の導出(2)



上図より明らかに

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad (1) \end{aligned}$$

(1)式の加法定理で $\alpha \rightarrow \theta + \pi/2$ とすれば、

$$\begin{aligned} \cos(\theta + \pi/2 + \beta) &= \cos(\frac{\theta + \pi/2}{\alpha}) \cos \beta - \sin(\frac{\theta + \pi/2}{\alpha}) \sin \beta \quad (2) \end{aligned}$$

ここで、三角関数の性質

$$\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta,$$

を使えば(2)式の左辺は

$$(2)_{left} = \cos(\theta + \beta + \pi/2) = -\sin(\theta + \beta)$$

一方、三角関数の性質

$$\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$$

も使えば(2)式の右辺は

$$(2)_{right} = -\sin \theta \cos \beta - \cos \theta \sin \beta$$

左辺=右辺より

$$\sin(\theta + \beta) = \sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta \quad (3)$$

加法定理の導出(3)

オイラーの公式より

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \dots(1)$$

$$e^{j(\theta_1 \pm \theta_2)} = \cos(\theta_1 \pm \theta_2) + j \sin(\theta_1 \pm \theta_2) \quad \dots(2)$$

$$e^{j(\theta_1 \pm \theta_2)} = e^{j\theta_1} e^{\pm j\theta_2} = (\cos \theta_1 + j \sin \theta_1)(\cos \theta_2 \pm j \sin \theta_2)$$

$$= \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2 + j(\sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2) \quad \dots(3)$$

(2)(3)の実部を比較して

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \mp \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

(2)(3)の虚部を比較して

$$\sin(\theta_1 \pm \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \pm \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

加法定理の利用例(1)

次の計算を関数電卓を使わずに求めよ。

(1) $\sin 15^\circ$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4} = \frac{1.414(1.732-1)}{4} \approx 0.259$$

次の等式において、 c と θ を a と b で表せ。(三角関数の合成)

(2) $a \sin \omega t + b \cos \omega t = c \sin(\omega t + \theta)$

$$c(\sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta) = \frac{c \cos \theta}{a} \sin \omega t + \frac{c \sin \theta}{b} \cos \omega t$$

$$\therefore c \cos \theta = a, \quad c \sin \theta = b$$

$$(c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta)^2 = c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\frac{c \sin \theta}{c \cos \theta} = \tan \theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right)$$

加法定理の利用例(2)

$$y_1 = A \sin(\omega_1 t + \theta_1)$$

$$y_2 = B \sin(\omega_2 t + \theta_2)$$

とすると、 y_1 と y_2 の積 y_3 は

$$y_3 = AB \sin(\omega_1 t + \theta_1) \sin(\omega_2 t + \theta_2) = AB \sin \alpha \sin \beta$$

ただし、 $\begin{cases} \alpha = \omega_1 t + \theta_1 \\ \beta = \omega_2 t + \theta_2 \end{cases}$

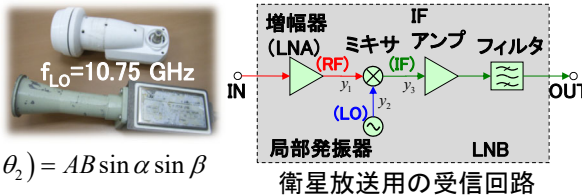
ここで、三角関数の加法定理より

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \}$$

$$y_3 = y_1 y_2 = AB \frac{1}{2} \{ \cos[(\omega_1 t + \theta_1) - (\omega_2 t + \theta_2)] - \cos[(\omega_1 t + \theta_1) + (\omega_2 t + \theta_2)] \}$$

$$= \frac{AB}{2} \{ \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\theta_1 - \theta_2)] - \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (\theta_1 + \theta_2)] \}$$

出力 y_3 に入力 y_1 とローカル y_2 の差の周波数が現れる。
即ち、 $f_3 = f_1 - f_2$ が成り立つ。



例)

| | | |
|--------------------------------|---|-------------------------------|
| $f_1 = 11.70 \text{ GHz (RF)}$ | } | $f_3 = 950 \text{ MHz (IF)}$ |
| $f_2 = 10.75 \text{ GHz (LO)}$ | | |
| $f_1 = 12.20 \text{ GHz (RF)}$ | } | $f_3 = 1450 \text{ MHz (IF)}$ |
| $f_2 = 10.75 \text{ GHz (LO)}$ | | |

複素数の計算

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

オイラーの公式

$$\sqrt{e^{j\theta}} = (e^{j\theta})^{1/2} = e^{j\theta/2} = \cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2}$$

半角の式

$$(e^{j\theta})^2 = e^{j2\theta} = \cos 2\theta + j \sin 2\theta$$

倍角の式

$$(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta} = \cos n\theta + j \sin n\theta$$

n倍角の式

$$(e^{j\theta})^{1/m} = e^{j\theta/m} = \cos \frac{\theta}{m} + j \sin \frac{\theta}{m}$$

1/m倍角の式

$$\sqrt{j} = \left(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} = \left(e^{j\pi/2} \right)^{1/2} = e^{j\pi/4}$$

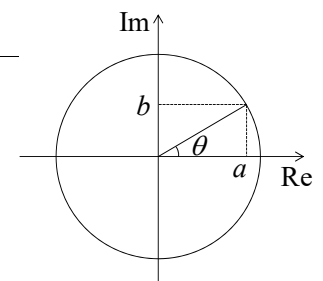
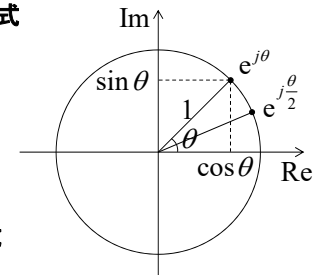
$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j\theta} = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta, \quad b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin \theta$$

$$\sqrt{a + jb} = \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} e^{j\theta}} = (a^2 + b^2)^{1/4} e^{j\theta/2}$$

半角の式

$$= (a^2 + b^2)^{1/4} \left(\cos \frac{\theta}{2} + j \sin \frac{\theta}{2} \right)$$



分母の有理化

$\Gamma = a + jb$ のとき $\frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$ を有理化して、実部と虚部を求めよ。

$$c = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{1+(a+jb)}{1-(a+jb)} = \frac{(1+a)+jb}{(1-a)-jb}$$

$$c = \frac{(1+a)+jb}{(1-a)-jb} \cdot \frac{(1-a)+jb}{(1-a)+jb} = \frac{\{(1+a)+jb\}\{(1-a)+jb\}}{(1-a)^2+b^2}$$

$$= \frac{(1+a)(1-a)+jb(1+a)+jb(1-a)-b^2}{(1-a)^2+b^2}$$

$$= \frac{1-a^2+jb+jab+jb-jab-b^2}{(1-a)^2+b^2} = \frac{1-a^2-b^2+j2b}{(1-a)^2+b^2}$$

$$\text{Re}[c] = \frac{1-a^2-b^2}{(1-a)^2+b^2}, \quad \text{Im}[c] = \frac{2b}{(1-a)^2+b^2}$$

オイラーの公式と絶対値の応用

負荷における複素反射係数を Γ とすると、伝送線路上の電圧は次式で与えられる。線路上の電圧の包絡線(最大値)を求めよ。

$$V(z) = e^{j(\omega t - \beta z)} + \Gamma e^{j(\omega t + \beta z)}$$

に以下の関係を代入すると

$$z = -l, \quad \Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$$

$$V(l) = e^{j(\omega t + \beta l)} + \Gamma e^{j(\omega t - \beta l)}$$

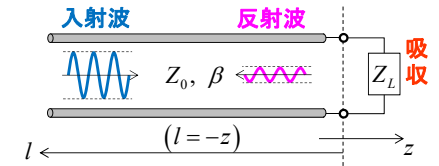
$$= e^{j\omega t} e^{j\beta l} + \Gamma e^{j\omega t} e^{-j\beta l}$$

$$= e^{j\omega t} e^{j\beta l} (1 + \Gamma e^{-j2\beta l})$$

$$= e^{j\omega t} e^{j\beta l} \{1 + |\Gamma| e^{-j(\theta - 2\beta l)}\}$$

従って

$$|V(l)| = |1 + |\Gamma| e^{j(\theta - 2\beta l)}|$$



所で、導出した $|V(l)|$ にオイラーの公式を使えば、

$$|1 + |\Gamma| e^{j(\theta - 2\beta l)}| = |1 + |\Gamma| \cos(\theta - 2\beta l) + j|\Gamma| \sin(\theta - 2\beta l)|$$

$$= \sqrt{\{1 + |\Gamma| \cos(\theta - 2\beta l)\}^2 + \{|\Gamma| \sin(\theta - 2\beta l)\}^2}$$

$$= |\alpha + j\beta| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$= \sqrt{\{1 + |\Gamma| \cos(\theta - 2\beta l)\}^2 + \{|\Gamma| \sin(\theta - 2\beta l)\}^2}$$

$$= \sqrt{1 + |\Gamma|^2 + 2|\Gamma| \cos(\theta - 2\beta l)}$$

双曲線関数

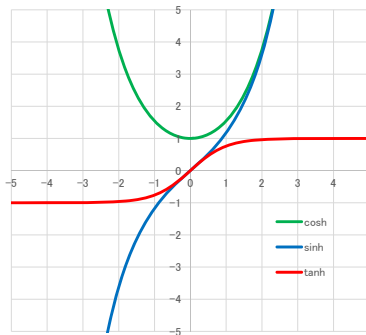
双曲線関数

$$\cosh \theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$\sinh \theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$$

$$\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta}$$

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$$



三角関数

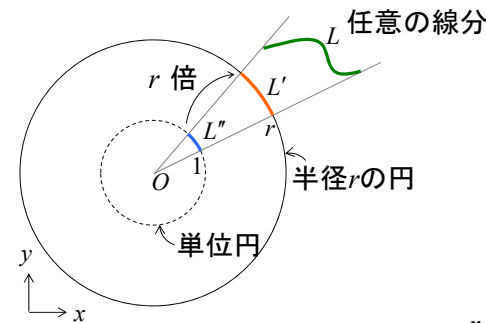
$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

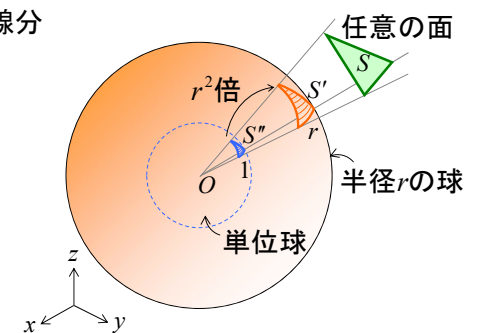
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

平面角と立体角



L' : L を半径 r の円に投影した線分
 L'' : L を半径1の円に投影した線分

$$\text{平面角 [rad]} : \theta \equiv L'' = \frac{L'}{r}$$



S' : S を半径 r の球に投影した面積
 S'' : S を半径1の球に投影した面積

$$\text{立体角 [Sr]} : \Omega \equiv S'' = \frac{S'}{r^2}$$

円運動1

1. 半径rの円周の長さL

$$L = 2\pi r = r(2\pi)$$

2. 半径rの円弧の長さl

$$l = r\theta$$

3. 円運動の速度v

$$\vec{v} = r\omega\hat{\phi} \quad \begin{array}{l} \phi \text{ハットは円の接線方向} \\ \text{で左回りの単位ベクトル} \end{array}$$

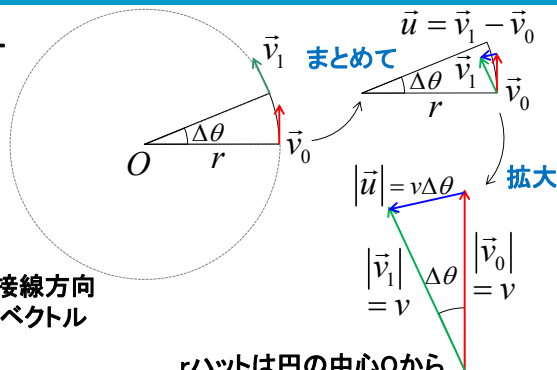
4. 円運動の加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{u}}{\Delta t} = \frac{v\Delta\theta}{\Delta t} (-\hat{r}) = v\omega(-\hat{r})$$

$$= r\omega^2(-\hat{r}) = \frac{v^2}{r}(-\hat{r})$$

5. 円運動の周期

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$



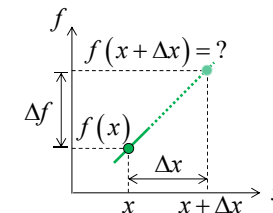
兵藤, 福岡, 高木, 高等学校 物理II 改訂版, p.36-39, 啓林館

関数の一次近似

一次近似の式

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= f'(x)\Delta x \end{aligned}$$

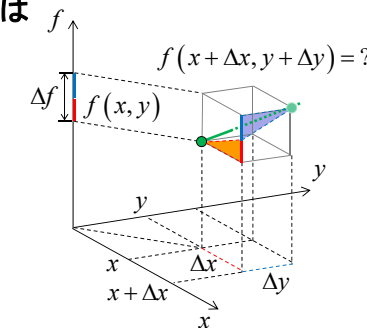


2変数関数も同様にして、一次近似の式は

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

$$\therefore \Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\begin{aligned} \text{全微分} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y \\ \text{とも呼ぶ} &= \underbrace{\quad}_{x \text{方向の増分}} + \underbrace{\quad}_{y \text{方向の増分}} \end{aligned}$$



常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$dy = x dx$$

$$\int dy = \int x dx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$d \frac{dy}{dx} = 2x dx$$

$$\int d \frac{dy}{dx} = \int 2x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + C$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + C$$

$$dy = x^2 dx + C dx$$

$$\int dy = \int x^2 dx + \int C dx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + Cx + C_2$$

偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin \omega x = \omega \cos \omega x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} yz^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} yz^2 = z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z} yz^2 = 2yz$$

置換による(偏)微分

37

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + a^2}} \right) \text{ を求めよ。}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \text{ において}$$

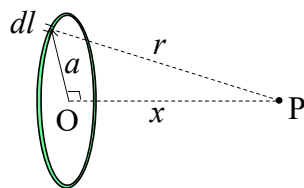
$$X = x^2 + a^2 \text{ とおくと}$$

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{X}} = X^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(X)}{dX} \frac{dX}{dx}$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(X)}{dX} \frac{dX}{dx} = -\frac{1}{2} X^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

この問題は半径aの円環電荷が中心からx離れたP点に作る電界を求める際に出てくる



テイラー級数の導出(2)

39

$$\text{手順4. } f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

$x=0$ を代入すると,

$$f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2a_3 \quad \therefore a_3 = \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)$$

$$\text{手順5. } f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_5x + \dots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4}$$

$x=0$ を代入すると,

$$f^{(4)}(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 \quad \therefore a_4 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(0)$$

あとは類推して,

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{a_0} + \underbrace{f'(0)}_{a_1}x + \underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{a_2}x^2 + \underbrace{\frac{f'''(0)}{3!}}_{a_3}x^3 + \dots + \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{a_n}x^n$$

テイラー級数の導出(1)

38

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ に展開できるとする。

このとき、各係数 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ を求めよ。

手順1. $f(x)$ に $x=0$ を代入すると,

$$f(0) = a_0 \quad \therefore a_0 = f(0)$$

手順2. $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$

$x=0$ を代入すると,

$$f'(0) = a_1 \quad \therefore a_1 = f'(0)$$

手順3. $f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2}$

$x=0$ を代入すると,

$$f''(0) = 2a_2 \quad \therefore a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$$

テイラー展開

40

次の関数を $x=0$ の近傍でテイラー展開(これをマクローリン展開とも呼ぶ)せよ。

$$f(x) = \sin x \quad f(x) = \cos x$$

さらに $x \ll 1$ のとき、 $\tan x = x$ で近似できることを示せ。

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx \frac{x - \frac{1}{6}x^3}{1 - \frac{1}{2}x^2} \approx x$$

近似式(テイラー展開の利用例) 41

$x \ll 1, y \ll 1$ のとき

- (1) $\frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} \approx 1 \mp x$
- (2) $(1 + x)^2 \approx 1 + 2x$
- (3) $\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x$
- (4) $\sin x \approx x$
- (5) $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$
- (6) $\tan x \approx x$
- (7) $e^x \approx 1 + x$

手計算の工夫(入力ミス軽減) 42

光速の計算

$$c = 3 \times 10^8$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = \sqrt{\frac{1 \times 10^{19}}{111.263}} = \sqrt{\frac{1 \times 10^{20}}{11112.63}} = \sqrt{\frac{1}{11112.63}} \times 10^{10}$$

$$= 0.03 \times 10^{10}$$

波動インピーダンスの計算

$$Z_w = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.854 \times 10^{-12}}} = \sqrt{1.419 \times 10^5} = \sqrt{14.19 \times 10^4} = \sqrt{14.19} \times 10^2 = 3.77 \times 10^2$$

$$Z_w = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\epsilon}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 = 120\pi$$

波数の計算

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi f\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi f \frac{1}{1/\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{2\pi f}{3 \times 10^8}$$

$$k^2 = \omega^2\mu\epsilon = (2\pi f)^2 \mu\epsilon = \frac{(2\pi f)^2}{(1/\sqrt{\mu\epsilon})^2} = \frac{(2\pi f)^2}{(3 \times 10^8)^2}$$

置換積分 43

次の定積分を求めよ。

$$S = \int_{r=0}^a \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr$$

この問題は半径aの円板状一様電荷が中心からx離れたP点に作る電位を求める際に出てくる

置換積分を行うために

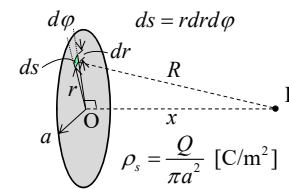
$$x^2 + r^2 = t \text{ と置くと } \frac{dt}{dr} = 2r \text{ となるから}$$

$$\int_{r=0}^a \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr$$

$$= \int_{t=x^2}^{x^2+a^2} \frac{r}{\sqrt{t}} \frac{1}{2r} dt = \int_{t=x^2}^{x^2+a^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_{t=x^2}^{x^2+a^2} \frac{1}{2} t^{-1/2} dt = \left[\frac{1}{t^{1/2}} \right]_{x^2}^{x^2+a^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{x^2}$$

$$\text{従って } S = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} - x, & x > 0 \\ \sqrt{x^2 + a^2} + x, & x < 0 \end{cases}$$



積の積分(部分積分)1 44

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$\int x^2 e^{2x} dx$ を積分せよ。

$f(x) = x^2, g'(x) = e^{2x}$ とおくと、

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) - \int 2x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \int x e^{2x} dx$$

$$\int x e^{2x} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}$$

ここに部分積分をもう一度適用して

従って、最終的に

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \left(x \frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right) = \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$$

積の積分(部分積分)2

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$I = \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt$ を求めよ。 $f(t) = \sin \omega t, g'(t) = e^{-st}$ とおくと、

$$= \left[\sin \omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^\infty - \int_0^\infty \omega \cos \omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{s} \left[\sin \omega t e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{\omega}{s} \int_0^\infty \cos \omega t e^{-st} dt$$

ここに部分積分をもう一度適用 $f(t) = \cos \omega t, g'(t) = e^{-st}$

$$= -\frac{1}{s} \left[\sin \omega t e^{-st} \right]_0^\infty + \frac{\omega}{s} \left[\cos \omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^\infty - \frac{\omega}{s} \int_0^\infty -\omega \sin \omega t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt$$

$$= -\frac{1}{s} \left[\sin \omega t e^{-st} \right]_0^\infty - \frac{\omega}{s^2} \left[\cos \omega t e^{-st} \right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{s^2} \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt$$

$$I = -\frac{1}{s} \left[\sin \omega t e^{-st} \right]_0^\infty - \frac{\omega}{s^2} \left[\cos \omega t e^{-st} \right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{s^2} I$$

最終的に $I = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

森, 演習で学ぶ基礎制御工学, p.7, 森北出版

直線、円、球面、平面の方程式

直線の方程式

2次元 $x - a_1 = \frac{y - a_2}{b_1} = \frac{y - a_2}{b_2}$ 2次元平面上的直線

3次元 $x - a_1 = \frac{y - a_2}{b_1} = \frac{z - a_3}{b_3}$ 3次元空間上の直線

4次元 $x - a_1 = \frac{y - a_2}{b_1} = \frac{z - a_3}{b_3} = \frac{u - a_4}{b_4}$ 4次元空間の直線は図示できない

円、球の方程式

2次元 $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = b^2$ 2次元平面上的円

3次元 $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = b^2$ 3次元空間上の球面

4次元 $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 + (u - a_4)^2 = b^2$ 4次元空間の球(超球)は図示できない

平面の方程式

2次元 $c_1 x + c_2 y + d = 0$ $d = -\vec{a} \cdot \vec{c}$ 2次元平面上的直線 (z軸方向に一様な面)

3次元 $c_1 x + c_2 y + c_3 z + d = 0$ 3次元空間上の平面

4次元 $c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 u + d = 0$ 4次元空間の平面は図示できない

村上, ベクトル解析, pp.51-70, 海鳴社

物理定数と単位

$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ 1.6/19 は鏡像(金属表面の自由電子が見えている)

$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ 9.11の災害

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$

$e = 2.718281828459041 \dots$

$\pi = 3.14159265359 \dots$

$c_{\text{water}} = 4.19 \text{ J/g} \cdot \text{K}$

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$

$Z_W = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} = 120\pi = 376.7 \Omega$

$\sqrt{100 \times 10^{-16}} = 10 \times 10^{-8} = 10^{-7}$

$10 \text{ cm}^2 = 10 \times (10^{-2})^2 \text{ m}^2$

$1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm} = 1 \text{ cm}^2$

$1 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 10 \text{ cm}^2$

大学数学の基礎定義

- | | |
|----------------|--|
| N 自然数全体 | Q.E.D Quod erat demonstrandum 以上が証明すべきことであった |
| R 実数全体 | e.g. exempli gratia = for example 例えば |
| Z 整数全体 | etc. et cetera など |
| C 複素数全体 | i.e. id est = that is 即ち |
| Q 有理数全体 | s.t. such that 以下のことが成り立つような |
| H 4元数全体 | w.r.t. with respect to ~に関して |