ベクトル解析の基礎 (演習問題)

v3.9 Sep.2022　　番号:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 平面上に 2 つのベクトル $\vec{A}$, $\vec{B}$ がある。両者なす角度が θ のとき，それぞれのベクトルを図示した上で次の各値を計算せよ。[*1]
(1) $\vec{A} \bullet \vec{B}$ (2) $\vec{A} \times \vec{B}$

2. 次の各値を計算せよ。ただし $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ は直角座標における単位ベクトルである。[*2]
(1) $\hat{x} \bullet \hat{y}$ (2) $\hat{x} \times \hat{y}$ (3) $\hat{z} \bullet \hat{z}$ (4) $\hat{z} \times \hat{y}$

3. $\vec{A} = A\hat{x}$，$\vec{B} = B\hat{z}$ とするとき，次の各値を計算せよ。ただし外積は方向も示すこと。[*3]
(1) $\vec{A} \bullet \vec{B}$ (2) $\vec{B} \bullet \vec{A}$ (3) $\vec{A} \times \vec{B}$ (4) $\vec{B} \times \vec{A}$

4. $\vec{A} = A\hat{x}$, $\vec{B} = B\hat{y}$, $\vec{C} = C\hat{z}$, $\vec{D} = \vec{B} - \vec{C}$ とするとき，次の各値を計算せよ。ただし外積は方向も示すこと。[*4]
(1) $\vec{A} \bullet \vec{D}$ (2) $\vec{A} \times \vec{D}$ (3) $\vec{D} \times \vec{B}$

5. xy 平面上で，x 軸から角度 θ だけ回転した r 方向の単位ベクトル $\hat{r}$ を $\hat{x}$ と $\hat{y}$ で表せ。[*5]

6. 次の計算をせよ。[*6] ただし，∇, $\vec{A}$, $\vec{B}$, φ を次のように定義する。
$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$
$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$
$\vec{B} = \left(x+y, xz, yz^2\right) = (x+y)\hat{x} + (xz)\hat{y} + (yz^2)\hat{z}$
$\varphi = x + y + xz + yz^2$
(1) ∇^2 (2) $\nabla \bullet \vec{A}$ (3) $\nabla \times \vec{A}$ (4) $\nabla \bullet \vec{B}$ (5) $\nabla \times \vec{B}$ (6) $\nabla\varphi$

7. ♠ ストークスの定理またはガウスの発散定理を利用して次の計算をせよ。ただし，$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $|\vec{r}| = r$，曲面 S の境界線を C，体積 V の領域の表面を S とする。[*7]
(1) $\oint_C \vec{r} \bullet d\vec{r}$
(2) $\oint_S \vec{r} \bullet d\vec{s}$

8. ♠ 次の各値を計算せよ。ただし $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ は球座標（極座標）における単位ベクトルである。[*8]
(1) $\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}$, $\frac{\partial\hat{r}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\hat{r}}{\partial\varphi}$ (2) $\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial r}$, $\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\varphi}$ (3) $\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial r}$, $\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial\varphi}$

9. ♠ 球座標におけるラプラシアンを計算せよ。[*9]

★ **公式集**

内積と外積

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta = AB\cos\theta, \quad \text{内積（スカラー積）} \tag{1}$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\odot = AB\sin\theta\odot, \quad \text{外積（ベクトル積）} \tag{2}$$
$$\vec{B} \times \vec{A} = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\otimes = AB\sin\theta\otimes, \quad \text{外積（ベクトル積）} \tag{3}$$

ただし，θ は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ のなす角度を示す。また，$\vec{A}$ と $\vec{B}$ が 2 次元紙面上にあるとき，$\odot$ は紙面裏から表に向かう単位ベクトル，$\otimes$ は紙面表から裏に向かう単位ベクトルを示す。

単位ベクトルの内積

$$\vec{i} \bullet \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0^\circ = 1, \tag{4}$$
$$\vec{j} \bullet \vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}|\cos 0^\circ = 1, \tag{5}$$
$$\vec{k} \bullet \vec{k} = |\vec{k}||\vec{k}|\cos 0^\circ = 1, \tag{6}$$
$$\vec{i} \bullet \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos 90^\circ = 0, \quad \vec{j} \bullet \vec{i} = |\vec{j}||\vec{i}|\cos 90^\circ = 0, \tag{7}$$
$$\vec{j} \bullet \vec{k} = |\vec{j}||\vec{k}|\cos 90^\circ = 0, \quad \vec{k} \bullet \vec{j} = |\vec{k}||\vec{j}|\cos 90^\circ = 0, \tag{8}$$
$$\vec{k} \bullet \vec{i} = |\vec{k}||\vec{i}|\cos 90^\circ = 0, \quad \vec{i} \bullet \vec{k} = |\vec{i}||\vec{k}|\cos 90^\circ = 0, \tag{9}$$

単位ベクトルの外積

$$\vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\sin 0^\circ = 0, \tag{10}$$
$$\vec{j} \times \vec{j} = |\vec{j}||\vec{j}|\sin 0^\circ = 0, \tag{11}$$
$$\vec{k} \times \vec{k} = |\vec{k}||\vec{k}|\sin 0^\circ = 0, \tag{12}$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\sin 90^\circ\vec{k} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{i} = |\vec{j}||\vec{i}|\sin 90^\circ(-\vec{k}) = -\vec{k}, \tag{13}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = |\vec{j}||\vec{k}|\sin 90^\circ\vec{i} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = |\vec{k}||\vec{j}|\sin 90^\circ(-\vec{i}) = -\vec{i}, \tag{14}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = |\vec{k}||\vec{i}|\sin 90^\circ\vec{j} = \vec{j}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = |\vec{i}||\vec{k}|\sin 90^\circ(-\vec{j}) = -\vec{j}, \tag{15}$$

勾配

$$\nabla\varphi = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = \vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{16}$$

発散

$$\begin{aligned}\nabla \bullet \vec{A} &= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial y}\right) \bullet \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{17}$$

回転

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{A} &= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial y}\right) \times \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}\end{aligned} \tag{18}$$

ラプラシアン

$$\begin{aligned}\nabla \bullet \nabla = \nabla^2 &= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial y}\right) \bullet \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned} \tag{19}$$

ストークスの定理　左辺は S 上，右辺は線 C 上のベクトル $\vec{A}$

$$\int_S (\nabla \times \vec{A}) \bullet d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \bullet d\vec{l} \tag{20}$$

ただし，線路 C は開いた面 S の縁で，閉じた線路であることを示す。

ガウスの発散定理　左辺は V 内，右辺は S 上のベクトル $\vec{A}$

$$\int_V \nabla \bullet \vec{A}\, dv = \oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s} \tag{21}$$

ただし，面 S は体積 V を包む表面で，閉じた面であることを示す。

[*1] **答え**：(1) $AB\cos\theta$ (2) $AB\sin\theta\odot$ or $AB\sin\theta\otimes$，ベクトル図は略
[*2] **答え**：(1) 0 (2) $\hat{z}$ (3) 1 (4) $-\hat{x}$
[*3] **答え**：(1) 0 (2) 0 (3) $AB(-\hat{y})$ (4) $AB\hat{y}$
[*4] **答え**：(1) 0 (2) $AC\hat{y} + AB\hat{z}$ (3) $BC\hat{x}$
ベクトル演算でも四則演算（加減乗除）の分配則は成立する。交換則は内積のみ成立し，外積はアルファベットの循環則に注意。
[*5] **答え**：$\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$
[*6] **答え**：(1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (2) $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (3) $(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{x} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{y} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{z}$ (4) $1 + 2yz$ (5) $(z^2 - x)\hat{x} + (z-1)\hat{z}$ (6) $(1+z)\hat{x} + (1+z^2)\hat{y} + (x+2yz)\hat{z}$
[*7] **答え**：(1) 0, (2) $3V$
[*8] **答え**：(1) 0, θ, 0 (2) 0, $-\hat{r}$, $\cos\theta\hat{\varphi}$ (3) 0, 0, $-\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}$
[*9] **答え**：$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$