grad, div, rot の公式集

v2.5 Feb.2021　　番号:＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿

1. nabla：ベクトル微分演算子

直角座標系 (x,y,z) のナブラ　　$\hat{x},\ \hat{y},\ \hat{z}$ は単位ベクトル

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1}$$

円筒座標系 (ρ,φ,z) のナブラ　　$\hat{\rho},\ \hat{\varphi},\ \hat{z}$ は単位ベクトル

$$\nabla = \hat{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

極座標（球座標）系 (r,θ,φ) のナブラ　　$\hat{r}$，$\hat{\theta}$，$\hat{\varphi}$ は単位ベクトル

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3}$$

$\vec{r}$ は $\hat{r}$ と混同しやすいので注意が必要である。位置ベクトル $\vec{r}$ は $\vec{r} = r\hat{r}$ と書くのが一般的で，大きさ $|\vec{r}| = r$ で r 方向を向いたベクトルである。一方，$\hat{r}$ は大きさ $|\hat{r}| = 1$ で，r 方向を向いた単位ベクトルを示す。

2. grad：スカラー場の勾配

直角座標系 $u(x,y,z)$ の勾配

$$\nabla u = \hat{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial u}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{4}$$

円筒座標系 $u(\rho,\varphi,z)$ の勾配

$$\nabla u = \hat{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \hat{z}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{5}$$

球座標系 $u(r,\theta,\varphi)$ の勾配

$$\nabla u = \hat{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{6}$$

3. div：ベクトルの発散・湧き出し

直角座標系 $\vec{A} = A_x(x,y,z)\hat{x} + A_y(x,y,z)\hat{y} + A_z(x,y,z)\hat{z}$ の発散

$$\begin{aligned}\nabla\bullet\vec{A} &= \left(\hat{x}\tfrac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\tfrac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\right)\\ &= \tfrac{\partial A_x}{\partial x} + \tfrac{\partial A_y}{\partial y} + \tfrac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{7}$$

円筒座標系 $\vec{A} = A_\rho(\rho,\varphi,z)\hat{\rho} + A_\varphi(\rho,\varphi,z)\hat{\varphi} + A_z(\rho,\varphi,z)\hat{z}$ の発散

$$\begin{aligned}\nabla\bullet\vec{A} &= \left(\hat{\rho}\tfrac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}\right)\\ &= \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \tfrac{\partial A_z}{\partial z}\end{aligned} \tag{8}$$

球座標系 $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\hat{r} + A_\theta(r,\theta,\varphi)\hat{\theta} + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\hat{\varphi}$ の発散

$$\begin{aligned}\nabla\bullet\vec{A} &= \left(\hat{r}\tfrac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\tfrac{1}{r\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial \varphi}\right)\bullet\left(A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}\right)\\ &= \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \tfrac{1}{r\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \tfrac{1}{r\sin\theta}\tfrac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\end{aligned} \tag{9}$$

方向微分係数

$$\frac{d\varphi}{du} = \nabla\varphi\bullet\hat{u} = \left(\hat{u}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{n}\frac{\partial}{\partial n}\right)\varphi\bullet\hat{u} \tag{10}$$

ただし，$\hat{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ は u 方向の単位ベクトルを示し，大きさは $|\hat{u}| = u = \sqrt{{u_x}^2 + {u_y}^2 + {u_z}^2} = 1$ である。

4. rot：ベクトルの回転・渦

直角座標系 $\vec{A} = A_x(x,y,z)\hat{x} + A_y(x,y,z)\hat{y} + A_z(x,y,z)\hat{z}$ の回転

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \left(\hat{x}\tfrac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\tfrac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}\right)\\ &= \left(\tfrac{\partial A_z}{\partial y} - \tfrac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\tfrac{\partial A_x}{\partial z} - \tfrac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\tfrac{\partial A_y}{\partial x} - \tfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}\end{aligned} \tag{11}$$

円筒座標系 $\vec{A} = A_\rho(\rho,\varphi,z)\hat{\rho} + A_\varphi(\rho,\varphi,z)\hat{\varphi} + A_z(\rho,\varphi,z)\hat{z}$ の回転

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \left(\hat{r}\tfrac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{z}\tfrac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(A_\rho\hat{\rho} + A_\varphi\hat{\varphi} + A_z\hat{z}\right)\\ &= \hat{\rho}\left(\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \tfrac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \hat{\varphi}\left(\tfrac{\partial A_\rho}{\partial z} - \tfrac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\\ &\quad + \hat{z}\left(\tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\varphi) - \tfrac{1}{\rho}\tfrac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

球座標系 $\vec{A} = A_r(r,\theta,\varphi)\hat{r} + A_\theta(r,\theta,\varphi)\hat{\theta} + A_\varphi(r,\theta,\varphi)\hat{\varphi}$ の回転

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{A} &= \left(\hat{r}\tfrac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\tfrac{1}{r\sin\theta}\tfrac{\partial}{\partial \varphi}\right)\times\left(A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\varphi\hat{\varphi}\right)\\ &= \tfrac{\hat{r}}{r\sin\theta}\left[\tfrac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\varphi) - \tfrac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right] + \tfrac{\hat{\theta}}{r}\left[\tfrac{1}{\sin\theta}\tfrac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \tfrac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\\ &\quad + \tfrac{\hat{\varphi}}{r}\left[\tfrac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \tfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\end{aligned} \tag{13}$$

5. ラプラシアン：スカラー場の勾配の発散・湧き出し

直角座標系 $u(x,y,z)$ のラプラシア

$$\nabla\bullet\nabla u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{14}$$

円筒座標系 $u(\rho,\varphi,z)$ のラプラシアン

$$\nabla\bullet\nabla u = \nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{15}$$

球座標系 $u(r,\theta,\varphi)$ のラプラシアン

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{16}$$

ラプラシアンは以下のように省略形 Δ で書く場合もある。

$$\nabla^2 u = \Delta u \tag{17}$$

6. ベクトル恒等式

スカラー場の勾配の発散

$$\nabla\bullet\nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{18}$$

スカラー場とベクトル場の積の発散

$$\nabla\bullet(\varphi\vec{A}) = \nabla\varphi\bullet\vec{A} + \varphi(\nabla\bullet\vec{A}) \tag{19}$$

スカラー場とベクトル場の積の回転

$$\nabla\times(\varphi\vec{A}) = (\nabla\varphi)\times\vec{A} + \varphi\nabla\times\vec{A} \tag{20}$$

スカラー場の勾配の回転

$$\nabla\times(\nabla\varphi) = 0 \tag{21}$$

ベクトル場の回転の発散

$$\nabla\bullet(\nabla\times\vec{A}) = 0 \tag{22}$$

7. ベクトルの線積分

$$\int_C \vec{A}\bullet d\vec{l} = \int_C (A_t\hat{t} + A_n\hat{n})\bullet dl\hat{t} = \int_C A_t dl \tag{23}$$

ただし，$d\vec{l} = dl\hat{t}$ は積分路 C に対して接線方向を向いた微小長さベクトル，$\vec{A} = A_t\hat{t} + A_n\hat{n}$ は積分路 C 上のベクトルで，A_t は $\vec{A}$ の接線 (tangential) 成分，A_n は $\vec{A}$ の法線 (normal) 成分，$\hat{t}$ と $\hat{n}$ は積分路 C に対して接線方向と法線方向の単位ベクトルを示す。

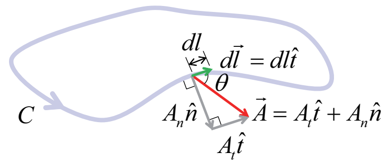

図 1　ベクトルの線積分

8. ベクトルの面積分

$$\int_S \vec{A}\bullet d\vec{s} = \int_S (A_t\hat{t} + A_n\hat{n})\bullet ds\hat{n} = \int_S A_n ds \tag{24}$$

ただし，$d\vec{s} = ds\hat{n}$ は積分面 S に対して外向き法線方向の微小面積ベクトル，$\vec{A} = A_t\hat{t} + A_n\hat{n}$ は積分面 S 上のベクトルで，A_t は $\vec{A}$ の接線 (tangential) 成分，A_n は $\vec{A}$ の法線 (normal) 成分，$\hat{t}$ と $\hat{n}$ は積分面 S に対して接線方向および外向き法線方向の単位ベクトルを示す。

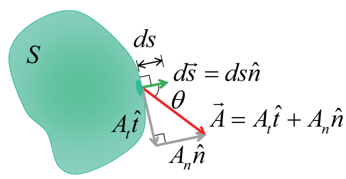

図 2　ベクトルの面積分

9. 積分定理

ストークスの定理　　左辺は S 上，右辺は線 C 上のベクトル $\vec{A}$

$$\int_S (\nabla\times\vec{A})\bullet d\vec{s} = \oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l} \tag{25}$$

ただし，線路 C は開いた面 S の縁で，閉じた線路であることを示す。

ガウスの発散定理　　左辺は V 内，右辺は S 上のベクトル $\vec{A}$

$$\int_V \nabla\bullet\vec{A}\, dv = \oint_S \vec{A}\bullet d\vec{s} \tag{26}$$

ただし，面 S は体積 V を包む表面で，閉じた面であることを示す。

グリーンの第 1 定理　　左辺は V 内，右辺は S 上のスカラー φ, ψ

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi\bullet\nabla\psi)\, dv = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds \tag{27}$$

ただし，面 S は体積 V を包む表面で閉じた面であることを示し，n は面 S に対して外向き方向を示す。

グリーンの第 2 定理　　左辺は V 内，右辺は S 上のスカラー φ, ψ

$$\int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\, dv = \oint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\vec{s} \tag{28}$$

ガウス・グリーンの定理（平面におけるグリーンの定理）　左辺は S 上，右辺は C 上のスカラー P, Q（ベクトル $\vec{A}$ の x, y 成分を P, Q とすると，2 次元のストークスの定理に等しい。）

$$\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_C (Pdx + Qdy) \tag{29}$$