応用電磁気学課題レポート

磁場分布の計算

1st. 2018/07/09
Lst. 2020/11/07

ビオサバールの法則3

$$d\vec{B} = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}}\frac{\overbrace{I\,d\vec{l}}^{\text{まとめて電流素}}\times\hat{r}}{r^2}$$

観測点における磁束密度ベクトル

まとめて電流素

電流　微小線素

外積（電流を観測点に向かう方向とその直交方向に分離し、直交成分の方をとる）

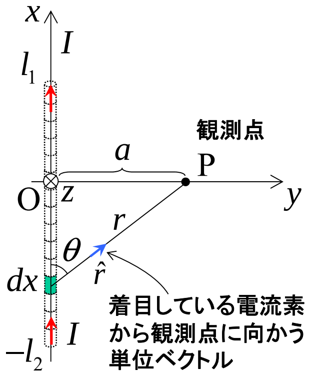
電流素から観測点に向かう単位ベクトル

SI単位系で定義された定数（μ_0は真空の透磁率）

電流素から観測点までの距離

ビオ-サバールの法則の例題1

x軸上を流れる有限長直線電流が、y軸上でa離れた位置にある観測点Pに作られる磁束密度の大きさを求めよ。



解法1（オーソドックスな方法）

変数をすべてx のみの関数に書き換える。

$$\begin{cases}\sin\theta = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ r = \sqrt{a^2+x^2}\end{cases}$$

$$dB_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$$

これを$x=-l_2$から$\varphi=+l_1$で積分する。即ち、

$$B_P = \int_{-l_2}^{l_1} dB_P = \int_{-l_2}^{l_1}\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

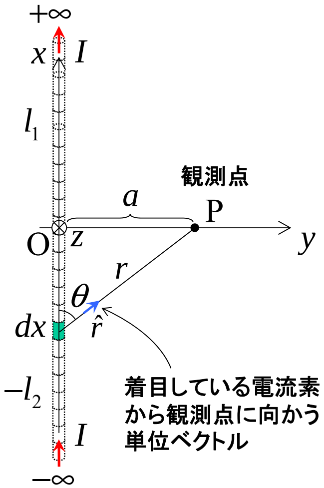
ここで、次の積分公式を使う。

$$\boxed{\int\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C}$$

答え $\vec{B}_P = \dfrac{\mu_0 Ia}{4\pi}\left(\dfrac{l_1}{a^2\sqrt{a^2+l_1^2}}+\dfrac{l_2}{a^2\sqrt{a^2+l_2^2}}\right)\hat{z}$

無限長直線電流が作る磁場

x軸上を流れる無限長直線電流がy軸上でa離れた位置にある観測点Pに作られる磁束密度ベクトルを求めよ。



$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\left(\frac{l_1}{a^2\sqrt{a^2+l_1^2}}+\frac{l_2}{a^2\sqrt{a^2+l_2^2}}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{l_1}{\sqrt{a^2+l_1^2}}+\frac{l_2}{\sqrt{a^2+l_2^2}}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{1}{\sqrt{(a/l_1)^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{(a/l_2)^2+1}}\right)\hat{z}$$

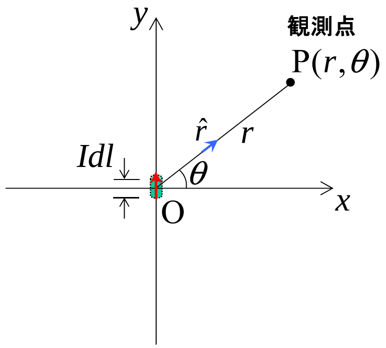
$l_2, l_1\to\infty$の極限を取ると、

$$\lim_{l_1,l_2\to\infty}\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\frac{1}{2}\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{z}$$

答え $\vec{B}_P = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}\hat{z}$

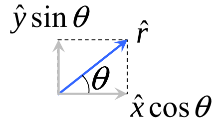
微小電流が任意の点に作る磁場

微小長さΔl [m]に電流I [A]が流れている。点Pの磁束密度を求めよ。(演習書, 例題6.5)



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

$$\begin{cases}\hat{r}=\hat{x}\cos\theta+\hat{y}\sin\theta\\ d\vec{l}=dl\hat{y}\end{cases}$$



$$d\vec{l}\times\hat{r}=dl\hat{y}\times(\hat{x}\cos\theta+\hat{y}\sin\theta)=dl\cos\theta(-\hat{z})$$

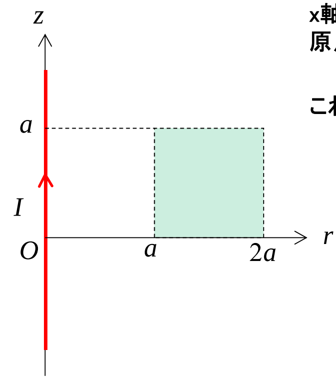
又は,

$$d\vec{l}\times\hat{r}=dl\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(-\hat{z})=dl\cos\theta(-\hat{z})$$

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 Idl}{4\pi}\cos\theta(-\hat{z})$$

磁束の計算

z軸上を流れる無限長直線電流がある。アンペアの法則を使わずに、r=aからr=2aおよびz=aで囲まれた部分を貫く磁束を求めよ。



x軸上を流れる有限長電流がz軸上で原点からr離れた位置に作る磁場は $\vec{B}_P=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$

これを面S上で総和する。

$$\Phi_m=\int_S\vec{B}\bullet d\vec{s}$$ 磁束の定義

$$=\int_S B\hat{\varphi}\bullet ds\hat{\varphi}$$

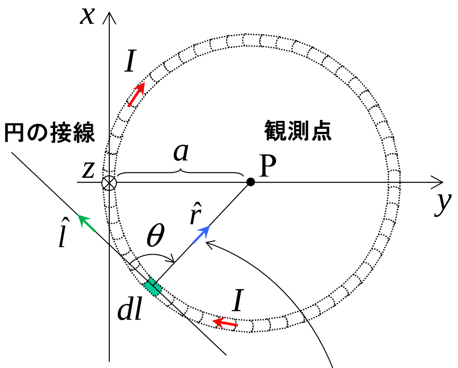
$$=\int_S Bds=\int_S Bdrdz$$

$$=\int_{z=0}^{a}\int_{r=a}^{2a}Bdrdz$$

$$\Phi=\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln 2$$

ビオ-サバールの法則の例題2

半径aの円形ループがxy平面上にある。y軸上で原点からa離れた位置にある観測点P(円形ループの中心)に作られる磁束密度ベクトルを求めよ。



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

着目している電流素の位置を変えても, θとrは常に一定になる。

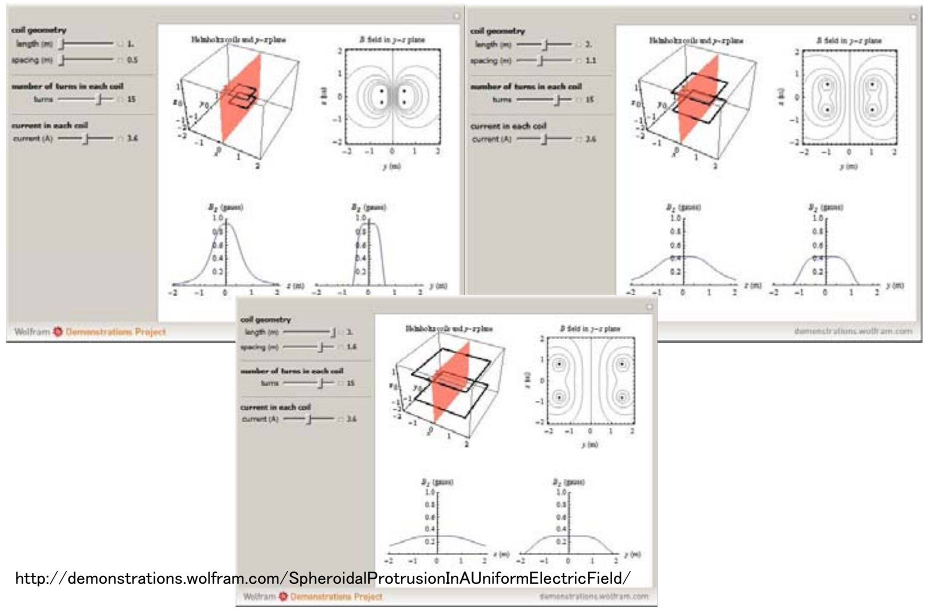
$$\begin{cases}\theta=90^\circ & \text{const.}\\ r=a & \text{const.}\end{cases}$$

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{a^2}\hat{z}$$

$$\vec{B}_P=\oint_C d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2}\int_0^{2\pi a}dl\hat{z}$$

$$\therefore\vec{B}_P=\hat{z}\frac{\mu_0 I}{2a}$$

ヘルムホルツコイルの磁場



http://demonstrations.wolfram.com/SpheroidalProtrusionInAUniformElectricField/

課題

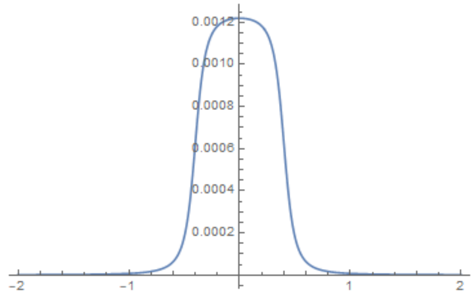
1. 演習書応用問題6.7において，ソレノイド中心軸上の磁束密度の大きさをグラフ化せよ。ただし，半径a,ソレノイド長さl，単位長さ当たりの巻数n，電流Iは自由に決定してよい。
2. 演習書応用問題8.2において，磁束密度の大きさを等高線でグラフ化せよ。ただし，x，yの範囲は自由に決定してよい。

提出期限： 次回講義7/17(火)開始時
提出方法： A4用紙1枚以内(グラフの手書きは不可)
注意： 学生同士の相談は推奨します。

ソースコードと計算結果

```
μ0 = 4*Pi*10^-7;
i = 1;
n = 1000;
l = 80*10^-2;
a = 10*10^-2;

B[x_] := μ0*i*n/2*((x + l/2)/Sqrt[a^2 + (x + l/2)^2] - (x - l/2)/Sqrt[a^2 + (x - l/2)^2])
```



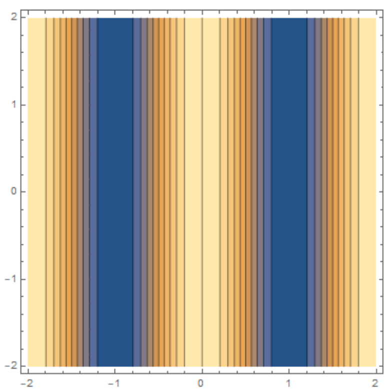
Mathematica v11.1

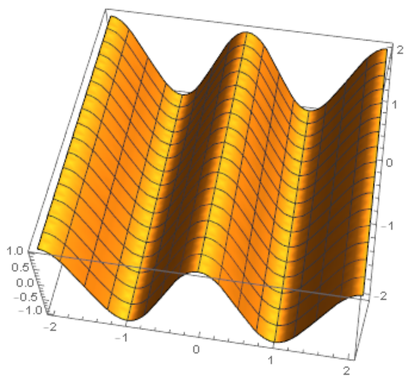
ソースコードと計算結果

```
B2[x_] := Cos[Pi*x]

ContourPlot[B2[x], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]

Plot3D[B2[x], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```





Mathematica v11.1