必要最低限の数学

–高専・大学学部電磁気学のために–

1st. 2017/04/01
Lst. 2021/05/04

微分の表記方法

	ライプニッツ	ラグランジュ	ニュートン
1次導関数	$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$	$y', y'(x)$	$\dot{y}$
2次導関数	$\frac{d^2}{dx^2}f(x), \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$	$y'', y''(x)$	$\ddot{y}$
3次導関数	$\frac{d^3}{dx^3}f(x), \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$	$y''', y'''(x)$	$\dddot{y}$

京極一樹, ``図解入門物理数学,'' pp.42, アーク出版, 2014

ベクトル微分演算子

$\frac{d}{dx}$ 常微分演算子（独立変数が1つのみの場合）

$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ 偏微分演算子（独立変数が2つ以上の場合）

$\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} \equiv \nabla_x$ ベクトル偏微分演算子（1次元）

$\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} \equiv \nabla_t$ (t: tangential) ベクトル偏微分演算子（2次元断面）奥行きz方向に対して

$\boxed{\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} \equiv \nabla}$ ベクトル偏微分演算子（3次元）

ただし，$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ ：x方向，y方向，z方向の単位ベクトル

$\int dx$ は積分演算子

2次方程式の解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

平方完成　　両辺同じものを足す

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

平方根，根号，絶対値

a^2 の平方根（2乗したら a^2 になるような数：square root）を求めよ。

$$+a, -a$$

a^2 の根号またはルート（$\sqrt{a^2}$）を求めよ。

$$|a| = \begin{cases} a & (a>0) \\ -a & (a<0) \end{cases} \qquad \text{又は} \qquad |a| = \sqrt{a^2}$$

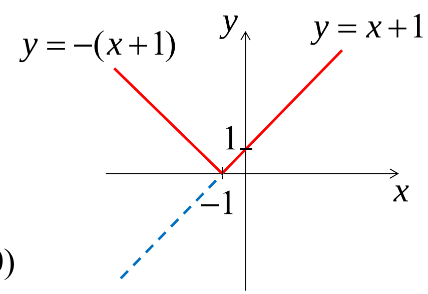
次の絶対値を求めよ。

(1) $|5| = 5 \quad (\because 5 > 0)$

(2) $|-3| = -(-3) = 3 \quad (\because -3 < 0)$

(3) $|5 - j3| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

(4) $\begin{cases} |x+1| = x+1 & (x+1>0) \\ |x+1| = -(x+1) & (x+1<0) \end{cases}$



指数関数の定義

$$\frac{da^x}{dx} = a^x$$ を満たす定数 a を求めよ。

$$\frac{da^x}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} \quad \text{（微分の定義）}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)$$

$$a = \lim_{\Delta x \to 0} (1 + \Delta x)^{1/\Delta x}$$ $1/\Delta x = n$ とおけば

$$a = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = 2.37037\cdots$$

$$a_\infty = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^\infty = 2.71828\cdots$$

村上雅人，なるほど微分積分，pp.35-36，海鳴社

対数・指数関数1

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$ を証明せよ。 $\ln|x| \equiv \log|x| = \log_e |x|$

$y = \ln x \qquad (1)$

とおくと、

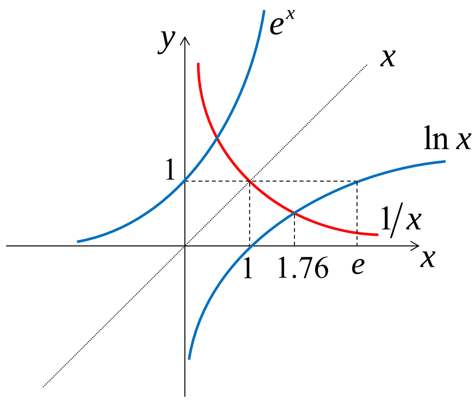
$x = e^y \qquad (2)$

これをyで微分すると

$\dfrac{dx}{dy} = e^y \qquad (3)$

両辺逆数をとると

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{e^y} = \dfrac{1}{x} \qquad (4)$



村上雅人，なるほど微分積分，pp.37-38，海鳴社

電磁気でよく使う積分公式1

$$\int x^p \, dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C \quad \text{where} \quad p \neq -1$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C = \ln|x| + C$$

川村清，キーポイント 微分積分，p. 83，岩波書店

関数の和・差・積・商の微分

$$\frac{d}{dx}(cf)=c\frac{df}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(f\pm g)=\frac{df}{dx}\pm\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(fg)=g\frac{df}{dx}+f\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\dfrac{df}{dx}-f\dfrac{dg}{dx}}{g^2}$$

大村平，数学公式のはなし 楽しく学ぶ先人の知恵，p.148，日科技連

関数の極大と極小

起電力e [V]，内部抵抗r [Ω]の電源を抵抗x [Ω]の負荷に接続する。供給電力が最大となるxの値と，そのときの最大電力を求めよ。ヒント：変数xを少しだけ動かしてyの値の変化を調べ，yの極値（極大・極小）を調べる。

電圧 $V=\dfrac{x}{r+x}e$

電流 $I=\dfrac{e}{r+x}$

電力

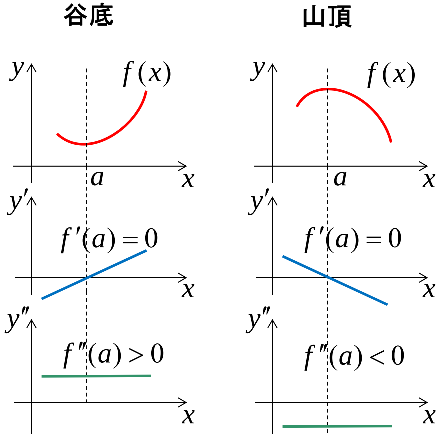
$$y=P=VI=e^2\frac{x}{(r+x)^2}$$

1階微分

$$y'=e^2\frac{(r-x)}{(r+x)^3}$$

2階微分

$$y''=-2e^2\frac{(2r-x)}{(r+x)^4}$$



$y=f(x)$

$f'(x)=0$

$f''(x)>0$

$f''(x)<0$

大村平，数学公式のはなし 楽しく学ぶ先人の知恵，p.160，日科技連

関数の場合分け（1）

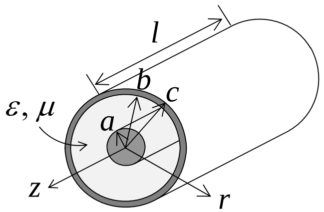
同軸線路内部の磁界分布を表す関数は次式で与えられる。これをグラフに示せ。

(1) $H_1=\dfrac{Ir}{2\pi a^2},\quad r<a$

(2) $H_2=\dfrac{I}{2\pi r},\quad a<r<b$

(3) $H_3=\dfrac{I}{2\pi r}\dfrac{c^2-r^2}{c^2-b^2},\quad b<r<c$

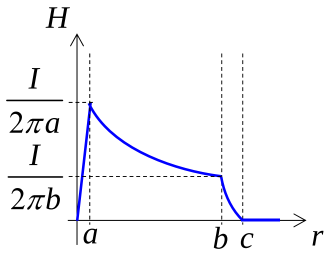
(4) $H_4=0,\quad r>c$



$$H_3=\frac{I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}=\frac{I}{2\pi(c^2-b^2)}\left(\frac{c^2-r^2}{r}\right)$$

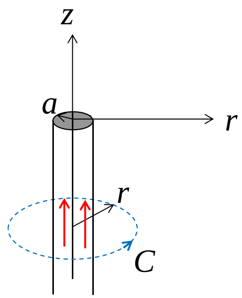
$$=\frac{I}{2\pi(c^2-b^2)}\left(\frac{c^2}{r}-r\right)$$

※ H_3は二つの関数 1/r と −r（逆数と原点を通って負の傾きをもつ直線）の重ね合わせ



関数の場合分け（2）

半径a、透磁率μの無限長円柱磁性体に一様電流が流れている場合の磁界と磁場は次式で与えられる。これをグラフに示せ。



$$J=\frac{I}{\pi a^2}$$

$[\mathrm{A/m^2}]$

r<aのとき

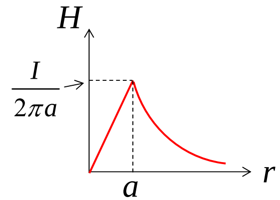
$$\vec{H}=\frac{I}{2\pi a^2}r\hat{\varphi}$$

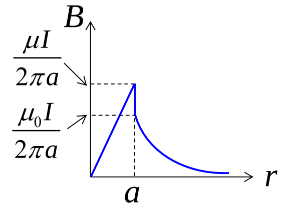
$$\vec{B}=\mu\vec{H}=\frac{\mu I}{2\pi a^2}r\hat{\varphi}$$

r>aのとき

$$\vec{H}=\frac{I}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi}$$



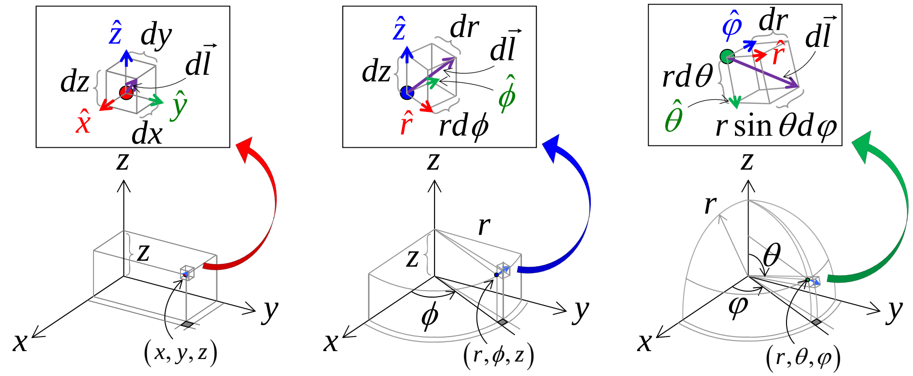


直交座標系

$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$
$dv = dxdydz$

$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$
$dv = rdrd\phi dz$

$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\hat{\varphi}$
$dv = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$

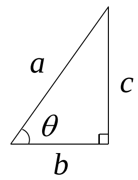


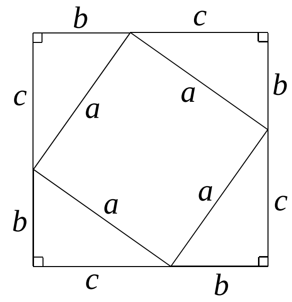
デカルト座標
Cartesian coordinate
または，直角座標
rectangular coordinate

円筒座標
cylindrical coordinate

球座標
spherical coordinate

三平方の定理(ピタゴラスの定理)



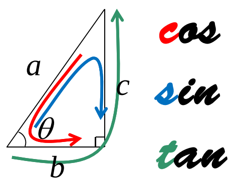


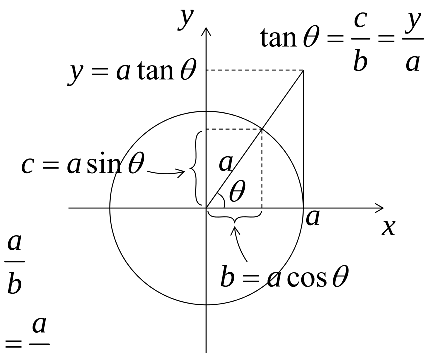
正方形の面積

$$(b+c)^2 = 4\times\frac{bc}{2} + a^2$$
$$b^2 + c^2 + 2bc = 2bc + a^2$$
$$a^2 = b^2 + c^2$$

大村平，数学公式のはなし，p.48，日科技連

三角関数1





$\cos\theta = \frac{b}{a}$, ⇔ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{a}{b}$
コサイン　セカント

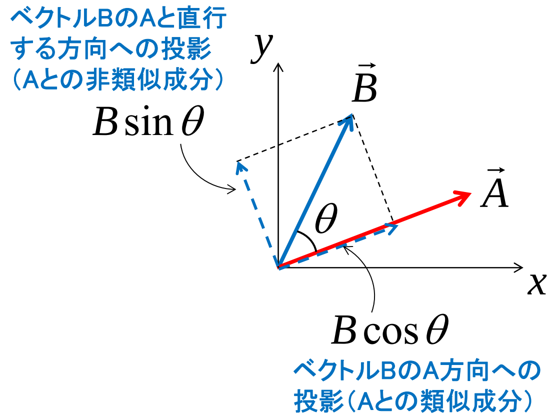
$\sin\theta = \frac{c}{a}$, ⇔ $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{a}{c}$
サイン　コセカント

$\tan\theta = \frac{c}{b} = \frac{c/a}{b/a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, ⇔ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{c}$
タンジェント　コタンジェント

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{a^2} = 1$$

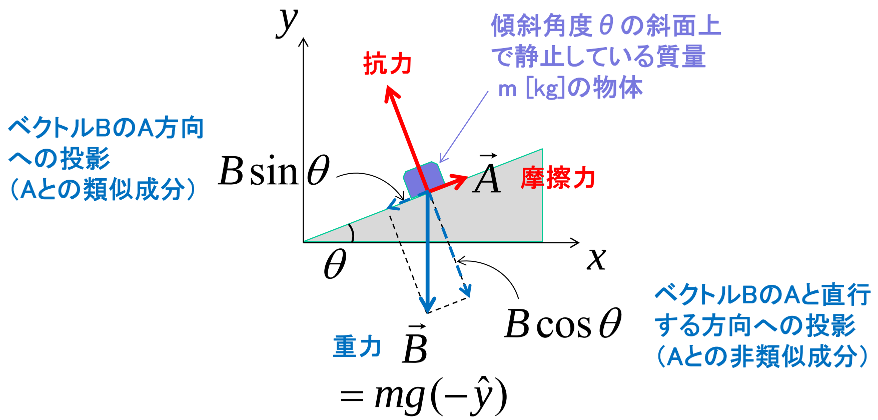
大村平，数学公式のはなし，p.118，日科技連

ベクトルの投影(射影)



ベクトルBのベクトルAへの投影(射影)と
ベクトルBのベクトルAの垂直方向への投影

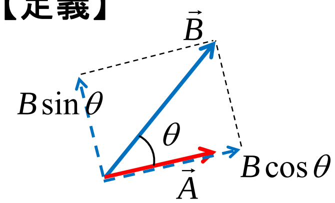
ベクトルの投影（射影）



力学の問題では，力の釣合いを考えるときにベクトルを直角三角形を使って成分に分解する。電磁気も電気力，磁気力という力学なので同じ方法をとる。

内積（スカラー積）と外積（ベクトル積）

【定義】



$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta=AB\cos\theta$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\odot=AB\sin\theta\odot$$

$$\vec{B}\times\vec{A}=\left|\vec{B}\right|\left|\vec{A}\right|\sin\theta\otimes=AB\sin\theta\otimes$$

【物理的な意味】

「内積」を取るということは，ベクトルAとベクトルBの類似成分（同相成分）がどれくらいかを示す指標

「外積」を取るということは，ベクトルAとベクトルBの非類似成分（直交成分）がどれくらいかを示す指標

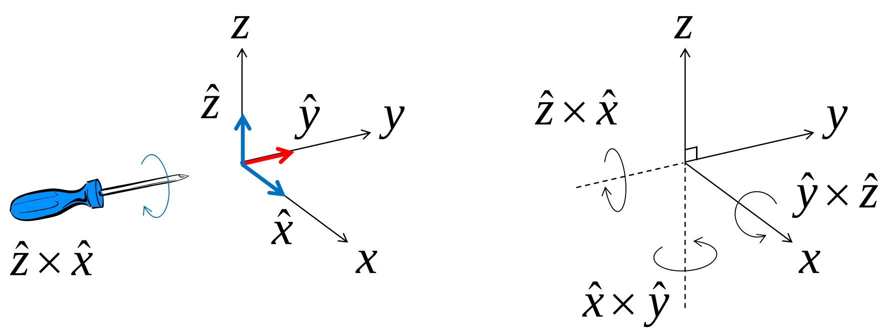
内積を取って1＝外積を取ったら0
内積を取って0＝外積を取ったら1

例えば，交流電力の式

$$P=VI\cos\theta=\dot{V}\bullet\dot{I}=\vec{V}\bullet\vec{I}$$

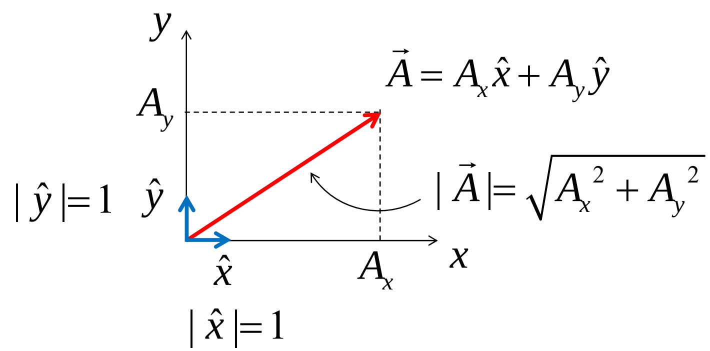
交流電圧と電流の内積は，電圧と電流の同相成分がどれくらいあるかを計算している。

外積の方向は右ねじの法則



3次元x,y,z空間の単位ベクトル
一例として，zハットとxハットの外積は「右ねじの法則」からyハットとなる。

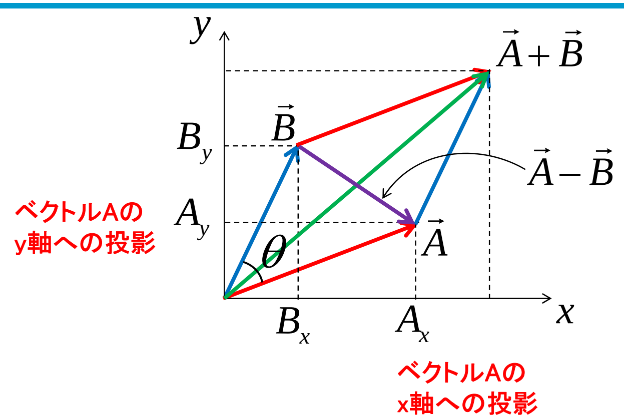
ベクトルと大きさ



2次元x,y平面上の任意ベクトルAの様子

Axはベクトルのx成分(x方向の大きさ)を表し，Ayはベクトル Aのy成分(y方向の大きさ)を表す。さらに，xハットはx方向の単位ベクトルを表しyハットはy方向の単位ベクトルを表す。

ベクトルの和と差

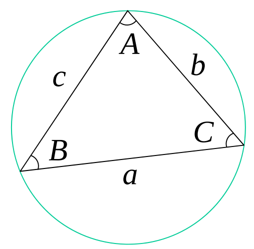


2次元x,y平面上の任意ベクトルAとベクトルBの和と差

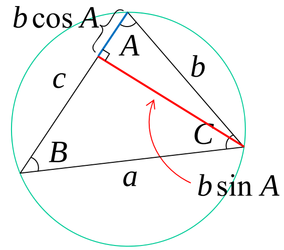
$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{x}+(A_y+B_y)\hat{y}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{x}+(A_y-B_y)\hat{y}$$

余弦定理（第2余弦法則）



$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{cases}$$



図のような補助線を引けば

$$a^2=(c-b\cos A)^2+(b\sin A)^2$$

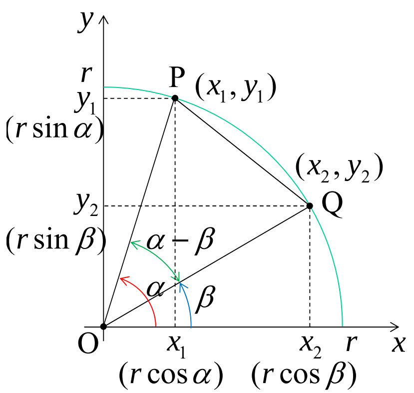
$$a^2=c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A+b^2\sin^2 A$$

$$=c^2-2bc\cos A+b^2(\cos^2 A+\sin^2 A)$$

$$=b^2+c^2-2bc\cos A$$

大村平，数学公式のはなし，p.122，日科技連

加法定理の導出（1）



余弦定理より

$$\overline{PQ}^2=r^2+r^2-2r^2\underline{\cos(\alpha-\beta)}$$

三平方の定理より

$$\overline{PQ}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

$$=(r\cos\alpha-r\cos\beta)^2+(r\sin\alpha-r\sin\beta)^2$$

$$=r^2\begin{Bmatrix}(\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\sin^2\beta)\\+(\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta)\end{Bmatrix}$$

$$=r^2(2-2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta)$$

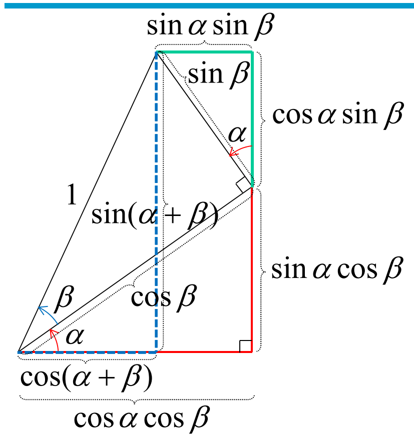
$$=2r^2-2r^2\underline{(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}$$

余弦定理と三平方の定理の結果を比較して

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

大村平，数学公式のはなし，p.128，日科技連

加法定理の導出（2）



上図より明らかに

$$\cos(\alpha+\beta)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad (1)$$

(1)式の加法定理で α → θ+π/2 とすれば、

$$\cos(\underbrace{\theta+\pi/2}_{\alpha}+\beta)$$

$$=\cos(\underbrace{\theta+\pi/2}_{\alpha})\cos\beta-\sin(\underbrace{\theta+\pi/2}_{\alpha})\sin\beta \quad (2)$$

ここで、三角関数の性質

$$\cos(\theta+\pi/2)=-\sin\theta,$$

を使えば(2)式の左辺は

$$(2)_{left}=\cos(\theta+\beta+\pi/2)=-\sin(\theta+\beta)$$

一方、三角関数の性質

$$\sin(\theta+\pi/2)=\cos\theta$$

も使えば(2)式の右辺は

$$(2)_{right}=-\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta$$

左辺＝右辺より

$$\sin(\theta+\beta)=\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta \quad (3)$$

前野，今度こそ納得する物理・数学再入門，p.19，技術評論社

加法定理の導出(3)

オイラーの公式より

$$e^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta \quad \cdots(1)$$

$$e^{j(\theta_1\pm\theta_2)}=\underline{\cos(\theta_1\pm\theta_2)}+j\underline{\sin(\theta_1\pm\theta_2)} \quad \cdots(2)$$

$$e^{j(\theta_1\pm\theta_2)}=e^{j\theta_1}e^{\pm j\theta_2}=\left(\cos\theta_1+j\sin\theta_1\right)\left(\cos\theta_2\pm j\sin\theta_2\right)$$

$$=\underline{\cos\theta_1\cos\theta_2\mp\sin\theta_1\sin\theta_2}+j\left(\underline{\sin\theta_1\cos\theta_2\pm\cos\theta_1\sin\theta_2}\right) \quad \cdots(3)$$

(2)(3)の実部を比較して

$$\cos(\theta_1\pm\theta_2)=\cos\theta_1\cos\theta_2\mp\sin\theta_1\sin\theta_2$$

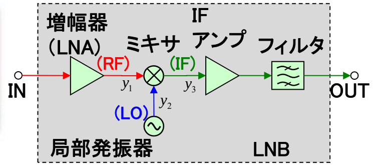
(2)(3)の虚部を比較して

$$\sin(\theta_1\pm\theta_2)=\sin\theta_1\cos\theta_2\pm\cos\theta_1\sin\theta_2$$

安部實　電気数学　ベクトルと複素数 p.94, 共立出版

加法定理の利用例(1)

$$\boxed{\begin{aligned}y_1&=A\sin\left(\omega_1t+\theta_1\right)\\ y_2&=B\sin\left(\omega_2t+\theta_2\right)\end{aligned}}$$



衛星放送用の受信回路

とすると、y_1 と y_2 の積 y_3 は

$$y_3=AB\sin\left(\omega_1t+\theta_1\right)\sin\left(\omega_2t+\theta_2\right)=AB\sin\alpha\sin\beta$$

ただし、$\begin{cases}\alpha=\omega_1t+\theta_1\\ \beta=\omega_2t+\theta_2\end{cases}$

ここで、三角関数の加法定理より

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left\{\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right\}$$

例)

f_1=11.70 GHz (RF)
f_2=10.75 GHz (LO)
} f_3= 950 MHz (IF)

f_1=12.20 GHz (RF)
f_2=10.75 GHz (LO)
} f_3=1450 MHz (IF)

$$y_3=y_1y_2=AB\frac{1}{2}\left\{\cos\left[\left(\omega_1t+\theta_1\right)-\left(\omega_2t+\theta_2\right)\right]-\cos\left[\left(\omega_1t+\theta_1\right)+\left(\omega_2t+\theta_2\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{AB}{2}\left\{\cos\left[\left(\omega_1-\omega_2\right)t+\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]-\cos\left[\left(\omega_1+\omega_2\right)t+\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]\right\}$$

出力 y_3 に入力 y_1 とローカル y_2 の差の周波数が現れる。
即ち、$f_3=f_1-f_2$ が成り立つ。

加法定理の利用例(2)

加法定理の応用例
(1) sin15° を関数電卓を使わずに求めよ。

$$\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}=\frac{1.414(1.732-1)}{4}\simeq0.259$$

大村平, 数学公式のはなし, p.128, 日科技連

複素数の計算

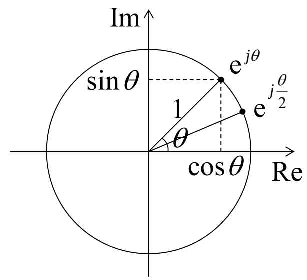
$$\mathrm{e}^{j\theta}=\cos\theta+j\sin\theta$$

半角の式

$$\sqrt{\mathrm{e}^{j\theta}}=\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{j\frac{\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}+j\sin\frac{\theta}{2}$$

倍角の式

$$\left(\mathrm{e}^{j\theta}\right)^2=\mathrm{e}^{j2\theta}=\cos2\theta+j\sin2\theta$$



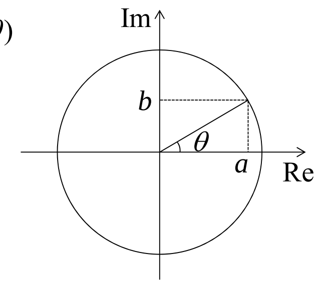
$$a+jb=\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{j\theta}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\theta+j\sin\theta\right)$$

$$a=\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta,\quad b=\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta$$

半角の式

$$\sqrt{a+jb}=\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{e}^{j\theta}}=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{4}}e^{j\frac{\theta}{2}}$$

$$=\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+j\sin\frac{\theta}{2}\right)$$



分母の有理化

$\Gamma = a + jb$ のとき $\dfrac{1+\Gamma}{1-\Gamma}$ を有理化して、実部と虚部を求めよ。

$$c = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} = \frac{1+(a+jb)}{1-(a+jb)} = \frac{(1+a)+jb}{(1-a)-jb}$$

$$c = \frac{(1+a)+jb}{(1-a)-jb}\cdot\frac{(1-a)+jb}{(1-a)+jb} = \frac{\{(1+a)+jb\}\{(1-a)+jb\}}{(1-a)^2+b^2}$$

$$= \frac{(1+a)(1-a)+jb(1+a)+jb(1-a)-b^2}{(1-a)^2+b^2}$$

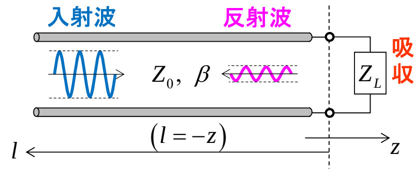
$$= \frac{1-a^2+jb+jab+jb-jab-b^2}{(1-a)^2+b^2} = \frac{1-a^2-b^2+j2b}{(1-a)^2+b^2}$$

$$\mathrm{Re}[c] = \frac{1-a^2-b^2}{(1-a)^2+b^2},\quad \mathrm{Im}[c] = \frac{2b}{(1-a)^2+b^2}$$

オイラーの公式と絶対値の応用

負荷における複素反射係数をΓとするとき、伝送線路上の電圧は次式で与えられる。線路上の電圧の包絡線（最大値）を求めよ。

$$V(z) = e^{j(\omega t-\beta z)} + \Gamma e^{j(\omega t+\beta z)}$$



に以下の関係を代入すると

$$z=-l,\quad \Gamma = |\Gamma| e^{j\theta}$$

$$V(l) = e^{j(\omega t+\beta l)} + \Gamma e^{j(\omega t-\beta l)}$$
$$= e^{j\omega t}e^{j\beta l} + \Gamma e^{j\omega t}e^{-j\beta l}$$
$$= e^{j\omega t}e^{j\beta l}(1+\Gamma e^{-j2\beta l})$$
$$= e^{j\omega t}e^{j\beta l}\left\{1+|\Gamma| e^{-j(\theta-2\beta l)}\right\}$$

従って

$$|V(l)| = \left|1+|\Gamma| e^{j(\theta-2\beta l)}\right|$$

所で，導出した $|V(l)|$ にオイラーの公式を使えば，

$$\left|1+|\Gamma| e^{j(\theta-2\beta l)}\right| = \left|1+|\Gamma|\cos(\theta-2\beta l) + j|\Gamma|\sin(\theta-2\beta l)\right|$$
$$= \left|\{1+|\Gamma|\cos(\theta-2\beta l)\} + j\{|\Gamma|\sin(\theta-2\beta l)\}\right|$$
$$= |\alpha + j\beta| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$
$$= \sqrt{\{1+|\Gamma|\cos(\theta-2\beta l)\}^2 + \{|\Gamma|\sin(\theta-2\beta l)\}^2}$$
$$= \sqrt{1+|\Gamma|^2+2|\Gamma|\cos(\theta-2\beta l)}$$

双曲線関数

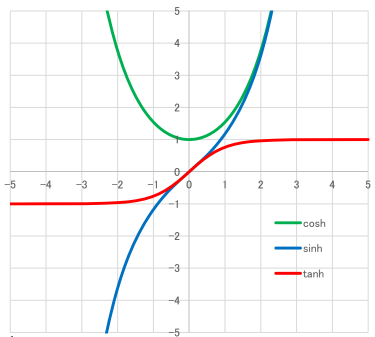
双曲線関数

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}$$

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta}$$

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$



三角関数

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

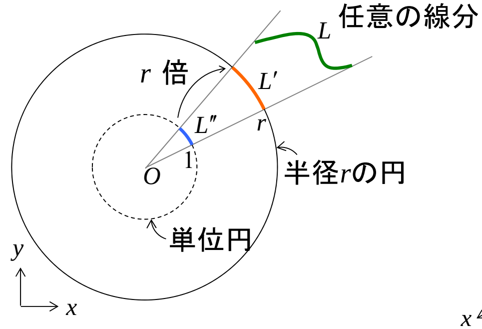
$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j}$$

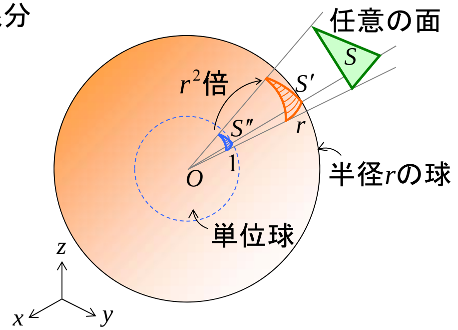
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

京極，図解入門物理数学，p.38，アーク出版，2014

平面角と立体角





L' : Lを半径rの円に投影した線分
L'' : Lを半径1の円に投影した線分

平面角[rad] : $\theta \equiv L'' = \dfrac{L'}{r}$

S' : Sを半径rの球に投影した面積
S'' : Sを半径1の球に投影した面積

立体角[Sr] : $\Omega \equiv S'' = \dfrac{S'}{r^2}$

伊藤: 図でわかる電磁気学, p.23, 講談社サイエンティフィク

円運動1

1. 半径rの円周の長さL

$$L = 2\pi r = r\left(2\pi\right)$$

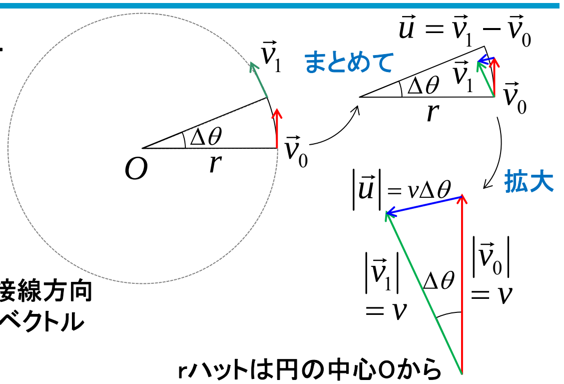
2. 半径rの円弧の長さl

$$l = r\theta$$

3. 円運動の速度v

$$\vec{v} = r\omega\hat{\varphi}$$

φハットは円の接線方向で左回りの単位ベクトル



4. 円運動の加速度

rハットは円の中心Oから外に向かう単位ベクトル

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{u}}{\Delta t} = \frac{v\Delta\theta}{\Delta t}\left(-\hat{r}\right) = v\omega\left(-\hat{r}\right)$$

$$= r\omega^2\left(-\hat{r}\right) = \frac{v^2}{r}\left(-\hat{r}\right)$$

5. 円運動の周期

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi r}{r\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

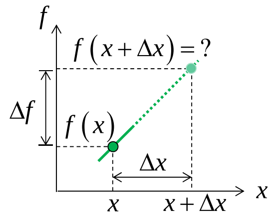
兵藤, 福岡, 高木 ``高等学校 物理Ⅱ 改訂版'' p.36-39, 啓林館

関数の一次近似

一次近似の式

$$\boxed{f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x}$$

$$\therefore \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= f'(x)\Delta x$$



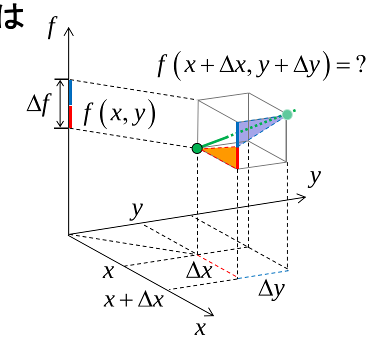
2変数関数も同様にして、一次近似の式は

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ & = f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \end{aligned}}$$

$$\therefore \Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

全微分とも呼ぶ

$$= \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x}_{\text{x方向の増分}} + \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y}_{\text{y方向の増分}}$$



常微分方程式

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x}$$

$$dy = xdx$$

$$\int dy = \int xdx$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = 2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$d\frac{dy}{dx} = 2xdx$$

$$\int d\frac{dy}{dx} = \int 2xdx$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + C$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^2 + C}$$

$$dy = x^2dx + Cdx$$

$$\int dy = \int x^2dx + \int Cdx$$

$$y = \frac{1}{3}x^3 + Cx + C_2$$

偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin\omega x = \omega\cos\omega x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}yz^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}yz^2 = z^2$$

$$\frac{\partial}{\partial z}yz^2 = 2yz$$

置換による(偏)微分

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$ を求めよ。

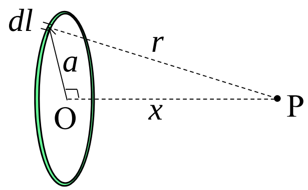
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ において

$X=x^2+a^2$ とおくと

$f(X)=\dfrac{1}{\sqrt{X}}=X^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{df(x)}{dx}=\dfrac{df(x)}{dX}\dfrac{dX}{dx}$

この問題は半径aの円環電荷が中心からx離れたP点に作る電界を求める際に出てくる



$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{df(x)}{dX}\frac{dX}{dx}=-\frac{1}{2}X^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

テイラー級数の導出(1)

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ に展開できるとする.
このとき，各係数 $a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ を求めよ.

手順1. $f(x)$ に $x=0$ を代入すると,

$f(0)=a_0 \quad \therefore \boxed{a_0=f(0)}$

手順2. $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}$

$x=0$ を代入すると,

$f'(0)=a_1 \quad \therefore \boxed{a_1=f'(0)}$

手順3. $f''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}$

$x=0$ を代入すると,

$f''(x)=2a_2 \quad \therefore \boxed{a_2=\dfrac{1}{2}f''(0)}$

テイラー級数の導出(2)

手順4. $f^{(3)}(x)=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$

$x=0$ を代入すると,

$f^{(3)}(x)=3\cdot 2a_3 \quad \therefore \boxed{a_3=\dfrac{1}{3!}f^{(3)}(0)}$

手順5. $f^{(4)}(x)=4\cdot 3\cdot 2a_4+5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5x\cdots+n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4}$

$x=0$ を代入すると,

$f^{(4)}(x)=4\cdot 3\cdot 2a_4 \quad \therefore \boxed{a_4=\dfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)}$

あとは類推して,

$$\boxed{f(x)=\underbrace{f(0)}_{a_0}+\underbrace{\frac{f'(0)}{1!}}_{a_1}x+\underbrace{\frac{f''(0)}{2!}}_{a_2}x^2+\underbrace{\frac{f''(0)}{3!}}_{a_3}x^3+\cdots+\underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{a_n}x^n}$$

テイラー展開

次の関数をx=0の近傍でテイラー展開(これをマクローリン展開とも呼ぶ)せよ。

$f(x)=\sin x \qquad f(x)=\cos x$

さらに x<<1 のとき，tan x = x で近似できることを示せ。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\cdots$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\simeq\frac{x-\frac{1}{6}x^3}{1-\frac{1}{2}x^2}\simeq x$$

近似式（テイラー展開の利用例）

$x \ll 1,\ y \ll 1$ のとき

(1) $\dfrac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} \simeq 1 \mp x$

(2) $(1+x)^2 \simeq 1 + 2x$

(3) $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \simeq 1 + \dfrac{1}{2}x$

(4) $\sin x \simeq x$

(5) $\cos x \simeq 1 - \dfrac{1}{2}x^2$

(6) $\tan x \simeq x$

(7) $e^x \simeq 1 + x$

手計算の工夫（入力ミス軽減）

光速の計算

$c = 3 \times 10^8$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times 8.854 \times 10^{-12}}} = \sqrt{\frac{1 \times 10^{19}}{111.263}} = \sqrt{\frac{1 \times 10^{20}}{1112.63}} = \sqrt{\frac{1}{1112.63}} \times 10^{10}$$

$= 0.03 \times 10^{10}$

波動インピーダンスの計算

$$Z_w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \times 10^{-7}}{8.854 \times 10^{-12}}} = \sqrt{1.419 \times 10^5} = \sqrt{14.19 \times 10^4} = \sqrt{14.19} \times 10^2 = 3.77 \times 10^2$$

$$Z_w = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 3 \times 10^8 = 120\pi$$

波数の計算

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f \sqrt{\mu\varepsilon} = 2\pi f \frac{1}{1/\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{2\pi f}{3 \times 10^8}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon = (2\pi f)^2 \mu\varepsilon = \frac{(2\pi f)^2}{\left(1/\sqrt{\mu\varepsilon}\right)^2} = \frac{(2\pi f)^2}{\left(3 \times 10^8\right)^2}$$

置換積分

次の定積分を求めよ。

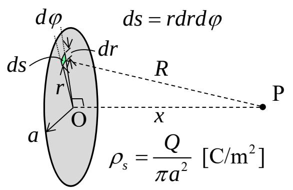
$$S = \int_{r=0}^{a} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr$$

この問題は半径aの円板状一様電荷が中心からx離れたP点に作る電位を求める際に出てくる

置換積分を行うために

$x^2 + r^2 = t$ と置くと $\dfrac{dt}{dr} = 2r$ となるから

$$\int_{r=0}^{a} \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}} dr$$



$$= \int_{t=x^2}^{x^2+a^2} \frac{r}{\sqrt{t}} \frac{1}{2r} dt = \int_{t=x^2}^{x^2+a^2} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_{t=x^2}^{x^2+a^2} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = \left[t^{\frac{1}{2}} \right]_{x^2}^{x^2+a^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + a^2} - \sqrt{x^2}$$

従って $S = \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} - x, & x > 0 \\ \sqrt{x^2 + a^2} + x, & x < 0 \end{cases}$

D. K. Cheng, Field and Wave Electromagnetics 2nd ed., p.98, Addison Wesley

積の積分（部分積分）1

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$\displaystyle\int x^2 e^{2x} dx$ を積分せよ。

$f(x) = x^2,\ g'(x) = e^{2x}$ とおくと、

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) - \int 2x \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \underbrace{\int x e^{2x} dx}$$

$$\boxed{\int x e^{2x} dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}}$$

ここに部分積分をもう一度適用して

従って、最終的に

$$\int x^2 e^{2x} dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} - \left(x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \right) = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$$

大村，数学公式のはなし，pp. 170–172，日科技連

積の積分(部分積分)2

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$I=\int_0^\infty \sin\omega t\, e^{-st}dt$ を求めよ。 $f(t)=\sin\omega t,\ g'(t)=e^{-st}$ とおくと、

$$=\left[\sin\omega t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \omega\cos\omega t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{s}\left[\sin\omega t e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{\omega}{s}\int_0^\infty \underbrace{\cos\omega t\, e^{-st}}\,dt$$ ここに部分積分をもう一度適用 $f(t)=\cos\omega t,\ g'(t)=e^{-st}$

$$=-\frac{1}{s}\left[\sin\omega t e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{\omega}{s}\left[\cos\omega t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^\infty - \frac{\omega}{s}\int_0^\infty -\omega\sin\omega t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{s}\left[\sin\omega t e^{-st}\right]_0^\infty - \frac{\omega}{s^2}\left[\cos\omega t e^{-st}\right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{s^2}\int_0^\infty \sin\omega t e^{-st}dt$$

$$I=-\frac{1}{s}\left[\sin\omega t e^{-st}\right]_0^\infty - \frac{\omega}{s^2}\left[\cos\omega t e^{-st}\right]_0^\infty - \frac{\omega^2}{s^2}I$$

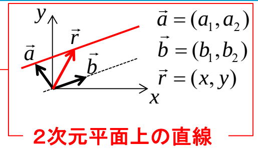
最終的に $I=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

森, 演習で学ぶ基礎制御工学, p.7, 森北出版

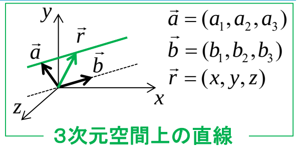
直線、円、球面、平面の方程式

直線の方程式

2次元 $\dfrac{x-a_1}{b_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2}$



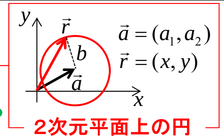
3次元 $\dfrac{x-a_1}{b_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2}=\dfrac{z-a_3}{b_3}$



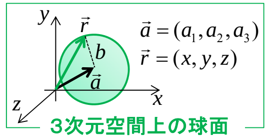
4次元 $\dfrac{x-a_1}{b_1}=\dfrac{y-a_2}{b_2}=\dfrac{z-a_3}{b_3}=\dfrac{u-a_4}{b_4}$ 4次元空間の直線は図示できない

円、球の方程式

2次元 $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=b^2$



3次元 $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2=b^2$

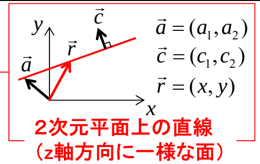


4次元 $(x-a_1)^2+(y-a_2)^2+(z-a_3)^2+(u-a_4)^2=b^2$ 4次元空間の球(超球)は図示できない

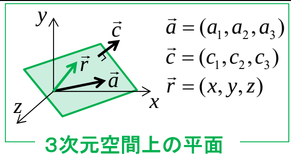
等価

平面の方程式 $d=-\vec{a}\bullet\vec{c}$

2次元 $c_1x+c_2y+d=0$



3次元 $c_1x+c_2y+c_3z+d=0$



4次元 $c_1x+c_2y+c_3z+c_4u+d=0$ 4次元空間の平面は図示できない

村上 ``ベクトル解析'' pp.51-70, 海鳴社

物理定数と単位

$e=1.6\times10^{-19}$ C 1.6/19 は鏡像(金属表面の自由電子が見えている)

$m_e=9.11\times10^{-31}$ kg 9.11の災害

$\varepsilon_0=8.854\times10^{-12}$ F/m

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ H/m

$c=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8$ m/s

$\mathrm{e}=2.718281828459041\cdots$

$\pi=3.14159265359\cdots$

$c_{water}=4.19$ J/g·K

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\times10^9$$

$$Z_W=\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}=120\pi=376.7\ \Omega$$

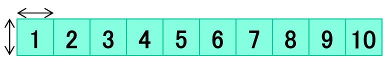
$$\sqrt{100\times10^{-16}}=10\times10^{-8}=10^{-7}$$

$10\ \mathrm{cm}^2=10\times\left(10^{-2}\right)^2\ \mathrm{m}^2$

$10\ \mathrm{cm}^2=10\times\left(10^{-2}\right)^2\ \mathrm{m}^2$

1 cm $\quad 1\ \mathrm{cm}^2\times10=10\ \mathrm{cm}^2$

1 cm



大学数学の基礎定義

N 自然数全体

R 実数全体

Z 整数全体

C 複素数全体

Q 有理数全体

H 4元数全体

Q.E.D Quod erat demonstrandum
以上が証明すべきことであった

e.g. exempli gratia = for example
例えば

etc. et cetera
など

i.e. id est = that is
即ち

s.t. such that
以下のことが成り立つような

w.r.t. with respect to
～に関して

酒井文雄, ``大学数学の基礎,'' pp.4-5, 共立出版, 2011