

クーロンの法則

1st. 2016/04/14
Lst. 2021/10/11

電磁気学の偉人マップ

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$ アンペール-マクスウェルの法則
 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$ ファラデーの法則
 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ ガウスの法則
 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$
 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ ビオ-サバールの法則
 $c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] 光速
 $e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ [C] 素電荷
 $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}l$ フレミング左手則
 $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$ ローレンツカ
 $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ フレミング右手則
 $R = \rho \frac{l}{S}$
 $C = \frac{Q}{V}$
 $L = \frac{\phi}{I}$
 $I = \frac{dQ}{dt}$
 $E = IR$ オームの法則
 $\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$ クーロンの法則

ミリカン 1868-1953 (85)
 ヘルツ 1857-1894 (37)
 テスラ 1856-1943 (87)
 トムソン 1856-1940 (84)
 ローレンツ 1853-1928 (75)
 フレミング 1849-1945 (96)
 マクスウェル 1831-1879 (48)
 キルヒホッフ 1824-1887 (63)
 レンツ 1804-1865 (61)
 ヘンリー 1797-1878 (81)
 ファラデー 1791-1867 (76)
 サバール 1791-1841 (50)
 オーム 1789-1854 (65)
 ガウス 1777-1855 (78)
 エルステッド 1777-1851 (74)
 アンペール 1775-1836 (61)
 ビオ 1774-1862 (88)
 ボルタ 1745-1827 (82)
クーロン 1736-1806 (70)
 キャベンディッシュ 1731-1810 (79)
 平賀源内 1728-1780 (52)
 フランクリン 1706-1790 (84)
 デュ・フェ 1698-1739 (41)
 ギルバート 1544-1603 (59)

※知恵は、バトンリレーのように繋がって行く...
 1639 宗教・外交・貿易制限 (いわゆる鎖国)

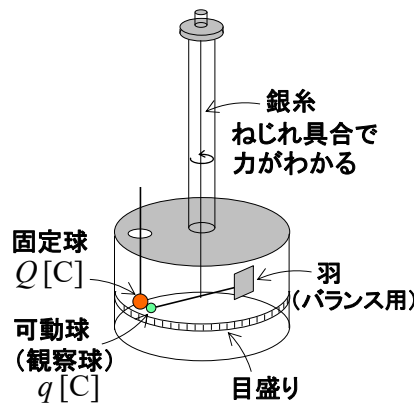
ミクロの観察/観測
 マクロの観察/観測

1400 1500 1600 1700 1800 1900 2000
 1854

どんな偉人も先達の努力・知恵・発見を利用させてもらっている

クーロンの法則①

クーロンのねじり秤



固定球	可動球 (力の観察点)	力の性質
Q	q	同種電荷では斥力
Q	$-q$	異種電荷では引力

\hat{r} : 固定球から可動球に向かう
大きさ1の単位ベクトル

重力には引力しかないが、クーロン力には
引力と斥力の2種類が存在する

クーロンの法則②

可動球にはたらく電気力Fには、次の法則があった。

- (1) 固定球の電荷の大きさに比例した。 $\propto Q$
 - (2) 可動球の電荷の大きさに比例した。 $\propto q$
 - (3) 電荷間の距離の2乗に反比例した。 $\propto r^{-2}$
 - (4) 方向は電荷間を結んだ直線の延長上であった。
 - (5) 同種の電荷間では斥力、異種の電荷間では引力であった。
- } $\propto \hat{r}$

クーロンの法則③

【ベクトル形】

電気力 \vec{F} = $k \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$

電荷1 Q 電荷2 q \hat{r} Qとqを結ぶ直線上の単位ベクトル*

※ Qとqが同種なら外向きの単位ベクトル, Qとqが異種なら内向き単位ベクトル

比例定数 $1/(4\pi\epsilon_0)$

r^2 Qとqの間の距離

真空の誘電率: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$,
 比例定数 (SI単位系): $k \doteq 9 \times 10^9$

(参考) 比例定数決定までの経緯...
https://www.kusamalab.org/lecture/em1/D6_unit_constitution_slide.pdf

SI単位系のクーロンの法則

【ベクトル形】

電気力 \vec{F} = $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$

電荷1 Q 電荷2 q \hat{r} Qとqを結ぶ直線上の単位ベクトル*

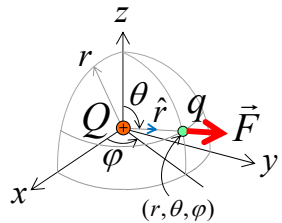
※ Qとqが同種なら外向きの単位ベクトル, Qとqが異種なら内向き単位ベクトル

比例定数 k

r^2 Qとqの間の距離

$[N] = 1 \div [F/m] \times [C^2] \div [m^2]$

ベクトル形のメリット



$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$

ベクトル形を使えば、
 吸引力と反発力を自動的に考慮できる。

異符号①	異符号②	同符号(+と+も同じ)
$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(-q)}{r^2} \hat{r}$	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Qq}{r^2} \hat{r}$	$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q(-q)}{r^2} \hat{r}$
$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} (-\hat{r})$	$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} (-\hat{r})$	$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$
↑ 吸引力になる	↑ 吸引力になる	↑ 反発力になる

SI単位系のクーロンの法則

【スカラー形】

電気力 F = $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}$

電荷1 Q 電荷2 q

比例定数 k

r^2 Qとqの間の距離

$[N] = 1 \div [F/m] \times [C^2] \div [m^2]$

クーロンの法則の比例定数

9

【演習】 比例定数 k の値を求めよ。

【解答】 真空の誘電率: $\epsilon_0=8.854 \times 10^{-12}$ F/m を代入して、

$$\text{比例定数 (SI単位系)} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$1 \div [\text{F/m}] = [\text{m/F}] = [\text{V} \cdot \text{m/C}] = [\text{J} \cdot \text{m/C}^2]$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \cdot 8.854 \times 10^{-12}} = 8.98774 \times 10^{-3} \times 10^{12} \approx 9 \times 10^9$$

Answer: 9×10^9

重力とクーロン力の類似性

10

重力(万有引力の法則)

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G=6.7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \\ \text{電子の質量 } m=9.11 \times 10^{-31} \text{ kg} \end{array} \right.$$

電気力(クーロンの法則)

$$F = k \frac{Qq}{r^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k=9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \\ \text{電子の電荷 } e=1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \end{array} \right.$$

重力とクーロン力の比較①

11

【演習】 空気中に置いた二つの電子の距離を1 mとすると、電磁気力の大きさは重力に比べてどれ位大きいのか？(演習書, p.3 改)

【解答】 重力の式より

$$\begin{aligned} F_N &= G \frac{Mm}{r^2} \\ &= 6.7 \times 10^{-11} \frac{(9.11 \times 10^{-31})^2}{1} \\ &= 5.56 \times 10^{-71} \text{ N} \end{aligned}$$

クーロン力の式より

$$\begin{aligned} F_C &= k \frac{Qq}{r^2} \\ &= 9.0 \times 10^9 \frac{(1.6 \times 10^{-19})^2}{1} \\ &= 2.3 \times 10^{-28} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\frac{F_C}{F_N} = \frac{kQq}{GMm} = \frac{9.0 \times 10^9 (1.6 \times 10^{-19})^2}{6.7 \times 10^{-11} (9.11 \times 10^{-31})^2} = 4.14 \times 10^{42}$$

※ 重力は電磁気力の 10^{42} 分の1程度なので極めて小さい。もしも、重力が電磁気力と同程度の大きさであったら・・・、クーロンのねじり秤実験やミリカンの油滴実験において重力や万有引力の影響を無視することができず、定式化が遅れて現在のようなエレクトロニクス全盛時代はなかった可能性もある。

Newton, ``重力は電磁気力の 10^{42} 分の1,`` pp.40-41, 2016-1月号

重力とクーロン力の比較②

12

【演習】 地表1mの空気中に浮いている電子にはたらく重力の大きさを求めよ。また、質量60 kgにはたらく重力の大きさを求めて両者を比較せよ。ただし、万有引力定数 $G=6.7 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, 電子質量 $m=9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 地球半径 $r=6371 \text{ km}$, 地球質量 $M=5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$ とせよ。

【解答】

空中1 mに浮遊する電子にはたらく重力は

$$\begin{aligned} F_N &= G \frac{Mm}{r^2} \\ &= 6.7 \times 10^{-11} \frac{5.972 \times 10^{24} \times 9.11 \times 10^{-31}}{(6371 \times 10^3)^2} \\ &= 8.98 \times 10^{-30} \text{ N} \end{aligned}$$

60 kgにはたらく物体にはたらく重力は

$$\begin{aligned} F_N &= G \frac{Mm}{r^2} \\ &= 6.7 \times 10^{-11} \frac{5.972 \times 10^{24} \times 60}{(6371 \times 10^3)^2} \\ &= 5.91 \times 10^2 \text{ N} \end{aligned}$$

※ 単独の電子は軽いので地球にはほとんど束縛されない。

Newton, ``重力は電磁気力の 10^{42} 分の1,`` pp.40-41, 2016-1月号

クーロン力を求める問題①

【演習】 次の問に答えよ。

- (1) 空気中で1 mの距離の位置に+2 Cと+5 Cの電荷が配置されている。両者に働くクーロン力の大きさと種類(引力・斥力)を求めよ。
- (2) 空気中で1 mの距離の位置に+2 Cと-1 Cの電荷が配置されている。両者に働くクーロン力の大きさと種類(引力・斥力)を求めよ。

【解答】

(1) クーロンの法則より

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} = 9 \times 10^9 \frac{2 \cdot 5}{1^2} \hat{r} = 90 \times 10^9 \hat{r} \text{ N}$$

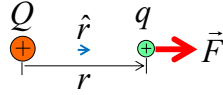
同種電荷なので斥力がはたらく。(または、Qからqに向かう方向)

(2) クーロンの法則より

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} = 9 \times 10^9 \frac{2(-1)}{1^2} \hat{r} = 18 \times 10^9 (-\hat{r}) \text{ N}$$

異種電荷なので引力がはたらく。(または、qからQに向かう方向)

(1) 1.8×10^{10} N, 引力 (2) 9.0×10^{10} N, 斥力



クーロン力を求める問題②

【演習】 一辺の長さが a [m] の正三角形の頂点 A, B, C に、それぞれ $Q_1, Q_2, -Q_2$ [C] の点電荷があるとき、頂点 A の点電荷に働く力を求めよ。(教科書, p.7, 章末)

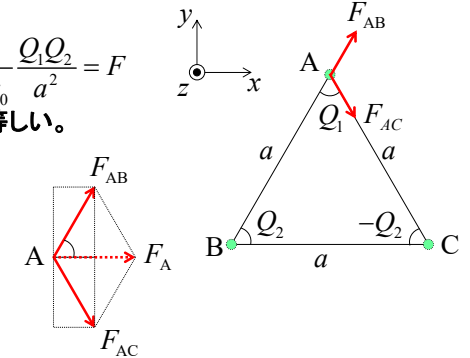
【解答】 A点に働く力は、B点に置かれた電荷 Q_2 [C]によるクーロン力 F_{AB} と、C点に置かれた電荷 $-Q_2$ [C]によるクーロン力 F_{AC} の重ね合わせで与えられるので、

$$\left. \begin{aligned} F_{AB} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} \\ F_{AC} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} \end{aligned} \right\} F_{AB} = F_{AC} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} = F$$

両者の大きさは等しい。

ベクトルの合成より、

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} \\ &= F_{AB} \cos 60^\circ \hat{x} + F_{AC} \cos 60^\circ \hat{x} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} \frac{1}{2} \hat{x} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} \frac{1}{2} \hat{x} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2} \hat{x} \end{aligned}$$



Answer : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{a^2}, B \rightarrow C$

クーロン力を求める問題③

【演習】 水素原子を周回する電子の軌道半径を $r = 0.53 \times 10^{-10}$ m とするとき電子の速度は秒速何キロメートルか。(演習書, p.2, 基礎 改)

【解答】 陽子と電子はクーロン力で吸引されるので、両者が結合しないためには、電子が陽子の周囲を円運動する必要がある。円運動の釣合いの式より、

クーロン力 向心力

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

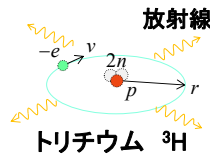
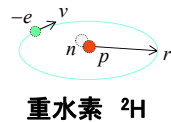
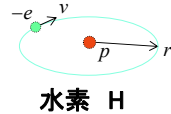
これをvについて求めると

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \frac{r}{m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr}$$

数値を代入すると

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}} = \frac{1.6 \times 10^{-19}}{\sqrt{4\pi(8.854 \times 10^{-12})(9.11 \times 10^{-31})(0.53 \times 10^{-10})}} = 2.184 \times 10^6$$

円運動の周期から周波数を求めると $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2.184 \times 10^6}{2\pi(0.53 \times 10^{-10})} = 6.56 \times 10^{15} = 6.56 \text{ PHz}$



クーロン力を求める問題④

【演習】 ヘリウム原子は2つの電子と2つの陽子からなる。電子の軌道半径を $r = 0.5 \times 10^{-10}$ m とするとき、次の問に答えよ。(1) 2つの電子間に働くクーロン力 F_{ee} と、陽子-電子間に働くクーロン力 F_{pe} をそれぞれ求めよ。また電子に働く合力 $F_t = F_{ee} + F_{pe}$ は幾らか (2) 2つの電子が原子核に対して常に対極の位置を周回しているとき、電子の速度は幾らか。

【解答】 電子同士の力 F_{ee} は反発力、陽子と電子間の力 F_{pe} は吸引力であり、

$$\vec{F}_{ee} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2r)^2} = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1)$$

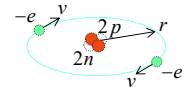
$$\vec{F}_{pe} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e \cdot e}{r^2} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 r^2} (-\hat{r}) \quad (2)$$

で与えられる。電子にはたらく合力は式(1)と式(2)の和で、

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{pe} + \vec{F}_{ee} = \frac{7e^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} (-\hat{r}) \quad (3)$$

電子が陽子と結合しないための円運動の釣合いの式より

$$\frac{7e^2}{16\pi\epsilon_0 r^2} = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{7e^2 r}{16\pi\epsilon_0 r^2 m} = \frac{7e^2}{16\pi\epsilon_0 r m} \Rightarrow v = \frac{e}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi\epsilon_0 r m}}$$



Answer : $\begin{cases} F_{ee} = 2.3 \times 10^{-8} \\ F_{pe} = 1.84 \times 10^{-7} \\ F_t = 1.61 \times 10^{-7} \\ v = 2.973 \times 10^6 \end{cases}$

原子核を構成する陽子数が増えると、陽子と結合しないために電子の公転速度も大きくなる。

円運動の公式

半径rの円周の長さL

$$L = 2\pi r = r(2\pi)$$

半径rの円弧の長さl

$$l = r\theta$$

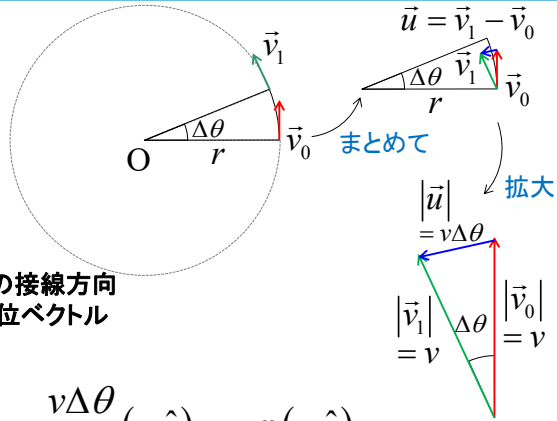
円運動の速度v

$$\vec{v} = r\omega\hat{\phi} \quad \phi\text{ハットは円の接線方向で左回りの単位ベクトル}$$

円運動の加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\vec{u}}{\Delta t} = \frac{v\Delta\theta}{\Delta t}(-\hat{r}) = v\omega(-\hat{r})$$

$$= r\omega^2(-\hat{r}) = \frac{v^2}{r}(-\hat{r}) \quad r\text{ハットは円の中心Oから外に向かう単位ベクトル}$$



兵藤, 福岡, 高木 ``高等学校 物理II 改訂版'' p.36-39, 啓林館

静電誘導①

帯電導体と誘導導体が近いとき

帯電導体と誘導導体が離れるとき

誘導導体がアースされているとき
地球は我々よりも非常に大きいので、多少の電荷を供給しても、裏側に電荷の不足は起きない。無限の電荷供給源(アース)

静電誘導②

外部電界と内部電界の打消しにより、導体内部では電界ゼロ

外部電界 \vec{E}_{ext}

内部電界 $-\vec{E}_{inn}$

自由電子の移動

自由電子の移動

自由電子
原子核

負に帯電

正に帯電

帯電導体の電荷分布

【例題】 次のケースで、電荷はどのように分布するか？

電荷の注入

(1) 導体球 または導体球殻

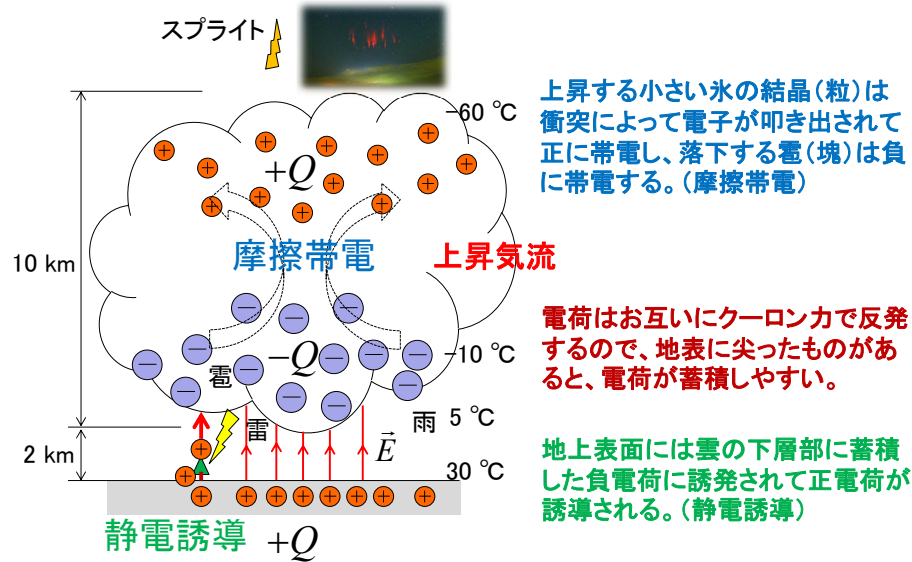
(2) 導体円環

(3) 導体棒

$\sigma [C/m^2]$

Answer : (1) クーロン力によって互いに反発するため、導体球表面に電荷が均一に分布する。(2) 同じ理由で円環の外周に均一に分布する。(3) 同じ理由で導体棒のエッジに集中する。(均一にはならない。)

静電誘導の例

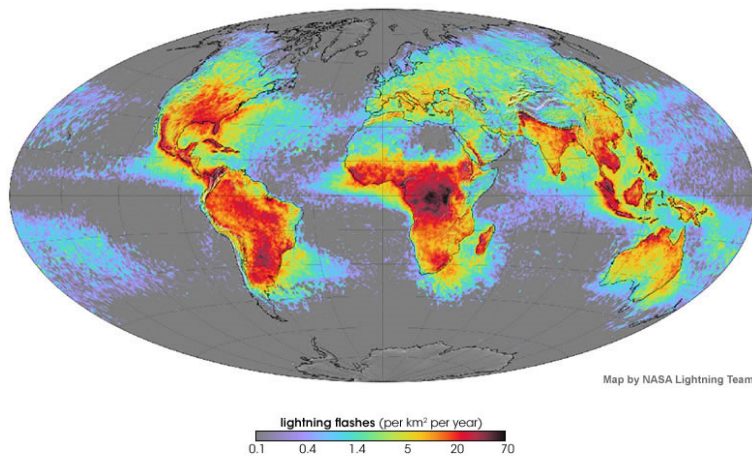


紙田, ``改訂版 やさしい電気の手ほどき`` pp. 24-25, 電気書院 より引用 Discovery Channel, 災害警報 稲妻

稲妻



World Lightning Map



<https://geology.com/articles/lightning-map.shtml>

10min. ボックス 理科1分野とは?

分かりやすい実験やCG で視覚的に伝える!



https://www.nhk.or.jp/school/rika/10min_rika1/