電界と電気力線

1st. 2016/04/14
Lst. 2021/11/22

電界の定義1

加速度は単位質量 m=1 kg に働く重力に等しい

m[kg]

mg[N]

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{重力・力 [N]}} = \underbrace{m}_{\text{質量 [kg]}}\underbrace{\vec{g}}_{\text{加速度・重力加速度 [N/kg] or [m/s}^2\text{]}}$$

イメージし易いように、馴染みのある重力と対比させて考えると・・・

電界は単位電荷 q=+1 C に働くクーロン力に等しい

q[C]

qE[N]

$$\underbrace{\vec{F}}_{\text{クーロン力 電気力 [N]}} = \underbrace{q}_{\text{電荷 [C]}}\underbrace{\vec{E}}_{\text{電場・電界 [N/C] or [V/m]}}$$

点電荷が作る電界

【ベクトル形】

$$\vec{E} = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{比例定数}} \frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

電荷: Q

電荷から観測点に向かう単位ベクトル※: $\hat{r}$

電荷から観測点までの距離: r

※ Q＜0 なら，観測点から電荷に向かう単位ベクトル

[V/m] = 1 ÷ [F/m] × [C] ÷ [m^2]

電界／電場はq=1 Cを配置したときに働く
クーロン力に等しい

点電荷が作る電界

【スカラー形】

$$E = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{比例定数}} \frac{Q}{r^2}$$

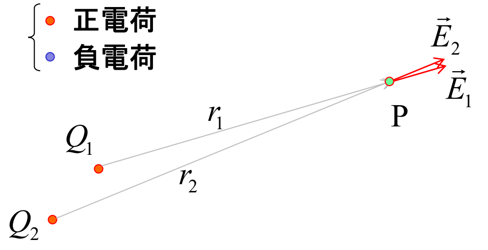
電荷: Q

電荷から観測点までの距離: r

[V/m] = 1 ÷ [F/m] × [C] ÷ [m^2]

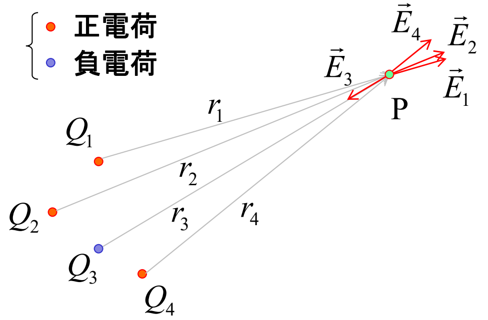
電界／電場はq=1 Cを配置したときに働く
クーロン力に等しい

点電荷が作る電界の重ね合わせ



$$\vec{E}_{\mathrm{P}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$



$$\vec{E}_{\mathrm{P}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\vec{E}_{\mathrm{P}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

点電荷電界の重ね合わせ

【ベクトル形】

i 番目の電荷

i 番目の電荷から観測点に向かう単位ベクトル※

※ $Q_i < 0$なら，観測点からi番目の電荷に向かう単位ベクトル

$$\vec{E}_{\mathrm{P}} = \underbrace{\sum_{i}}_{\text{重ね合わせ}} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{比例定数}} \frac{Q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

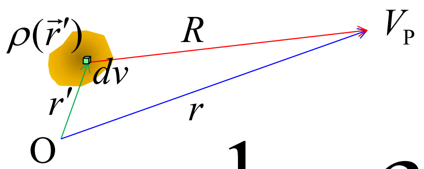
i 番目の電荷から観測点までの距離

[V/m] = 1 ÷ [F/m] × [C] ÷ [m^2]

任意の電界／電場は点電荷が作る電界の重ね合わせで表現される

電界の総和（一般化）

【ベクトル形】



位置r' における電荷密度 [C/m^3]

$$\vec{E}_{\mathrm{P}}(\vec{r}) = \underbrace{\int_V}_{\text{重ね合わせ領域}} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{比例定数}} \frac{\rho(\vec{r}')}{R^2} dv \hat{R}$$

位置rにおける電界

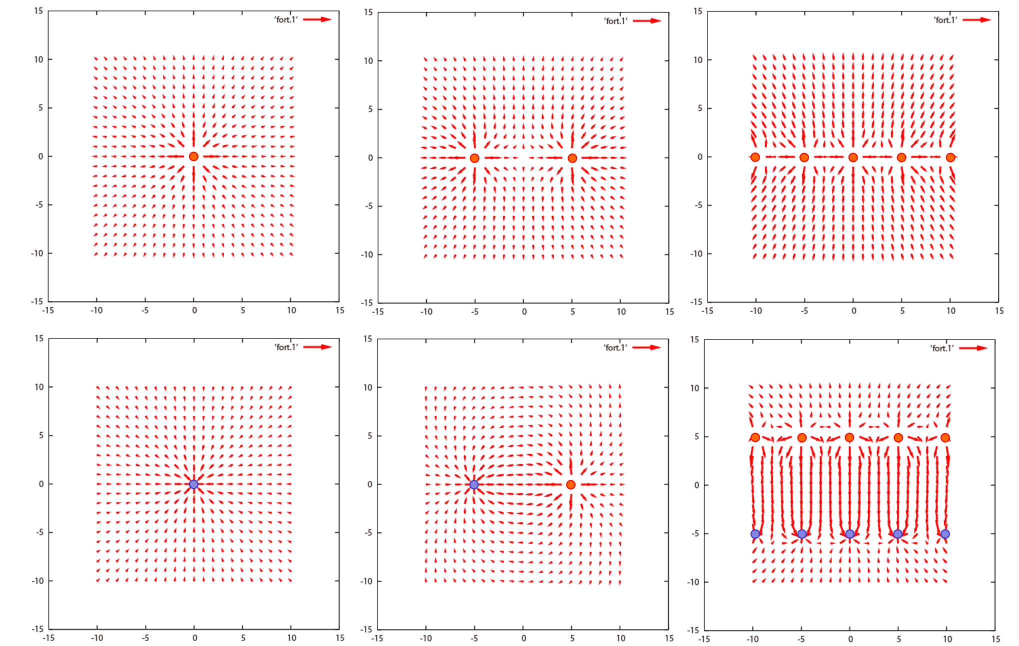
ρ dvからPに向かう単位ベクトル

点電荷ρ dvから観測点Pまでの距離

[V/m] = 1 ÷ [F/m] × [C/m^3] × [m^3] ÷ [m^2]

任意点の電界は、点電荷ρ dvが作る電界の重ね合わせで表現される

点電荷が作る電場のイメージ



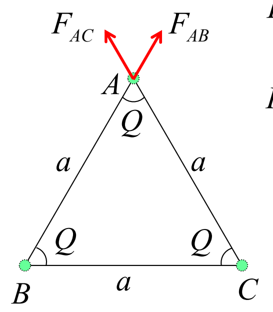
電界を求める問題1

【例題】 1辺がaの正三角形の各頂点に電荷Qが配置されている。隣り合う2つの電荷はそれぞれ細い絶縁糸で結ばれている。この絶縁糸は0.1 N以上の力が加わると切れるようになっている。

(a) a=20 mmのとき，糸を切断するのに必要な電荷Qを求めよ。

(b) A–Bの中心部分における電界を求めよ。

【解答】

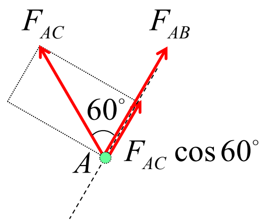


$$\left.\begin{aligned} F_{AB} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2} \\ F_{AC} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2} \end{aligned}\right\} F_{AB} = F_{AC} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2} = F$$

AB間の張力は

$$F_T = F_{AB} + F_{AC}\cos 60^\circ = F\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2} = \frac{3}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^2}$$



これをQについて求めると

$$Q = \sqrt{\frac{8\pi\varepsilon_0 a^2 F_T}{3}}$$

N. Ida, Engineering Electromagnetics, pp.137, Springer

答え： $Q = 5.44\times10^{-8}$ C

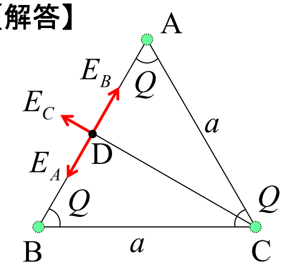
電界を求める問題2

【例題】 1辺がaの正三角形の各頂点に電荷Qが配置されている。隣り合う2つの電荷はそれぞれ細い絶縁糸で結ばれている。この絶縁糸は0.1 N以上の力が加わると切れるようになっている。

(a) a=20 mmのとき，糸を切断するのに必要な電荷Qを求めよ。

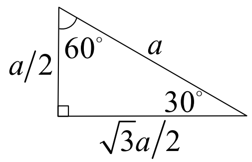
(b) A–Bの中心部分における電界を求めよ。

【解答】



A–Bの中心部分の座標をDとすると、D点における電界（1Cを置いたときにはたらく力）は

$$\begin{cases} E_A = E_B = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{(a/2)^2} \\ E_C = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{(\sqrt{3}a/2)^2} \end{cases}$$



E_AとE_Bは大きさが等しく逆向きで打ち消しあうのでE_Cだけが残る。

N. Ida, Engineering Electromagnetics, pp.137, Springer

答え： $E_C = \dfrac{Q}{\pi\varepsilon_0 3a^2}$ [V/m] CからABの中点に向かう方向

電界を求める問題3

【例題】 図に示すように、真空中のA点とB点に+3Q [C]と–Q [C]（ただし，Q ＞ 0）の点電荷が距離d [m]の間隔で配置されている。真空の誘電率をε_0として次の問に答えよ。

(1) A点の電荷に働くクーロン力の大きさと方向を求めよ。

(2) P点における電界の大きさを求めよ。

(3) P点における電界の方向はABを結ぶ直線から何度傾斜しているか。

【解答】Aにはたらく力は、クーロンの法則より

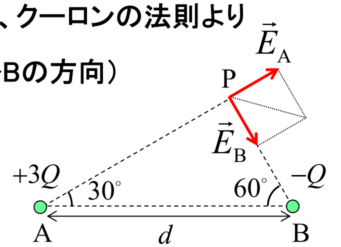
$$F_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q\cdot Q}{d^2}$$ （A→Bの方向）

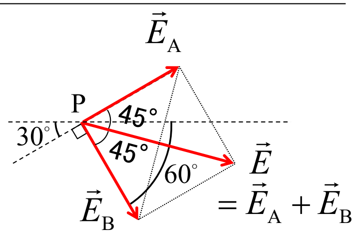
(1) P点の電界は

$$\begin{cases} E_A = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3Q}{(\sqrt{3}d/2)^2} \\ E_B = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{(d/2)^2} \end{cases}$$

両者は大きさが等しく

$$E_A = E_B = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2}$$





(2) 合成ベクトルの大きさは、右上図より

$$\left|\vec{E}\right| = \left(\frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)2 = \frac{\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{d^2}$$

Answer : (1) $F = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3Q^2}{d^2}$ [N], A → B (2) $E = \dfrac{\sqrt{2}Q}{\pi\varepsilon_0 d^2}$ [V/m] (3) 15°

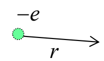
電界を求める問題4

【例題】 電子一つが空間の一点に配置されている。

(a) 空間の任意の位置における電界の強さを求めよ。

(b) 電子から距離 r [m]の位置に浮遊しながら Q = +3.2×10^{-19} Cに帯電している塵に働く力の大きさを求めよ。

【解答】電子からr [m]離れた位置の電界は

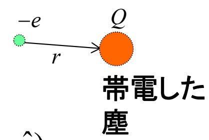


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}(-\hat{r})$$

ただし、rハットはr方向の単位ベクトルで電子が置かれた原点から外向きを正とする。

(a) 与えられた数値を代入すると

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2}(-\hat{r}) = 9\times10^9\cdot\frac{1.6\times10^{-19}}{r^2}(-\hat{r})$$



(b) Q[C]を置いたときにはたらく力は

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q(-e)}{r^2}\hat{r} = 9\times10^9\cdot\frac{3.2\times10^{-19}(1.6\times10^{-19})}{r^2}(-\hat{r})$$

N. Ida, Engineering Electromagnetics, p.134, Springer

Answer : $E = \dfrac{1.44\times10^{-9}}{r^2}$ [V/m], $F = \dfrac{4.61\times10^{-28}}{r^2}$ [N]

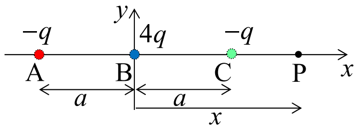
電界を求める問題5

【例題】 3つの電荷が図のように直線状に配置されている。x軸上の任意の点Pにおける電界を求めよ。

【解答】x軸上の任意の点をP(x)とし、P点に+1Cを置いたときの力の重ね合わせを考える。即ち、(1) x>a, (2) x<−a, (3) 0<x<a, (4) −a<x<0 の4つの場合について考える。

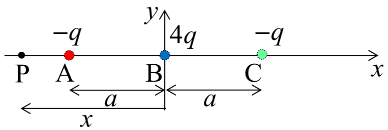
(1) x>aの場合

$$\hat{x}\left(\underbrace{\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}_{B}-\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x-a)^2}}_{C}-\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x+a)^2}}_{A}\right),\quad x>a$$



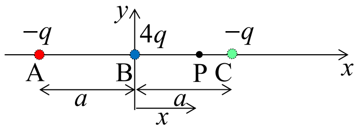
(2) x<−aの場合

$$-\hat{x}\left(\underbrace{\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}_{B}-\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x-a)^2}}_{A}-\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x+a)^2}}_{C}\right),\quad x<-a$$



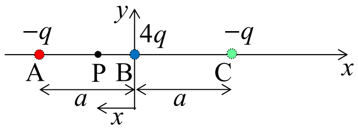
(3) 0<x<aの場合

$$\hat{x}\left(\underbrace{\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}_{B}+\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a-x)^2}}_{C}-\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x+a)^2}}_{A}\right),\quad 0<x<a$$



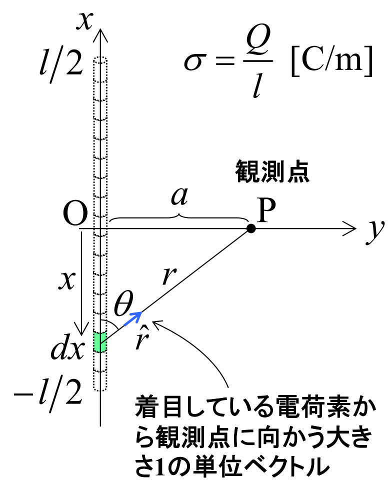
(4) −a<x<0の場合

$$-\hat{x}\left(\underbrace{\frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}_{B}+\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a-x)^2}}_{A}-\underbrace{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x+a)^2}}_{C}\right),\quad -a<x<0$$



有限長一様直線電荷の電界1

【例題】 x軸上で電荷Q[C]を一様に帯電させた長さl[m]の有限長線電荷がある。観測点Pにおける電界の大きさを求めよ。



解法1（オーソドックスな方法）

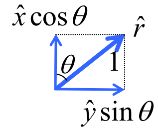
変数をすべて x のみの関数に書き換える。

$$r=\sqrt{a^2+x^2}$$

積分公式

$$\int (a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

単位ベクトルの成分分解



$$\begin{cases}\hat{r}=\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}\\ \cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}},\sin\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\end{cases}$$

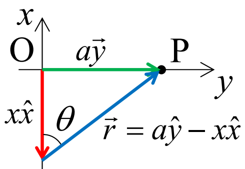
答え $\vec{E}_P=\hat{y}\dfrac{\rho_l l}{2\pi\varepsilon_0 a}\dfrac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$

有限長一様直線電荷の電界2

【解答】

$$\begin{cases}d\vec{E}_P=\dfrac{\sigma dx}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{r}=\dfrac{\sigma dx}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a^2+x^2}\hat{r}=\dfrac{\sigma dx}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{a^2+x^2}(\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y})\\ \vec{E}_P=\displaystyle\int_{x=-l/2}^{+l/2}d\vec{E}_P=\int_{x=-l/2}^{+l/2}\frac{\sigma dx}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2+x^2}\sin\theta\hat{y}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=-l/2}^{+l/2}\frac{1}{a^2+x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\hat{y}\end{cases}$$

又は右図のベクトル関係より



x成分は積分によって打ち消されるので、y成分のみ残る。

$$\begin{cases}d\vec{E}_P=\dfrac{\sigma dx}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r^3}=\dfrac{\sigma dx}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{a\hat{y}-x\hat{x}}{(a^2+x^2)^{3/2}}\\ \vec{E}_P=\displaystyle\int_{x=-l/2}^{+l/2}d\vec{E}_P=\int_{x=-l/2}^{+l/2}\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx\hat{y}=\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=-l/2}^{+l/2}\frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx\hat{y}\end{cases}$$

$$=\hat{y}\frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=-l/2}^{+l/2}\frac{a}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=\hat{y}\frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{x=-l/2}^{+l/2}\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx}$$

積分公式

$$\int (a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

有限長一様直線電荷の電界3

【続き】x軸に対して上下対称であることを利用して積分範囲を半分にして2倍すると

$$\vec{E}_P=\hat{y}\frac{\sigma a}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}\right]_0^{l/2}2=\hat{y}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{l/2}{\sqrt{a^2+l^2/4}}=\hat{y}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{l/2}{\sqrt{4a^2+l^2}/2}$$

$$=\hat{y}\frac{\sigma l}{2\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}$$

又は、電位の傾きの式より、aがy軸上の変数であることを考慮して

$$\vec{E}_P=-\hat{y}\frac{\partial V}{\partial a}=-\hat{y}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4a^2+l^2}+l}{2a}\right)$$

$$V_P=\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4a^2+l^2}+l}{2a}$$ ← 電位のスライドで導出

$$=-\hat{y}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial a}\left\{\ln\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)-\ln(2a)\right\}=-\hat{y}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}+l}\frac{4a}{\sqrt{4a^2+l^2}}-\frac{1}{a}\right)$$

$$=-\hat{y}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4a^2}{a\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)\sqrt{4a^2+l^2}}-\frac{\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)\sqrt{4a^2+l^2}}{a\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)\sqrt{4a^2+l^2}}\right)$$

$$=-\hat{y}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{4a^2-(4a^2+l^2)-l\sqrt{4a^2+l^2}}{a\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)\sqrt{4a^2+l^2}}=-\hat{y}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{-l^2-l\sqrt{4a^2+l^2}}{a\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)\sqrt{4a^2+l^2}}=\hat{y}\frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\frac{l}{a\sqrt{4a^2+l^2}}$$

電界の性質(まとめ)

1. 電界は単位電荷 +1 C に働く力に等しい。
2. 電界の強さは、着目している電荷からの距離rと電荷の大きさ Q に依存する。
3. 電荷から等しい距離であれば、電界の強さはどの場所でも同じ大きさとなる。(球対称性)
4. 電界の大きさは$1/r^2$ に比例する。ただし、電荷から観測点までの距離を r とする。
5. 電荷 Q>0 ならば、電界の方向はその電荷を中心として放射状に<u>外向き</u>に広がる。
6. 電荷 Q<0 ならば、電界の方向はその電荷を中心として放射状に<u>内向き</u>に収束する。
7. 複数の電界(単位電荷に働く力)があるとき、重ね合わせ(ベクトルの合成)が適用できる。

N. Ida, Engineering Electromagnetics, p.133, Springer

電気力線の定義

Electric line of force

1. 電気力線は正電荷から始まり(出発)、負電荷で終わる。もしも，単独の種類の電荷だけならば、電気力線は無限遠で始まるか終わる。
2. 電気力線は正電荷に働く力の方向を示している。即ち、電界の方向を示している。矢印は力(電界)の方向を示すのに役立っている。
3. 電気力線は仮想的な線であり、その<u>目的は電界の視覚化</u>である。
4. 電気<u>**力線の密度[本数/m^2]は、電界Eの強さで定義される(N/S=E)**</u>。即ち、断面積S[m^2]を貫く電気力線の本数はN=ESで与えられる。

N. Ida, Engineering Electromagnetics, p.136, Springer

電気力線の本数を求める問題

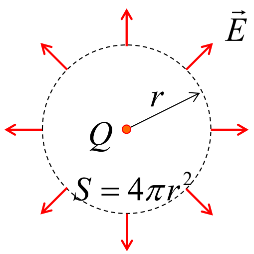
【例題】半径3 mの球表面上の電界が、外向きに一様で2 V/mであるとき、(1)この球面を通る電気力線の本数を求めよ。ただし、「電気力線の密度＝電界の垂直成分」と定義する。(2)球の中心にある電荷はいくらか。

【解答】

(1) 球面上の電界をE、球面積をS、電気力線の本数をNとすると、電気力線の定義より

$$N = ES = 2(4\pi r^2)$$

$$= 2(4\pi 3^2) = 72\pi = 226.2 \simeq 227$$



(2) 点電荷が作る電界の式より

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

これをQについて解くと

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E = \frac{1}{9\times 10^9} 3^2 \cdot 2 = 2\times 10^{-9}$$

樋口 “大学生のためのリメディアル電磁気学入門” p.90　　Answer: (1) 230本 (2) 2 nC

電気力線の描画

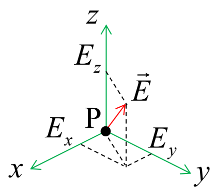
【演習】電気力線上の任意の点 P(x, y, z) において、電気力線に沿って線素 dl をとったとき，電気力線の方程式は式(1)となることを導け。また，電気力線の方程式を用いて電気力線を作図する方法について考察せよ。ただし、dx, dy, dz は、それぞれ dl の x, y, z 成分である。(大貫，安達，演習電磁気学【新装版】p.90，森北出版)

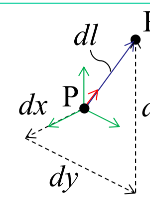
$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \qquad (1)$$

【解答】電界ベクトルを式(2)とすると、各方向余弦は式(3)となる。

$$\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y} + E_z\hat{z} \qquad (2)$$

$$\frac{E_x}{E} = \frac{dx}{dl}, \frac{E_y}{E} = \frac{dy}{dl}, \frac{E_z}{E} = \frac{dz}{dl}, \qquad (3)$$



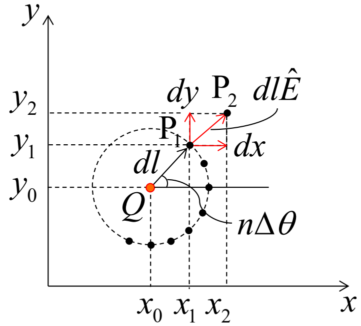


P(x, y, z) 始点
P′(x', y', z') 終点

式(3)を変形してdl/Eを求めると式(1)が導出できる。また、P(x, y, z) から微小距離移動した点をP’(x’, y’, z’) とすると、式(4)となるから、P(x, y, z) と P’(x’, y’, z’) を結ぶ軌跡を描けば電気力線が描ける。

$$x' = x + dx = x + \frac{E_x}{E}dl,\ y' = y + dy = y + \frac{E_y}{E}dl,\ z' = z + dz = z + \frac{E_z}{E}dl \qquad (4)$$

電気力線の描画方法

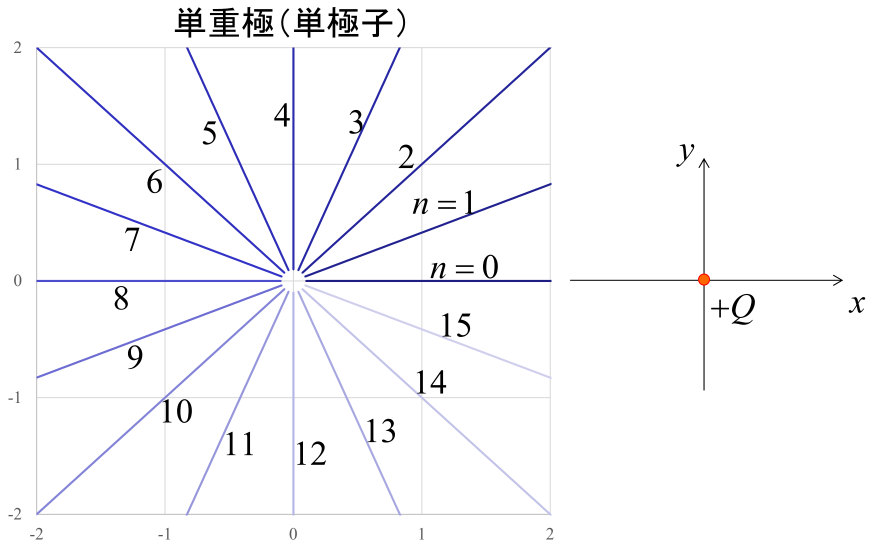


$$\begin{cases} x_1 = x_0 + dx = x_0 + dl\cos(n\Delta\theta) & (1) \\ y_1 = y_0 + dy = y_0 + dl\sin(n\Delta\theta) & (2) \end{cases}$$

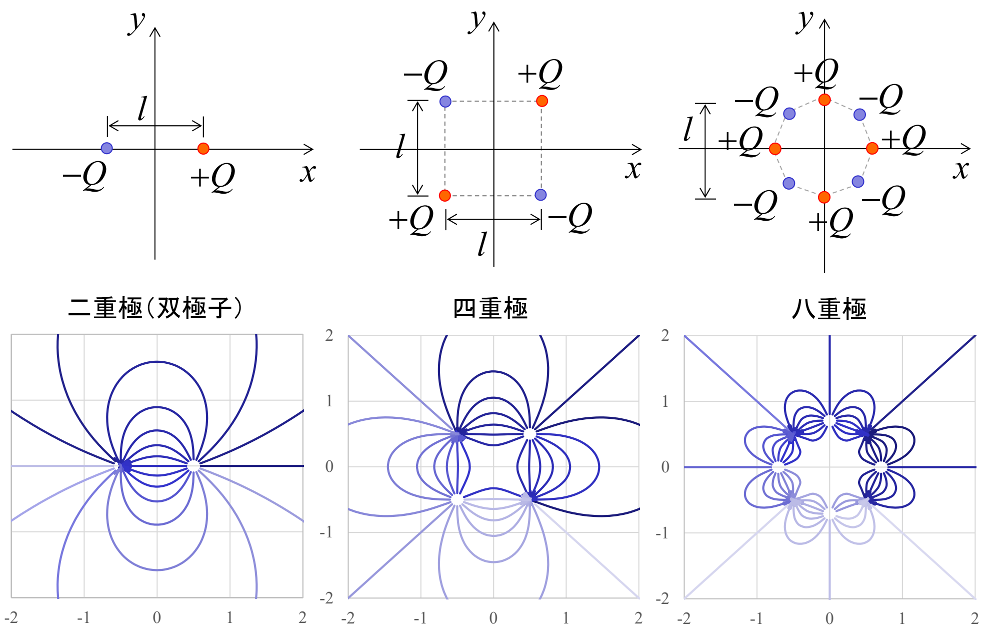
$$\begin{cases} x_2 = x_1 + dx = x_1 + \dfrac{E_x}{E}dl & (3) \\ y_2 = y_1 + dy = y_1 + \dfrac{E_y}{E}dl & (4) \end{cases}$$

点電荷Q[C]の座標をP(x_0,y_0)とする。特異点(分母がゼロとなって発散する点)であるP点を避けて計算する必要があるため、最初の点P_1(x_1,y_1)は、式(1)と式(2)のようにQからdl離れた半径dlの円周上にとる。例えば、dl=0.1 mでΔθ=π/8とすると、P(x_0,y_0)を中心として16方位に等間隔の始点P_1が作られる。そして、式(3)と式(4)に従ってP_2の座標が決まる。16方位毎にP_1とP_2の軌跡をプロットすれば電気力線が求まる。式(3)と式(4)は関数の傾きを使って次の点を直線で推定し、順次接続する方法なので、常微分方程式の数値解法であるオイラー法と似ている。即ち、刻み幅dlによって描画精度が変わることに注意が必要である。

電気力線の描画例1



電気力線の描画例2



電気力線の描画例3