

# 目次

第 1 章	電位と電位差	3
1.1	電位 . . . . .	4
1.1.1	A 点を基準としたときの B 点の電位 . . . . .	4
1.1.2	B 点を基準としたときの A 点の電位 . . . . .	5
1.1.3	無限遠を基準とした電位 . . . . .	6
1.2	電位と電位差の関係 . . . . .	7
1.3	保存場の性質 . . . . .	8
1.4	電位の勾配 . . . . .	9

v2.2, Oct.2021

## 1.1 電位

図 1.1 に示すように、電荷  $+1 \text{ C}$  を A 点から B 点まで破線の経路に沿って移動させるときの仕事を考える。経路 A-B を等分割  $\Delta l$  の折れ線で近似したとき、電荷を自由に移動させるには、電界に逆らって力を加え続ける必要があるため、する仕事は次式 (1.1) となる。ここで、電界に逆らう力  $\vec{F} = -\vec{E}$  とのなす角が  $\theta > 90^\circ$  のときは  $\Delta W_i < 0$ 、 $\theta < 90^\circ$  のときは  $\Delta W_i > 0$  となるので、電界に逆らってする仕事が正、される仕事が負となる。

$$\begin{aligned} W &= F_1 \cos \theta_1 \Delta l_1 + \cdots + F_6 \cos \theta_6 \Delta l_6 = \vec{F}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \cdots + \vec{F}_6 \cdot \Delta \vec{l}_6 \\ &= -(\vec{E}_1 \cdot \Delta \vec{l}_1 + \cdots + \vec{E}_6 \cdot \Delta \vec{l}_6) \\ &= -\sum_{k=1}^6 \vec{E}_k \cdot \Delta \vec{l}_k \end{aligned} \quad (1.1)$$

ただし、

$$\vec{F}_k = -\vec{E}_k = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_k^2} \hat{r}_k, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.2)$$

である。分割数  $n$  を増やして近似精度を上げると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\sum_{k=1}^n \vec{E}_k \cdot \Delta \vec{l}_k \right) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.3)$$

従って、する仕事は次式 (1.4) で与えられる。

$$W = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \equiv V_{BA} \quad (1.4)$$

これを A 点を基準としたときの B 点の電位と呼び  $V_{BA}$  で表す。

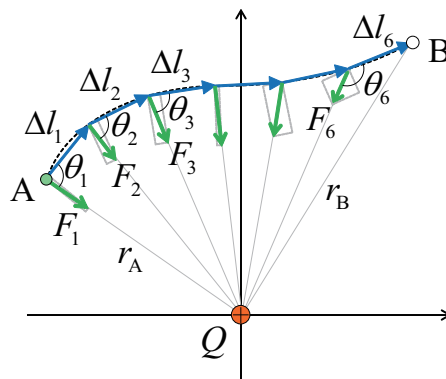


図 1.1 電界に逆らってする仕事

### 1.1.1 A 点を基準としたときの B 点の電位

する仕事が式 (1.5) で与えられることが分かったので、実際に B 点の電位を求めてみる。

$$V_{BA} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.5)$$

点電荷  $Q$  の作る電界は次式 (1.6) であるから

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (1.6)$$

式 (1.6) を式 (1.5) に代入すると

$$V_{BA} = - \int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} \quad (1.7)$$

ここで、極座標系の微小ベクトル  $d\vec{l}$  は

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\varphi \hat{\varphi} \quad (1.8)$$

であるから\*1,

$$\begin{aligned} V_{BA} &= - \int_A^B \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\varphi \hat{\varphi}) \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} [-r^{-1}]_{r_A}^{r_B} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

図 1.2 では  $r_B > r_A$  なので  $V_{BA}$  は負となる。即ち、される仕事が多いことを示している。

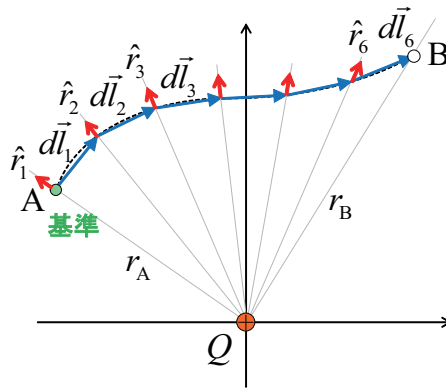


図 1.2 A 点を基準と下 B 点の電位

### 1.1.2 B 点を基準としたときの A 点の電位

今度は、B 点を基準にして A 点へ +1 C を移動させるときにする仕事を求めてみる。

$$V_{AB} = - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.10)$$

点電荷  $Q$  の作る電界は次式 (1.10) であるから

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}, \quad (1.11)$$

\*1 式 (1.8) の極座標における  $\theta$  と、内積  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos\theta$  の  $\theta$  は別物なので注意が必要。

式 (1.11) を式 (1.10) に代入すると

$$V_{AB} = - \int_B^A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l} \quad (1.12)$$

ここで、極座標系の  $d\vec{l}$  ベクトルは

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\varphi \hat{\varphi} \quad (1.13)$$

であるから\*2,

$$\begin{aligned} V_{AB} &= - \int_B^A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\varphi \hat{\varphi}) \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_B}^{r_A} \frac{1}{r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} [-r^{-1}]_{r_B}^{r_A} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

図 1.3 では  $r_B > r_A$  なので  $V_{AB}$  は正となる。即ち、する仕事が多いことを示している。

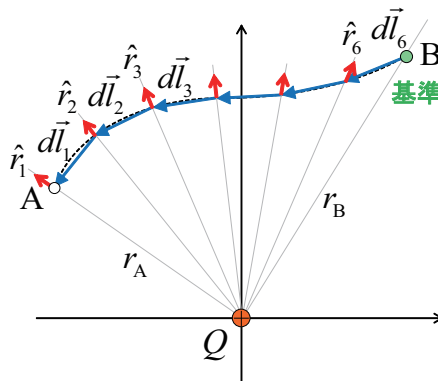


図 1.3 B 点を基準と下 A 点の電位

### 1.1.3 無限遠を基準とした電位

A 点を基準としたときの B 点の電位は

$$V_{BA} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (1.15)$$

あることが分かったので、無限遠点を基準としたときの B 点の電位は、図 1.4 左に示すように式 (1.15) に  $r_A \rightarrow \infty$  を代入して、

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} \quad (1.16)$$

同様にして、B 点を基準としたときの A 点の電位は

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) \quad (1.17)$$

\*2 式 (1.13) の極座標における  $\theta$  と、内積  $\vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos\theta$  の  $\theta$  は別物なので注意が必要。

であることが分かったので、無限遠点を基準としたときの B 点の電位は、図 1.4 右に示すように  $r_B \rightarrow \infty$  を代入して、

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A} \quad (1.18)$$

となる。

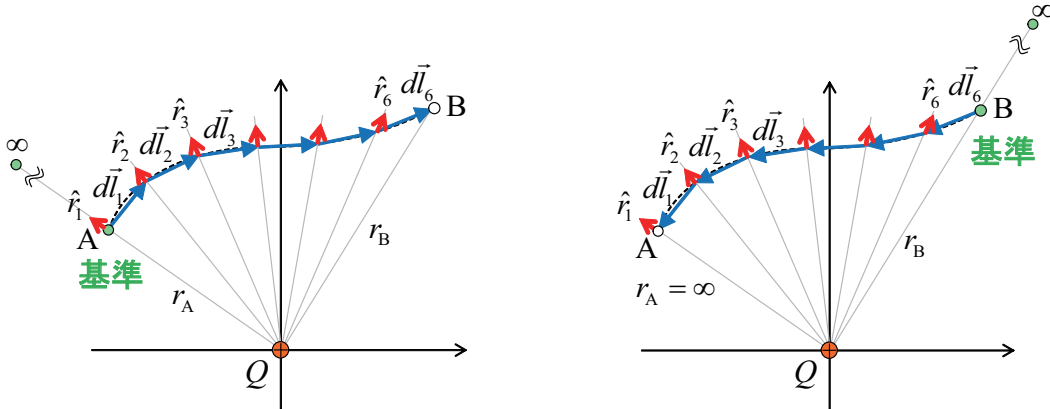


図 1.4 点電荷のつくる電界の重ね合わせ

## 1.2 電位と電位差の関係

無限遠を基準とした A 点の電位と、B 点の電位はそれぞれ次式のようにも書ける。

$$V_A = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad V_B = - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.19)$$

この 2 つの電位を使って電位差を求めてみる。B 点を基準とした A 点の電位  $V_A - V_B$  は、

$$\begin{aligned} V_{AB} &= V_A - V_B \\ &= - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} - \left( - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= + \int_A^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (1.20)$$

同様に、A 点を基準とした B 点の電位は式 (1.20) で A と B を入れ替えて電位は電界を積分しているので、電位は図 1.5 左の面積、電位差は図 1.5 右の面積と考えることもできる。

$$\begin{aligned} V_{BA} &= V_B - V_A \\ &= - \int_{\infty}^B \vec{E} \cdot d\vec{l} - \left( - \int_{\infty}^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) = \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \end{aligned} \quad (1.21)$$

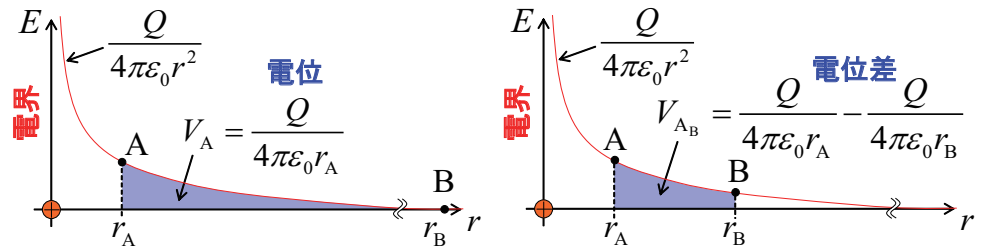


図 1.5 電位と電位差の関係

以上の内容をもう一度整理しておく。点電荷の作る電位は次式 (1.22)

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.22)$$

で与えられ、これは無限遠を基準とした P 点の電位（電荷 +1 C を無限遠から P 点に移動させるのに必要な仕事）を示している。これは図示すると図 1.6 左となる。

一方、B 点を基準とした A 点の電位、もしくは AB 間の電位差  $V_{AB}$ （電荷 +1 C を B 点から A 点へ移動させるのに必要な仕事）は次式 (1.23)

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad (1.23)$$

で与えられ、これを図示すると図 1.6 右となる。



図 1.6 電位と電位差の違い

### 1.3 保存場の性質

図 1.7 に示すように、今度は A から B へ +1 C を移動させて、さらに B から A まで別経路で戻るときに経路全体のする仕事は

$$\begin{aligned} V &= - \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} - \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

これを保存場の性質と呼ぶ\*3。これは、経路が閉じているときにする仕事とされる仕事が常に等しいことを示しており、静電気版のエネルギー保存則と言える。即ち、A から B を経由して（1 周して）元に戻ると仕事は  $\pm 0$  になる。

\*3 式 (1.24) において、積分記号に付いた  $\circ$  印は積分路 C が閉じていることを明示する記号である。

保存場の性質をまとめると次式 (1.25) となる。これはガウスの法則と並んで静電界の基本方程式の 1 つである。

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{1.25}$$

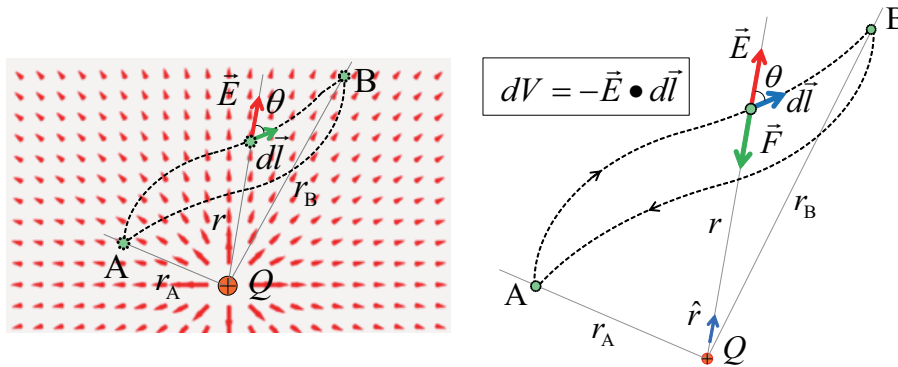


図 1.7 閉じた経路における仕事

また、エネルギー保存の法則のイメージを図 1.8 に示す。する仕事は登り（位置エネルギーを蓄える）、される仕事は下り（転がり落ちる）という考え方でよい。

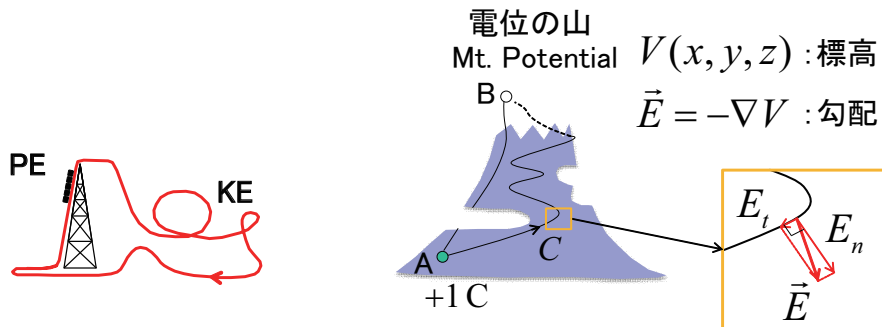


図 1.8 保存場の性質

### 1.4 電位の勾配

今までは電界を線積分して電位差または電位を導出したが、今度は逆に電位から電界を求める方法について考える。まず、A 点の電位を次式 (1.26) で表す。ただし、ただの  $r$  を使うと球面上の  $r$  になって位置が 1 点に定まらないので、 $r$  に  $\rightarrow$  (ベクトル) をつけて位置を表す記号にする。

$$V_A = V(x, y, z) \equiv V(\vec{r}) \tag{1.26}$$

$V$  の微小変化量  $\Delta V$  を考えると、 $dr$  は微小であるから式 (1.27) で近似できる。

$$V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}}^{\vec{r} + d\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} \doteq -\vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{1.27}$$

一方、左辺に1次近似\*4を使うと式(1.27)の左辺は次式(1.28)となる。

$$V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) \simeq \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} dx + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} dy + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} dz \quad (1.28)$$

ここで、式(1.28)の右辺はベクトルの内積で表現できるので、

$$V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = \left( \hat{x} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \right) \cdot (\hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz) \quad (1.29)$$

式(1.29)は微小ベクトルを極座標で表すと、

$$V(\vec{r} + d\vec{r}) - V(\vec{r}) = \left( \hat{x} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \right) \cdot (d\vec{r}) \quad (1.30)$$

式(1.30)は式(1.27)の右辺に等しいので、

$$-\vec{E} \cdot d\vec{r} = \left( \hat{x} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \right) \cdot (d\vec{r}) \quad (1.31)$$

式(1.31)より、電界は次式(1.32)で計算できる。

$$\vec{E} = - \left( \hat{x} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z} \right) = -\nabla V(\vec{r}) = -\text{grad} V(\vec{r}) \quad (1.32)$$

電界の勾配をまとめると次式(1.33)となる。これは電位の勾配に負号を付けたものが電界になっていることを示す。

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (1.33)$$

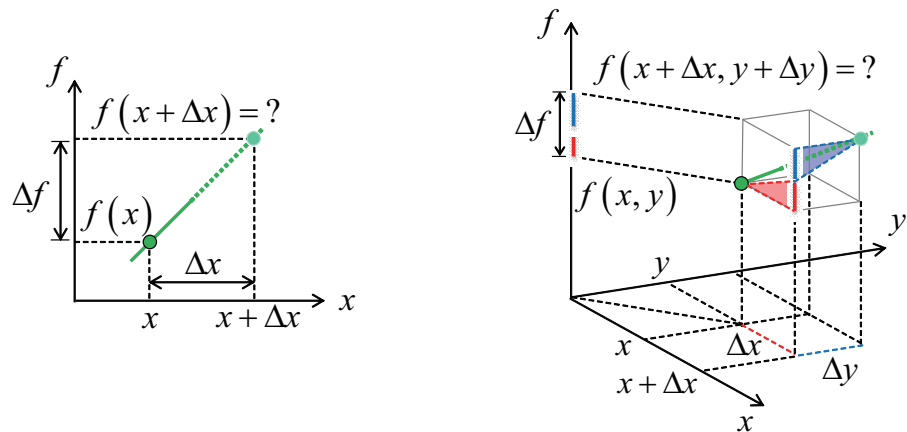


図 1.9 関数の一次近似

\*4 図 1.9 参照。この図において、左側は1変数関数の一次近似を示している。一次近似とは、関数のある点  $x$  における値  $f(x)$  と、その点の傾き  $f'(x)$  を使って微小距離  $\Delta x$  離れた点  $x + \Delta x$  の関数の値  $f(x + \Delta x)$  を推定する方法である。この場合は明らかに  $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f = f(x) + f'(x)\Delta x$  となる。図 1.9 右に示す2変数関数  $f(x, y)$  も同じ考え方が適用できる。