電位と電位差

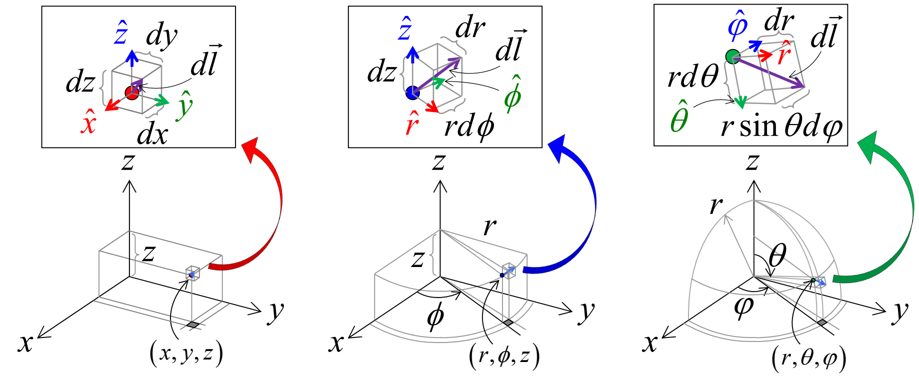
1^{st}. 2016/04/28
L^{st}. 2021/10/26

（補足）直交座標系

$$d\vec{l} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$
$$dv = dxdydz$$

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\phi\,\hat{\phi} + dz\,\hat{z}$$
$$dv = rdrd\phi dz$$

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\hat{\varphi}$$
$$dv = r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$



デカルト座標
Cartesian coordinate
または，直角座標
rectangular coordinate

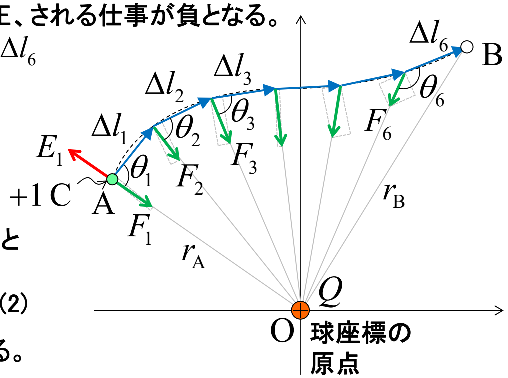
円筒座標
cylindrical coordinate

球座標
spherical coordinate

電界に逆らう際の仕事①

電荷+1CをA点からB点まで破線の経路に沿って移動させるときの仕事を考える。経路A–Bを等分割Δlの折れ線で近似したとき、電荷を自由に移動させるには、電界に逆らって力を加え続ける必要があるため、する仕事は次式(1)となる。ここで、電界に逆らう力F=−Eとのなす角がθ>90°のときはΔWi < 0、θ <90°のときはΔWi > 0となるので、電界に逆らってする仕事が正、される仕事が負となる。

$$\begin{aligned} W &= F_1 \cos\theta_1 \Delta l_1 + \cdots + F_6 \cos\theta_6 \Delta l_6 \\ &= \vec{F}_1 \bullet \Delta\vec{l}_1 + \cdots + \vec{F}_6 \bullet \Delta\vec{l}_6 \\ &= -(\vec{E}_1 \bullet \Delta\vec{l}_1 + \cdots + \vec{E}_6 \bullet \Delta\vec{l}_6) \\ &= -\sum_{k=1}^{6} \vec{E}_k \bullet \Delta\vec{l}_k \qquad (1) \end{aligned}$$



分割数を増やして近似精度を上げると

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\sum_{k=1}^{n} \vec{E}_k \bullet \Delta\vec{l}_k\right) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (2)$$

従って、する仕事は次式で与えられる。

$$\therefore W = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} \equiv V_{\mathrm{B_A}} \qquad (3)$$

$$\vec{E}_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r},\quad \vec{F}_i = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}(-\hat{r})$$

これをA点を基準としたときのB点の電位と呼ぶ。

ノート https://www.kusamalab.org/lecture/em1/A7_potential.pdf

電界に逆らう際の仕事②

する仕事が(3)式で与えられることが分かったので、実際にB点の電位を求めてみる。

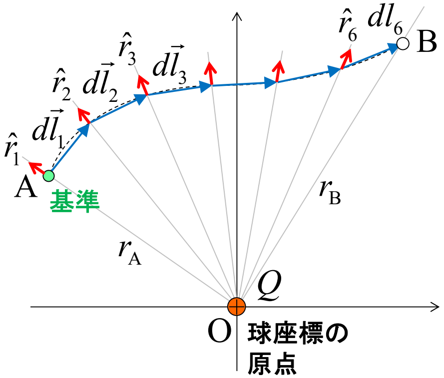
$$V_{\mathrm{B_A}} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (3)$$

点電荷Qの作る電界は次式(4)であるから

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (4)$$

式(4)を式(3)に代入すると

$$V_{\mathrm{B_A}} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \bullet d\vec{l} \qquad (5)$$



ここで、極座標系の微小ベクトルdlは

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\hat{\varphi} \qquad (6)$$

であるから（式(6)の極座標のθと内積Fdlcosθのθは全くの別物なので注意）、

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{B_A}} &= -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \bullet (dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\hat{\varphi}) \\ &= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}} \frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-r^{-1}\right]_{r_{\mathrm{A}}}^{r_{\mathrm{B}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{B}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}}\right) \qquad (7) \end{aligned}$$

図ではr_B>r_AなのでV_{BA}は負となる。即ち、される仕事が大きいことを示している。

電界に逆らう際の仕事③

今度は、B点を基準にして、A点へ+1Cを移動させるときにする仕事を求めてみる。

$$V_{\mathrm{A_B}} = -\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (8)$$

点電荷Qの作る電界は次式(4)であるから

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (9)$$

式(4)を式(8)に代入すると

$$V_{\mathrm{A_B}} = -\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \bullet d\vec{l} \qquad (10)$$

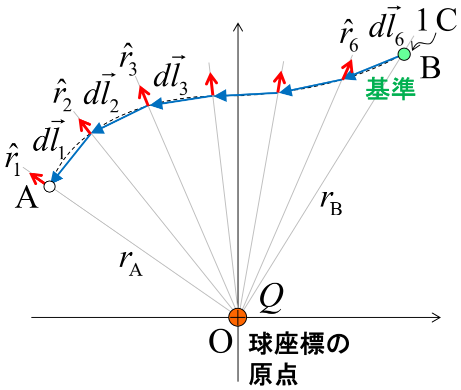
ここで、極座標系のdlベクトルは

$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\hat{\varphi} \qquad (11)$$

であるから（式(6)の極座標の θ と内積 $Fdl\cos\theta$ の θ は全くの別物なので注意）、

$$V_{\mathrm{A_B}} = -\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \bullet (dr\,\hat{r} + r d\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\hat{\varphi})$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_{\mathrm{B}}}^{r_{\mathrm{A}}} \frac{1}{r^2}dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-r^{-1}\right]_{r_{\mathrm{B}}}^{r_{\mathrm{A}}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{B}}}\right) \qquad (12)$$



図ではr_{B}>r_{A}なのでV_{AB}は正となる。即ち、する仕事が大きいことを示している。

電界に逆らう際の仕事④

A点を基準としたときのB点の電位は

$$V_{\mathrm{B_A}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{B}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{A}}}\right) \qquad (13)$$

であることが分かったので、無限遠点を基準としたときのB点の電位は、式(13)で$r_{\mathrm{A}}\to\infty$を代入して、

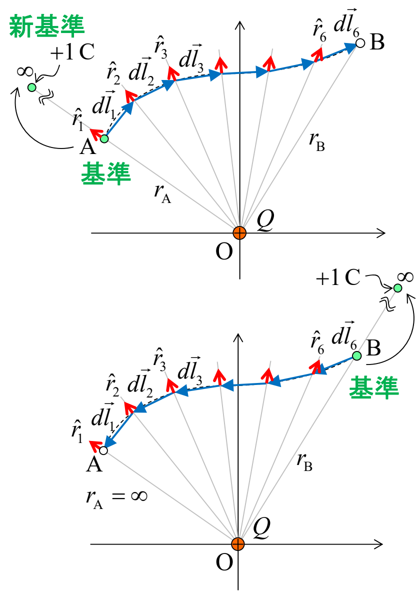
$$V_{\mathrm{B}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{B}}} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{\mathrm{B}}} \qquad (14)$$

同様に、B点を基準としたときのA点の電位は

$$V_{\mathrm{A_B}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{r_{\mathrm{B}}}\right) \qquad (15)$$

であることが分かったので、無限遠点を基準としたときのA点の電位は、式(15)に$r_{\mathrm{B}}\to\infty$を代入して、

$$V_{\mathrm{A_B}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{\mathrm{A}}} \qquad (16)$$



ノート https://www.kusamalab.org/lecture/em1/A7_potential.pdf

電位と電位差の関係

無限遠を基準としたA点の電位と、B点の電位はそれぞれ次式のようにも書ける。

$$V_{\mathrm{A}} = -\int_{\infty}^{\mathrm{A}} \vec{E} \bullet d\vec{l}, \quad V_{\mathrm{B}} = -\int_{\infty}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (17)$$

この二つの電位を使って電位差を求めてみる。B点を基準としたA点の電位V_{A}−V_{B}は

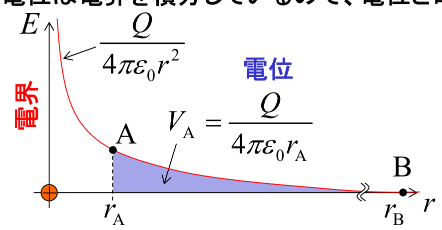
$$V_{\mathrm{A_B}} = V_{\mathrm{A}} - V_{\mathrm{B}} = -\int_{\infty}^{\mathrm{A}} \vec{E} \bullet d\vec{l} - \left(-\int_{\infty}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l}\right) = -\int_{\infty}^{\mathrm{A}} \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_{\infty}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

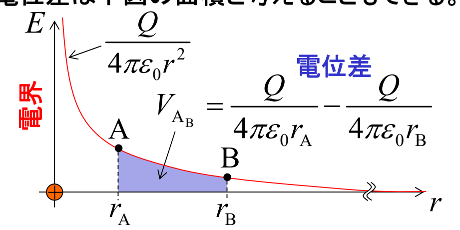
$$= +\int_{\mathrm{A}}^{\infty} \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_{\infty}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (18)$$

同様に、A点を基準としたB点の電位は、式(18)においてAとBを入れ替えて

$$V_{\mathrm{B_A}} = V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}} = -\int_{\infty}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} - \left(-\int_{\infty}^{\mathrm{A}} \vec{E} \bullet d\vec{l}\right) = \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} \qquad (19)$$

電位は電界を積分しているので、電位と電位差は下図の面積と考えることもできる。





電位の式

$$V_{\mathrm{B_A}} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

基準点

（省略したときは無限遠）

[V] or [J/C] = [V/m] × [m]

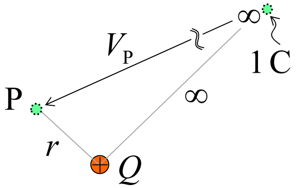
A点を基準としたときの、B点の電位

（電荷1 CをA点からB点に移動させるのに必要な仕事）

点電荷の作る電位のまとめ

点電荷Q

$$V_{\mathrm{P}} = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{比例定数}} \frac{1}{r}$$



点電荷QからP点までの距離

[V] or [J/C] = [C] ÷ [F/m] ÷ [m]

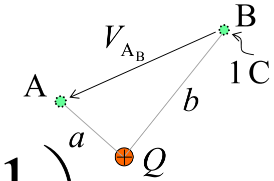
無限遠を基準(r_{B}→∞)としたP点の電位
(電荷1 Cを無限遠からP点に移動させるのに必要な仕事)

点電荷が作る電位差のまとめ

電位:電気的な位置エネルギーの略

点電荷Q [C]

$$V_{\mathrm{A_B}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$



点電荷QからA点までの距離 [m]

点電荷QからB点までの距離 [m]

[V] or [J/C] = [C] ÷ [F/m] ÷ [m]

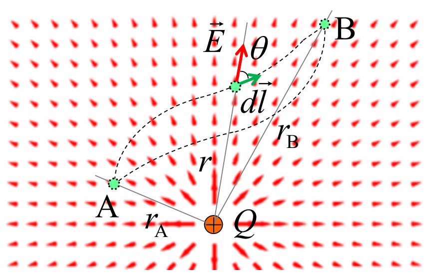
B点を基準としたA点の電位、またはAB間の電位差
(電荷1 CをB点からA点へ移動させるのに必要な仕事)

1周分の仕事

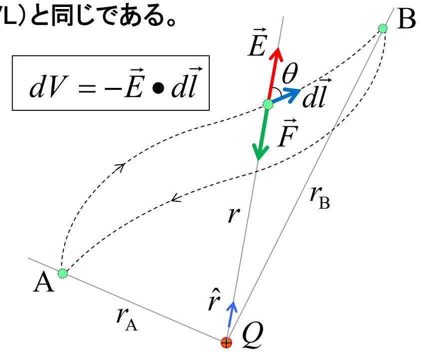
AからBへ+1Cを移動させて、さらにBからAまで別経路で戻るときに経路全体のする仕事は

$$V = -\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} - \int_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} + \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0$$

これを保存場の性質と呼ぶ。これは、経路が閉じているときにする仕事とされる仕事が常に等しいことを示しており、静電気版のエネルギー保存則と言える。
電気回路では、キルヒホッフの電圧則(KVL)と同じである。



$$dV = -\vec{E} \bullet d\vec{l}$$



AからBを経由して(1周して)元に戻ると仕事は±0になる。

保存場の性質

別名:エネルギー保存の法則

位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)が運動エネルギー(電荷の加速)に変化するだけ

積分路が閉じていることを示す記号

単位電荷あたりの力 電界

積分路を構成する微小線素

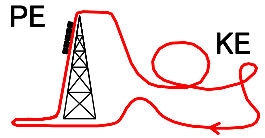
$$\oint_C \underbrace{\vec{E} \bullet d\vec{l}}_{\text{仕事}} = 0$$

内積記号

仕事 {した仕事(発) / される仕事(受)

積分が積分路Cに沿った線積分であること示す記号

[J/C] = [V/m] × [m]



電荷は、電場では荷物に相当する。

電位と電界の計算

【例題】 1辺が a [m]の正方形の各頂点にQ [C]の点電荷をおいたとき、正方形の中心Pの電位と電界を求めよ。

【解答】

正方形中心P点の電位は点電荷A, B, C, Dが作る電位の重ね合わせとなるので、

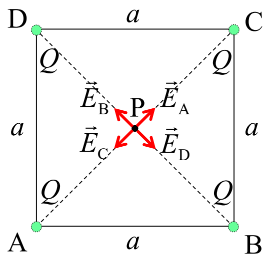
$$V_{\mathrm{P}} = V_{\mathrm{P_A}} + V_{\mathrm{P_B}} + V_{\mathrm{P_C}} + V_{\mathrm{P_D}}$$

即ち、1つあたりの電荷がP点に作る電位を4倍すればよいので、

$$V_{\mathrm{P}} = 4\times\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

P点の電界は点電荷A, B, C, Dが作る電界の重ね合わせとなるので、ベクトルの打ち消し合いにより

$$\vec{E}_{\mathrm{P}} = \vec{E}_{\mathrm{A}} + \vec{E}_{\mathrm{B}} + \vec{E}_{\mathrm{C}} + \vec{E}_{\mathrm{D}} = 0$$

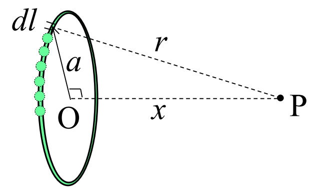


答え： $V_{\mathrm{P}} = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}}{a}$ [V], $\vec{E}_{\mathrm{P}} = 0$ [V/m]

電位の計算

【例題】半径a [m]の円環電荷Qが軸上xの位置に作る電位を求めよ。(教科書、p.17)

【解答】



$$\lambda = \frac{Q}{2\pi a}\ \text{[C/m]}$$

線電荷密度

微小線素dlがP点に作る電位は、線電荷密度[C/m]をλとすると、電荷量はλ dl [C]なので、

$$\boxed{dV_{\mathrm{P}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dl}{\sqrt{a^2+x^2}}}$$

P点の電位はこれを円環全体で総和すればよいので、

$$V_{\mathrm{P}} = \int_{l=0}^{2\pi a} dV_{\mathrm{P}} = \int_{l=0}^{2\pi a}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{a^2+x^2}}dl$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l=0}^{2\pi a}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}}_{\text{dlの積分には寄与しない}}dl = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi a}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{Q/2\pi a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi a}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

答え： $V_{\mathrm{P}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$ [V]

電位差による電子の加速

【例題】1個の電子が電位差1 Vの2点AB間を電界によって移動したとき、(1) 電子が電界から得るエネルギー(される仕事)を求めよ。このエネルギーを 1 eV ; 1電子ボルトと言う。(2) すべてが運動エネルギーに変化したとき電子の速度を求めよ。(3) 電位差が 1 kV のとき、同様に電子の速度を求めよ。また、その速度は光速の何%か。

【解答】 電子が受け取るエネルギーはW=QVより

$$W_{\mathrm{e}} = qV = eV = 1.6\times10^{-19}\cdot 1\ \text{[J]} \qquad (1)$$

このエネルギーがすべて運動エネルギーに変換されるとき、以下のエネルギー保存関係より

電気エネルギー(電位差)W_{e}＝運動エネルギーW_{k}

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2)$$

これをvについて解くと

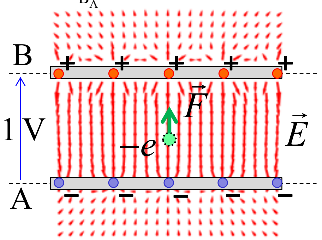
$$v_1 = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.6\times10^{-19})\cdot 1}{9.11\times10^{-31}}} = 5.927\times10^5$$

(3)

$$v_2 = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.6\times10^{-19})(1\times10^3)}{9.11\times10^{-31}}} = 1.874\times10^7, \quad \frac{v}{c} = \frac{1.874\times10^7}{3\times10^8} = 0.062 \qquad (4)$$

電子はクーロン力によって＋極側へ吸引・加速される。

$$V_{\mathrm{B_A}} = 1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{J/C}$$



答え：(1) 1.6×10^{-19} J, (2) 5.93×10^5 m/s, (3) 1.875×10^7 m/s, 6.2 %

電位差と仕事

【演習】◇ 一様な電界中で、0.5 Cの点電荷を電界に逆向きに4 cm移動するのに要した仕事が75 Jであった。電荷が移動した 2 点間の電位差と電界の大きさを求めよ。

【解答】 電荷q [C]を移動させるのに必要な仕事W [J]は

$$W_{\mathrm{e}} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}\bullet d\vec{l} = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}q\vec{E}\bullet d\vec{l}$$

ここで、右図の座標系を考えると

$$\vec{E} = E(-\hat{z}), \quad d\vec{l} = dz\hat{z}$$

を元の式に代入して

$$W_{\mathrm{e}} = -\int_{z=0}^{d}qE(-\hat{z})\bullet dz\hat{z} = \int_0^d qEdz$$

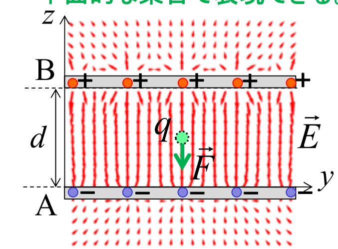
qもEも一定なので、積分には寄与せず

$$W_{\mathrm{e}} = qE\int_0^d dz = qEd\ \text{[J]}$$

Eについて求めると

$$\Rightarrow E = \frac{W_{\mathrm{e}}}{qd} = \frac{75}{0.5(4\times10^{-2})} = 3750\ \mathrm{V/m}$$

一様な電界は、点電荷の平面的な集合で表現できる。



電位差V [V]は単位電荷あたりの仕事[J/C]なので、

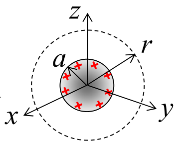
$$W_{\mathrm{e}} = qV\ \text{[J]}$$

$$\Rightarrow V = \frac{W_{\mathrm{e}}}{q} = \frac{75}{0.5} = 150\ \mathrm{V}$$

答え：150 V, 3750 V/m

導体球の電位

【例題】半径a [m]の導体球にσ [C/m²]の電荷を与えた。導体球表面の電位を求めよ。次に、帯電していない同じ形の導体球を接触させてから遠方に離した。両導体球表面の電位を求めよ。



【解答】与えた電荷の総量は、

$$Q = 4\pi a^2 \sigma \quad (1)$$

導体球の中心を原点と考えたとき、Q [C]の電荷が r [m] 離れた位置に作る電界は、クーロンの法則より

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (2)$$

位置 r [m]における電位は、無限遠を基準として

$$V = -\int_{\infty}^{r} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (3)$$

(1)を(3)に代入して

$$V = \frac{4\pi a^2 \sigma}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0 r} \quad (4)$$

導体球表面は r=a なので、

$$V_a = \frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0 a} = \frac{a\sigma}{\varepsilon_0} [\mathrm{V}] \quad (5)$$

帯電していない同じ形状の導体球を接触させると電荷は等分されるので、各導体球の電荷総量は、

$$Q' = Q/2 = 2\pi a^2 \sigma \quad (6)$$

(3)と(6)より

$$V = \frac{2\pi a^2\sigma}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{a^2\sigma}{2\varepsilon_0 r},$$

導体球表面では

$$V_a = \frac{a\sigma}{2\varepsilon_0} [\mathrm{V}]$$

電位の傾きと電界

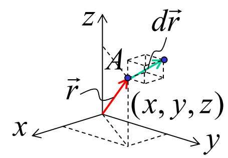
まず、A点の電位を次式(1)で表す。

$$V_{\mathrm{A}} = V(x,y,z) \equiv V(\vec{r}) \quad (1)$$

ただし、ただの r を使うと球面上の r になってしまうので、r に→(ベクトル)をつけて位置を表す記号にする。

Vの微小変化量ΔVを考えると、drは微小であるから式(2)で近似できる。

$$V(\vec{r}+d\vec{r}) - V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+d\vec{r}} \vec{E} \bullet d\vec{r} \doteqdot -\vec{E} \bullet d\vec{r} \quad (2)$$



一方、左辺に1次近似を使うと式(2)の左辺は次式(3)となる。

$$V(\vec{r}+d\vec{r}) - V(\vec{r}) \simeq \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}dx + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}dy + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}dz \quad (3)$$

ここで、式(3)の右辺は次式のようにベクトルの内積で表現できるので、

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}dx + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}dy + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}dz = \left(\hat{x}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\right) \bullet (\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz) \quad (4)$$

微小ベクトルを極座標で表すと、式(3)は

$$V(\vec{r}+d\vec{r}) - V(\vec{r}) = \left(\hat{x}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\right) \bullet (d\vec{r}) \quad (5)$$

式(5)は式(2)の右辺に等しいので、

$$-\vec{E} \bullet d\vec{r} = \left(\hat{x}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\right) \bullet (d\vec{r}) \quad (6)$$

式(6)より、電界は次式(7)で計算できる。

$$\vec{E} = -\left(\hat{x}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\right) = -\nabla V(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,V(\vec{r}) \quad (7)$$

今までは電界を線積分して電位差または電位を導出したが、今度は、逆に電位から電界を求める方法について考える。

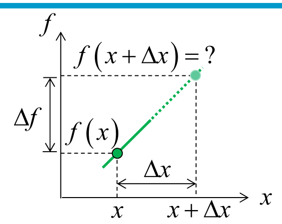
(補足) 関数の一次近似

一次近似の式

$$\boxed{f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x}$$

$$\therefore \Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= f'(x)\Delta x$$



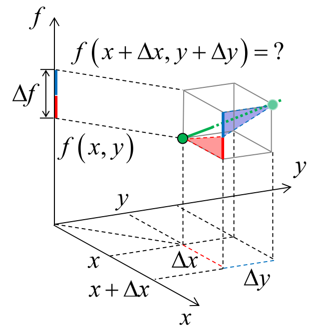
2変数関数も同様にして、一次近似の式は

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &= f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \end{aligned}}$$

$$\therefore \Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

全微分とも呼ぶ

$$= \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x}_{x方向の増分} + \underbrace{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y}_{y方向の増分}$$



※ 3変数関数は図示できないが同様にして、一次近似の式が導出できる。

電位から電界を求める式

(位置座標に関する微分)

電界　ナブラ演算子　電位

電気的な勾配　$$\vec{E} = -\nabla V$$　電気的な標高

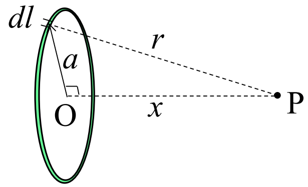
[N/C] = [1/m] × [V]

電界ベクトルは電位の勾配から求められる。
ただし、下り勾配が電界ベクトルの正方向となる。

電位から電界の計算

【例題】半径aの円環電荷が軸上xの位置に作る電界を求めよ。（教科書、p.20）

【解答】帯電円環が作る電位は式(1)で与えられる。（導出済み）



$$\boxed{V_{\mathrm{P}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}} \qquad (1)$$

電位から電界を求める式より

$$\boxed{\vec{E}_{\mathrm{P}} = -\nabla V_{\mathrm{P}}} \qquad (2)$$

$$= -\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}\right) = -\hat{x}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\hat{x}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}(x^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}2x\right)$$

$$= \hat{x}\frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+a^2)^{3/2}}$$

必須事項（置換微分）

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ において

$X = x^2+a^2$ とおくと

$f(X) = \frac{1}{\sqrt{X}} = X^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dX}\frac{dX}{dx} \qquad (3)$$

答え：$\vec{E}_P = \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\hat{x}$

電位と電界の計算手順のまとめ

①Vが求まれば，微分によってEが求まる。

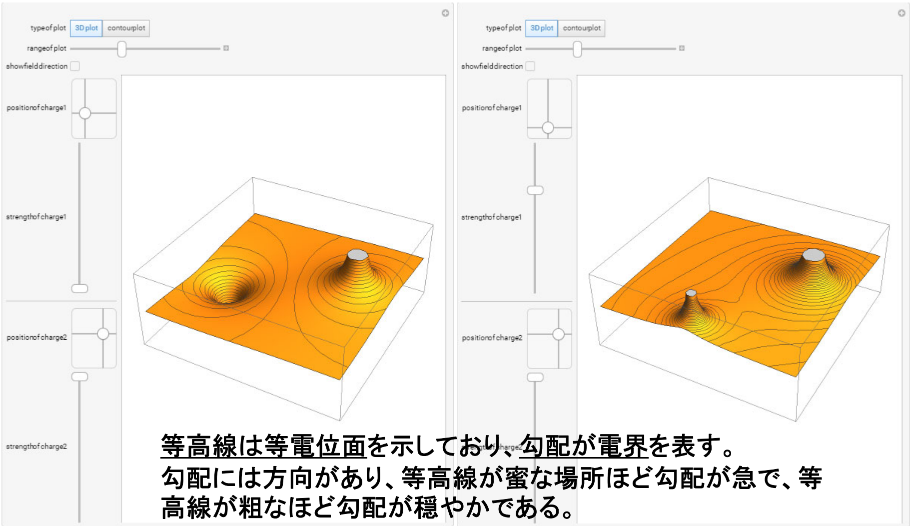
②逆に、Eが求まれば積分によってVが求まる。

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

積分　微分　等価　積分　微分

$$V = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{E}\bullet d\vec{l} \qquad \vec{E} = -\nabla V(\vec{r})$$

電位（ポテンシャル）の表示例



等高線は等電位面を示しており、勾配が電界を表す。

勾配には方向があり、等高線が密な場所ほど勾配が急で、等高線が粗なほど勾配が穏やかである。

https://demonstrations.wolfram.com/ElectricDipolePotential/

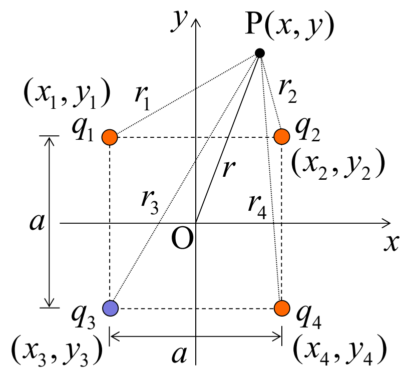
電位分布の計算モデル

【演習】演習教科書の応用問題2.8において，電位分布を−2<x<2，−2<y<2の範囲で描画せよ。ただし，a=2 mとせよ。刻み幅，等高線の間隔は各自で決めよ。

$$\begin{cases} q_1 = 12\ \mathrm{nC} \\ q_2 = 21\ \mathrm{nC} \\ q_3 = -23\ \mathrm{nC} \\ q_4 = 17\ \mathrm{nC} \end{cases} \qquad (1)$$

$$V_{\mathrm{P}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1}+\frac{q_2}{r_2}+\frac{q_3}{r_3}+\frac{q_4}{r_4}\right) \qquad (2)$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}, \\ r_2 = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}, \\ r_3 = \sqrt{(x-x_3)^2+(y-y_3)^2}, \\ r_4 = \sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2} \end{cases} \qquad (3)$$

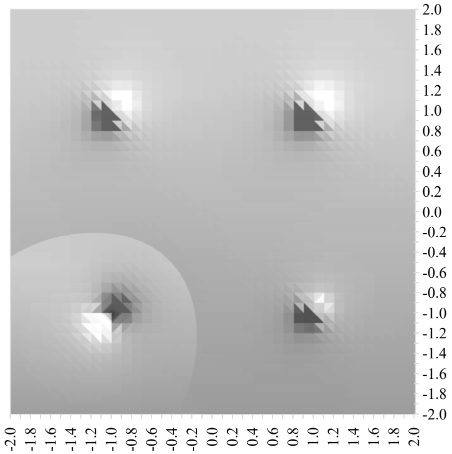


大貫，安達，演習電気磁気学【新装版】p.17，森北出版，2014

電位分布の計算結果

【解答】 エクセルの複合参照を使って数式を入力し、等高線で描画する。

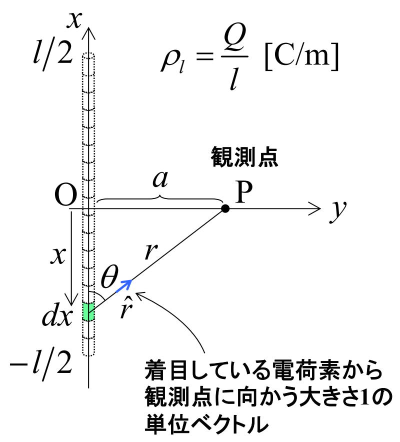
エクセルを使う場合は、波源が置かれた特異点(分母がゼロになって発散する点)を条件付きで計算させないようにするか、計算格子が特異点と一致しないように格子間隔をずらす必要がある。この例ではdx=dy=0.101間隔にしている。



http://www.kusamalab.org/lecture/excelmacro/excelmacro.html

有限長一様直線電荷の電位1

【例題】 x軸上で電荷Q[C]を一様に帯電させた長さl[m]の有限長線電荷がある。観測点Pにおける電位の大きさを求めよ。



$$\rho_l = \frac{Q}{l}\ \text{[C/m]}$$

解法1(オーソドックスな方法)

変数をすべて x のみの関数に書き換える。

$$\left\{ r = \sqrt{a^2+x^2} \right.$$

積分公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$$

答え $V_P = \dfrac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\sqrt{4a^2+l^2}+l}{2a}$

有限長一様直線電荷の電位2

【解答】

$$\begin{cases} dV_P = \dfrac{\rho_l dx}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} = \dfrac{\rho_l dx}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \\ V_P = \displaystyle\int_{x=-l/2}^{+l/2} dV = \int_{x=-l/2}^{+l/2}\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=-l/2}^{+l/2}\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx \end{cases}$$

積分公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|$$

$r = \sqrt{a^2+\dfrac{l^2}{4}} > \dfrac{l}{2}$ のため，絶対値はそのまま外せる

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right]_{-l/2}^{+l/2} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left|\frac{l}{2}+\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}\right| - \ln\left|-\frac{l}{2}+\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}\right|\right\}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left(\frac{l}{2}+\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}\right) - \ln\left(-\frac{l}{2}+\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}\right)\right\}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left(\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}+\frac{l}{2}\right) - \ln\left(\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}-\frac{l}{2}\right)\right\}$$

有限長一様直線電荷の電位3

【続き】

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}+\frac{l}{2}}{\sqrt{a^2+\frac{l^2}{4}}-\frac{l}{2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+l^2}+\frac{l}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+l^2}-\frac{l}{2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4a^2+l^2}+l}{\sqrt{4a^2+l^2}-l}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)}{4a^2+l^2-l^2} = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\left(\sqrt{4a^2+l^2}+l\right)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\sqrt{4a^2+l^2}+l}{2a}\right)^2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{4a^2+l^2}+l}{2a}$$

又は，上下対称であることを利用して積分範囲を半分にして2倍すると

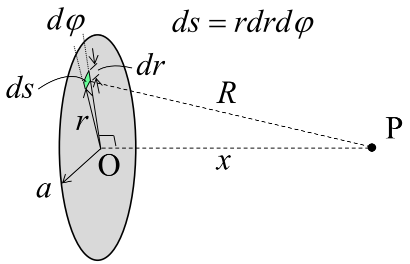
$$= \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right]_{-l/2}^{+l/2} = 2\frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|\right]_{0}^{+l/2} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{l/2+\sqrt{a^2+(l/2)^2}}{\sqrt{a^2}}\right|$$

$$= \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{l/2+\sqrt{a^2+l^2/4}}{a}\right| = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{l+\sqrt{4a^2+l^2}}{2a}\right| = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{l+\sqrt{4a^2+l^2}}{2a}$$

円板状一様電荷の電位1

【演習】半径aの円板状電荷Qが軸上xの位置に作る電位を求めよ。

$$ds = rdrd\varphi$$



$$\rho_s = \frac{Q}{\pi a^2}\ [\mathrm{C/m^2}]$$

答え $V_P = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+a^2}}$

円板状一様電荷の電位2

【解答】

$$\begin{cases} dV_P = \dfrac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R} = \dfrac{\rho_s rdrd\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{r^2+x^2}} \\ V_P = \dfrac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}rdrd\varphi = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi}_{2\pi}\underbrace{\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr}_{} \end{cases}$$

分子が分母の√内の微分になっているので置換積分が使える

置換積分を行うために

$x^2+r^2=t$ と置くと $\dfrac{dt}{dr}=2r$

となるから

$$\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr = \int_{t=x^2}^{x^2+a^2}\frac{r}{\sqrt{t}}\frac{1}{2r}dt = \int_{t=x^2}^{x^2+a^2}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int_{t=x^2}^{x^2+a^2}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt = \left[t^{\frac{1}{2}}\right]_{x^2}^{x^2+a^2}$$

$$= \sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2}$$

$$V_P = \frac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\left(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2}\right) = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2}-|x|\right) = \begin{cases}\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right) & x>0 \\ \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right) & x<0\end{cases}$$

円板状一様電荷の電界1

【演習】半径aの円板状電荷Qが軸上xの位置に作る電界を求めよ。

【解答】電位の傾きの式より

$$\vec{E}_P = -\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} = -\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2}-|x|\right)\right\}$$

$x>0$ のとき

$$\vec{E}_P = -\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)\right\} = -\hat{x}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left\{x(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-1\right\} = \underline{\hat{x}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)}$$

$x<0$ のとき

$$\vec{E}_P = -\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)\right\} = -\hat{x}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left\{x(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+1\right\} = \underline{\hat{x}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)}$$

$x \gg a$ のとき，即ち $1 \gg a/x$

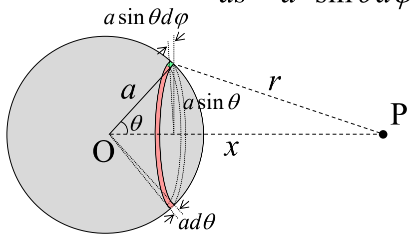
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x}{x\sqrt{1+(a/x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(a/x)^2}} = (1+\delta)^{-\frac{1}{2}} \simeq 1-\frac{1}{2}\delta = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2$$

$$\vec{E}_P = \hat{x}\frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}\left(1-\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2\right\}\right) = \hat{x}\frac{\rho_s a^2}{4\varepsilon_0 x^2} = \hat{x}\frac{\rho_s \pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \underline{\hat{x}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$$

球殻電荷の電位1

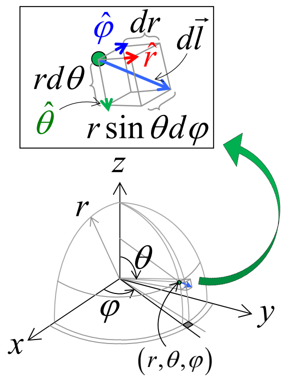
【演習】半径aの球殻状電荷Qが軸上xの位置に作る電位を求めよ。

$$ds = a^2\sin\theta d\varphi d\theta$$



$$d\vec{l} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$dv = r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$



球座標

spherical coordinate

$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}\ [\mathrm{C/m^2}]$$

$$r = \sqrt{(x-a\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{x^2+a^2-2xa\cos\theta}$$

球殻電荷の電位2

【解答】

$$\begin{cases} dV_P = \dfrac{\rho_s ds}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} = \dfrac{\rho_s a^2 \sin\theta d\varphi d\theta}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2-2xa\cos\theta}} \\ V_P = \dfrac{\rho_s}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{a^2\sin\theta}{\sqrt{x^2+a^2-2xa\cos\theta}}d\theta d\varphi = \frac{\rho_s a^2}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi}_{2\pi}\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{x^2+a^2-2xa\cos\theta}}d\theta}_{\text{置換積分が使える}} \end{cases}$$

置換積分を行うために

$-\cos\theta = t$ と置くと $\dfrac{dt}{d\theta} = \sin\theta$

となるから

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{x^2+a^2-2xa\cos\theta}}d\theta = \int_{t=-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2+2xat}}dt = \frac{1}{xa}\left[\sqrt{x^2+a^2+2xat}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{xa}\left(\sqrt{x^2+a^2+2xa}-\sqrt{x^2+a^2-2xa}\right) = \frac{1}{xa}\left(x+a-|x-a|\right)$$

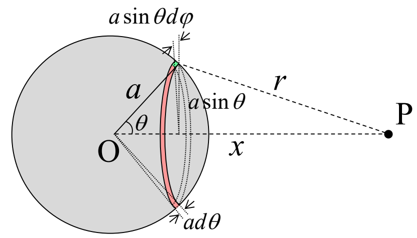
$$V_P = \frac{\rho_s a^2}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\frac{1}{xa}\left(x+a-|x-a|\right) = \frac{\rho_s a}{2\varepsilon_0 x}\left(x+a-|x-a|\right) = \begin{cases} \dfrac{\rho_s a^2}{\varepsilon_0 x} = \dfrac{\rho_s 4\pi a^2}{4\pi\varepsilon_0 x} & x > a \\ \dfrac{\rho_s a}{\varepsilon_0} & x < a \end{cases}$$

球殻電荷の電界1

【演習】半径aの球殻状電荷Qが軸上xの位置に作る電界を求めよ。

【解答】電位の傾きの式より

$$ds = a^2\sin\theta d\varphi d\theta$$



$$\rho_s = \frac{Q}{4\pi a^2}\ [\mathrm{C/m^2}]$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\rho_s a}{2\varepsilon_0 x}\left(x+a-|x-a|\right)\right\}$$

$x > 0$ のとき

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_s a^2}{\varepsilon_0 x}\right)$$

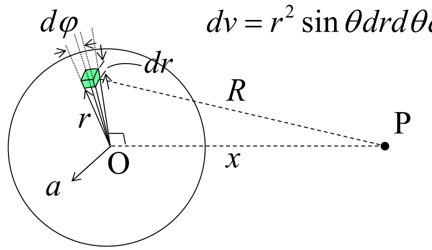
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

$x < 0$ のとき

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho_s a}{\varepsilon_0}\right) = 0$$

球状分布電荷の作る電位1

【演習】半径aの球状電荷Qが軸上xの位置に作る電位を求めよ。



$$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$$

$$\rho_v = \frac{3Q}{4\pi a^3}\ [\mathrm{C/m^3}]$$

答え $V_P = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

球状分布電荷の作る電位2

【解答】

$$\begin{cases} dV_P = \dfrac{\rho_v dv}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R} = \dfrac{\rho_v r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{r^2+x^2}} \\ V_P = \dfrac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{a}\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi \end{cases}$$

$$= \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr$$

$$= \frac{\rho_v}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}2\pi\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr$$

$$= \frac{\rho_v 4\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr$$

$$= \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{3Q}{4\pi a^3}\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{a^3}\int_{r=0}^{a}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr$$

答え $V_P = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$