1.1.4　ガウスの法則

図 1.5 左に示すように点電荷 Q を含む任意形状の閉じた面 S（ガウス面と呼ぶ）を考える。そしてガウス面上の位置 r の微小面積 ds において、$\vec{E}$ と $d\vec{s}$（大きさ ds で面に垂直な外向き方向 $\hat{n}$ を有するベクトル）の内積[*11]を求める。このために図 1.5 右のように点

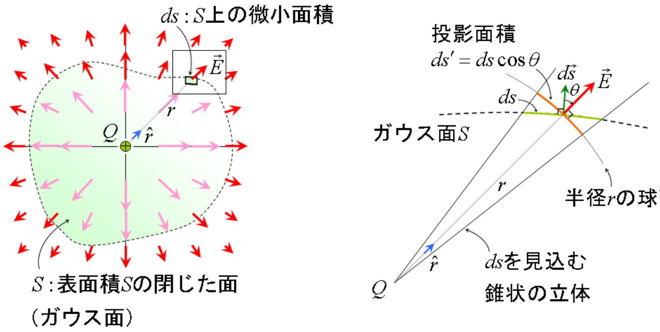

図 1.5　点電荷 Q を内部に含む任意形状の閉面 S（左）と閉面 S 上の微小面積 ds を貫く電界 E を真横から見た様子（右）。

電荷 Q から ds を切り取るような錐状の立体を考える [17, p.8]。この立体の中で、点電荷 Q を中心とした半径 r の球面に微小面積 ds を投影すると、投影面積は $ds' = ds\cos\theta$ になる。また、点電荷 Q の作る電界 $\vec{E}$ が式 (1.3) で与えられたことを使うと、

$$\vec{E} \bullet d\vec{s} = Eds\cos\theta = Eds' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ds'}{r^2} \tag{1.9}$$

となる。ここで平面角度と立体角の定義を整理しておく [18, p.23]。図 1.6 左に示すよ

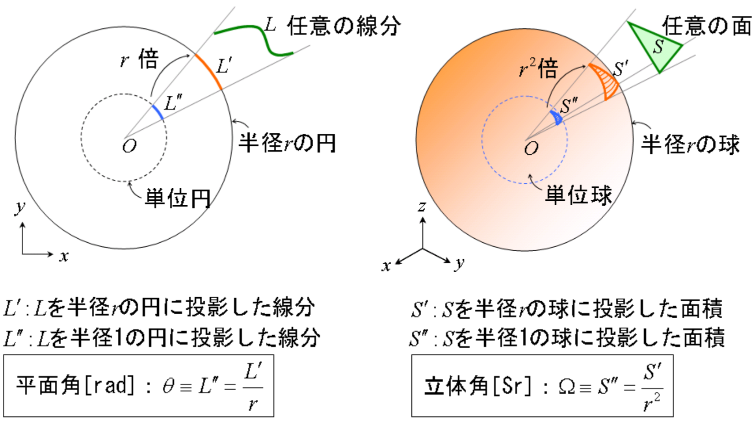

図 1.6　平面角度の定義（左）と立体角の定義（右）。平面角度は単位円に射影した弧の長さに等しく、立体角は単位球に射影した球面上の面積に等しい [18, p.23]。

うな任意の線分 L を単位円に射影したときの弧の長さ L'' が平面角度 θ[rad] の定義であるから、半径 r の円に射影された弧の長さは $L' = rL'' = r\theta$ となる。同様に、図 1.6

[*11] 「$\vec{E}$ の垂直成分 $E\cos\theta$ と ds の積」のこと。面に垂直なベクトル成分と面積の積は流束（またはフラックス）と呼ばれる。この場合は $\vec{E}$ の流束を求めている。例えば流束の 1 つとして、太陽光の実質的な強さ（日射量）は、手のひら（面）と太陽光線（ベクトル）の角度が 90 度のとき最大となる。

右のような任意の面 S を単位球に射影したときの球面上の面積 S'' が立体角 Ω（単位を [sr] で表しステラジアンと読む）の定義であるから、半径 r の球に射影された面積は $S' = r^2 S'' = r^2 \Omega$ となる。即ち、半径 r の球面上の面積 S' の立体角は $\Omega = S'/r^2$ となるから、$d\Omega = dS'/r^2$ である。式 (1.9) を立体角 $d\Omega$ を使って表現すると次式となる。

$$\vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ds'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \tag{1.10}$$

式 (1.10) の値はガウス面上のどの場所でも、電界の大きさ E や距離 r には依存せず、立体角 $d\Omega$ だけで決まることが重要である。閉じた面 S の立体角は 4π である[*12]ことを利用して、式 (1.10) をガウス面 S 全体で総和すると次式が得られる。

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S d\Omega = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{1.11}$$

今度は図 1.7 左のようにガウス面が点電荷 Q を含まない任意形状の閉じた面 S の場合を考える。図 1.5 右と同じように、点電荷 Q から微小面積 ds を切り取る錐状の立体に着

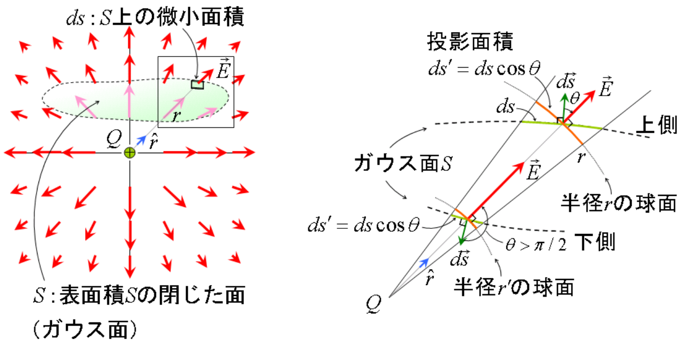

図 1.7　点電荷 Q を内部に含まない任意形状の閉面 S（左）と閉面 S 上の微小面積 ds を貫く電界 E を真横から見た様子（右）。ds の法線と $\vec{E}$ のなす角度を θ とする。

目するが、今度は図 1.7 右のようにガウス面の上側（電界が出てゆく面）と下側（電界が入ってゆく面）の微小面積をセットにして考える。$d\vec{s}$ は閉じた面 S に対して常に外向きに取る約束があるので、下面では $\vec{E}$ と $d\vec{s}$ のなす角度が $\theta > \pi/2$ となり、点電荷 Q を中心とした球面 r' への射影面積が $ds' = ds\cos\theta < 0$ となる [19, p.18]。即ち、式 (1.10) において上面と下面では立体角の大きさが等しく符号が正負逆になるので、

$$\left(\vec{E} \bullet d\vec{s}\right)_{\text{上面}} + \left(\vec{E} \bullet d\vec{s}\right)_{\text{下面}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(d\Omega - d\Omega) = 0 \tag{1.12}$$

となる。式 (1.12) をガウス面 S 全体で総和してもゼロになることは明らかである。以上電荷 Q がガウス面に含まれる場合と含まれない場合をまとめると次式が得られる。

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q_{\text{in}}}{\varepsilon_0} \tag{1.13}$$

これを**ガウスの法則**と呼ぶ。ただし、Q_{in} はガウス面に含まれる総電荷を表し、ガウス面の外にある電荷はカウントされない。式 (1.13) のガウスの法則は、もとは式 (1.3) のクー

[*12] 図 1.6 右において、任意の面 S が原点 O を包むように閉じていれば、内部の単位球への射影面積は全表面積 4π に等しい。

ロンの法則に数式操作を施しただけなので、ガウスの法則とクーロンの法則は等価である [20, pp.41-42][*13]。

[*13] クーロンの法則を別名称の法則で敢えて表現する理由は、空間上で対称性（線対称、円筒対称、球対称）がある電荷分布が周囲に作る電界を求めたいとき、ガウスの法則を使うと計算が極めて楽になるためである。これを実感するには演習問題に触れる必要がある。