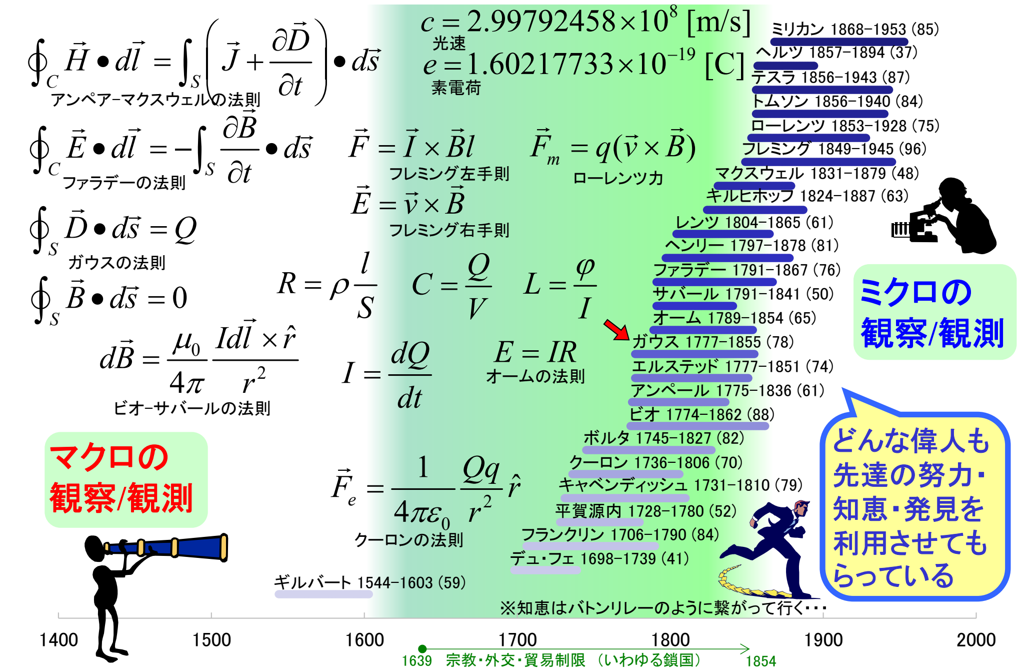
# ガウスの法則

1st. 2016/05/09
Lst. 2021/12/01

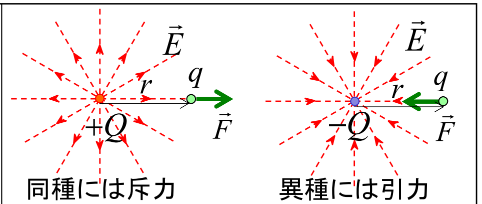
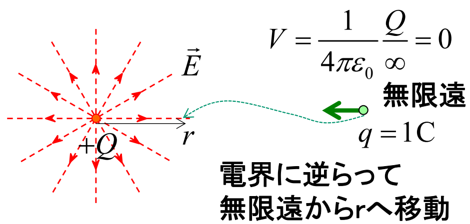
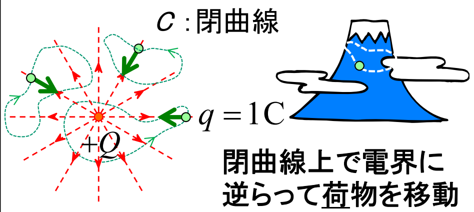


# 電磁気学の偉人マップ






# ここまでの必須事項

| | | |
|---|---|---|
| ① クーロンの法則<br>② 電界（q=+1 Cあたりのクーロンの法則） | $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\hat{r}$ (1)<br>$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$ (2) |  |
| ③ 電位と電位差（q=+1 Cを無限遠から移動させたときの仕事、即ちクーロンの法則のエネルギー版） | $W = -\int_\infty^r q\vec{E}\bullet d\vec{l}$<br>$V = -\int_\infty^r \vec{E}\bullet d\vec{l}$ (3)<br>$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ |  |
| ④ 保存場の性質（q=+1 Cを閉じた曲線上で移動させたときの仕事は常にゼロ、即ち電気版のエネルギー保存法則） | $\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = 0$ (4)<br>ベクトルEの循環 |  |

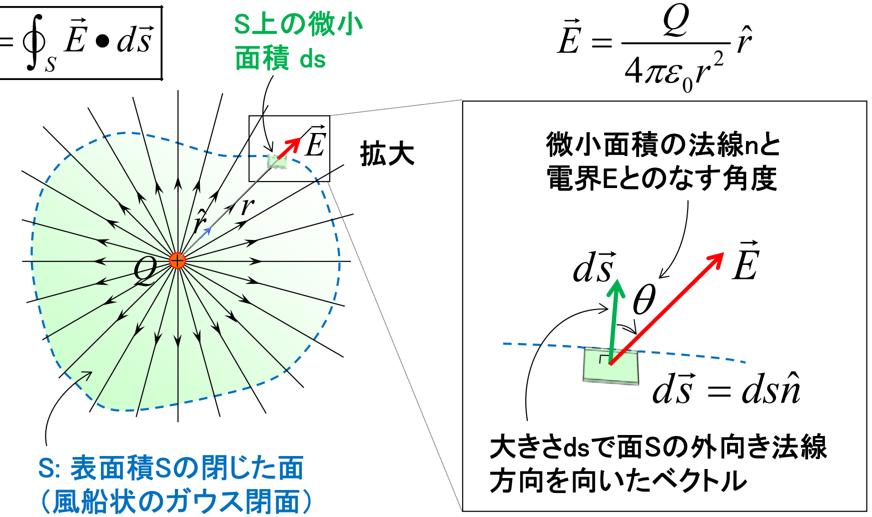


# ガウス閉面上の流束

点電荷Qを含む任意形状の閉じた面S（ガウス面と呼ぶ）を考える。そしてガウス面上の位置rの微小面積dsにおいて、ベクトルEと微小面積ベクトルds（大きさdsで面に垂直な外向き方向を有するベクトル）の内積を求める。<u>物理学ではこれを流束と呼ぶ</u>。

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s}}$$

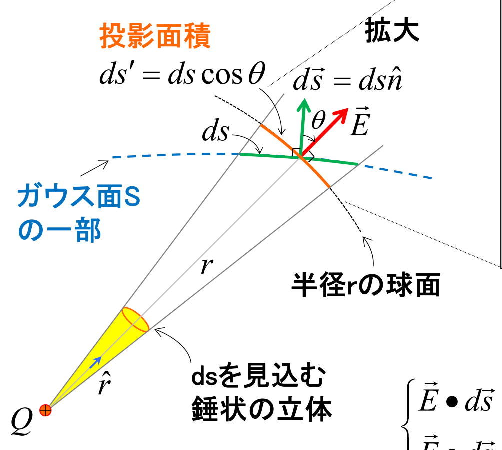
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

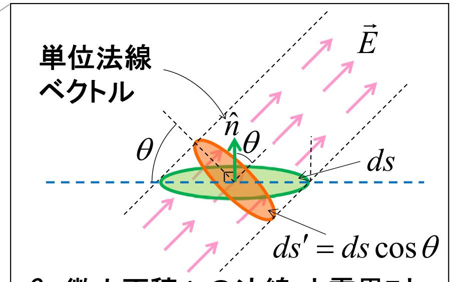


# 流束とは？

## 流束とは・・・面Sを垂直に貫くベクトル成分を面積分した量

$$\boxed{\Phi = \int_S \vec{E} \bullet d\vec{s}}$$ ・・・ベクトルEの流束




θ：微小面積dsの法線nと電界Eとのなす角度

ds ＞ ds' でも、ds とds' を通過する流束は等しい。

面積dsのE方向への投影面積

$$\vec{E} \bullet d\vec{s} = \vec{E} \bullet ds\hat{n} = E\boxed{ds\cos\theta} = E\boxed{ds'} \quad (1)$$

$$\vec{E} \bullet d\vec{s} = \vec{E} \bullet ds\hat{n} = \boxed{E\cos\theta}ds = \boxed{E_n}ds \quad (2)$$

ベクトルEのds方向成分



# 流束の代表的な例

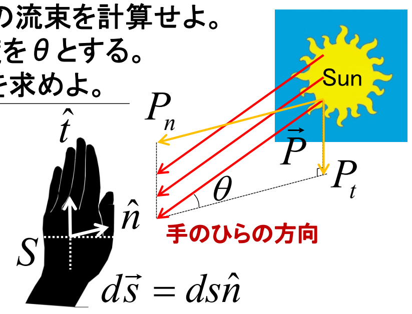
【例題】(1) 面積S[m²]の手のひらに対する太陽の流束を計算せよ。ただし、手のひらの法線nと太陽光Pとのなす角度をθとする。
(2) 真夏と真冬における日本国土の流束の比率を求めよ。

【解答例 (1)】

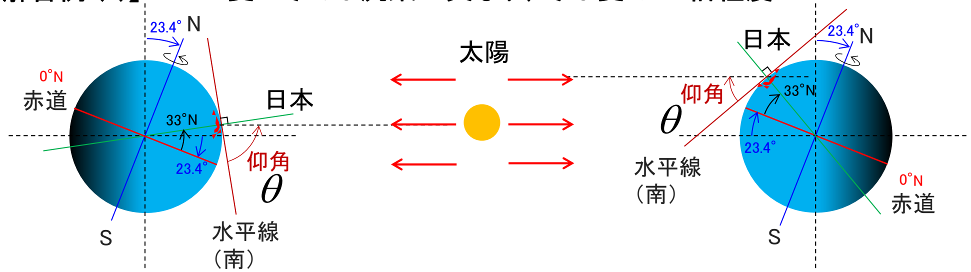
$$\Phi = \int_S \vec{P} \bullet d\vec{s} = \int_S \vec{P}ds\hat{n} = \int_S Pds\cos\theta$$

$$= \int_S P\cos\theta ds = \int_S \underline{P_n} ds$$

手のひらに垂直な成分




【解答例 (2)】　夏と冬では流束が異なり、冬は夏の0.4倍程度

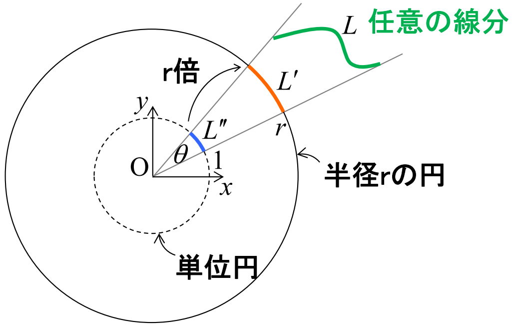


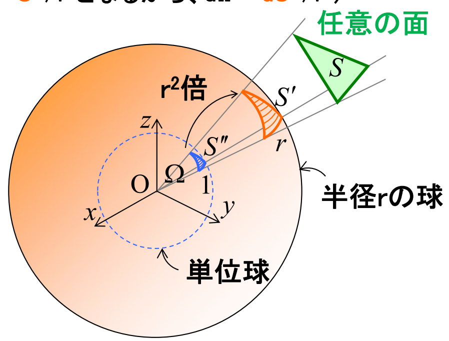

夏の仰角 θ ＝ 90−(33−23.4) = 80.4°　　冬の仰角 θ ＝ 90−(33+23.4) = 33.6°



# 平面角と立体角

①【平面角度 θ [rad] の定義】：任意の線分L [m]を単位円に射影したときの弧の長さL”
・・・半径r [m]の円に射影された弧の長さはL' = rL”= r θ
②【立体角Ω [Sr]の定義】：任意の面S [m²]を単位球に射影したときの球面上の面積S”
・・・半径r [m]の球に射影された面積はS' = r²S” = r²Ω
（即ち、半径r [m]の球面上の面積S' の立体角はΩ = S' /r²となるから、dΩ = dS' /r²）




L'：Lを半径rの円に投影した線分
L”：Lを半径1の円に投影した線分

S'：Sを半径rの球に投影した面積
S”：Sを半径1の球に投影した面積

平面角 [rad]　$\theta \equiv L'' = \dfrac{L'}{r}$

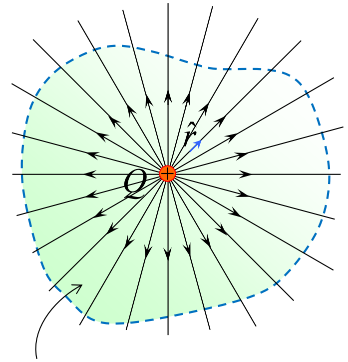
立体角 [Sr]　$\Omega \equiv S'' = \dfrac{S'}{r^2}$
ステラジアンと読む

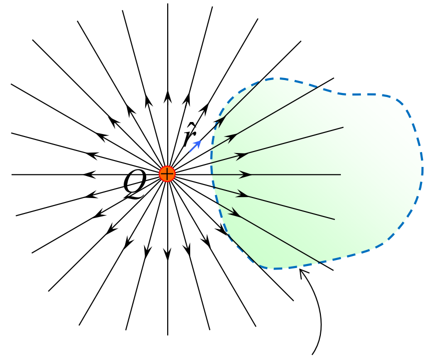
伊藤, 図でわかる電磁気学, p.23, 講談社サイエンティフィク



# 真空中のガウスの法則

① $\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$　　② $\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s}} = 0$




S: 表面積Sの閉じた面（風船状のガウス閉面）が<u>電荷Qを内部に含むとき</u>

流束Φは面を内から外に出るだけ

S: 表面積Sの閉じた面（風船状のガウス閉面）が<u>電荷Qを内部に含まないとき</u>

流束Φは面を内から外に出るだけでなく、同量が外から内にも入る

## ガウスの法則(Sが電荷を含む場合)


①ガウス面S上のEとdsの内積(微小流束)は

$$\vec{E}\bullet d\vec{s} = E\cos\theta ds = Eds' \qquad (1)$$

ここで、ガウス面上の電界は

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad (2)$$

であるから、

$$\vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}ds' = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ds'}{r^2} \qquad (3)$$

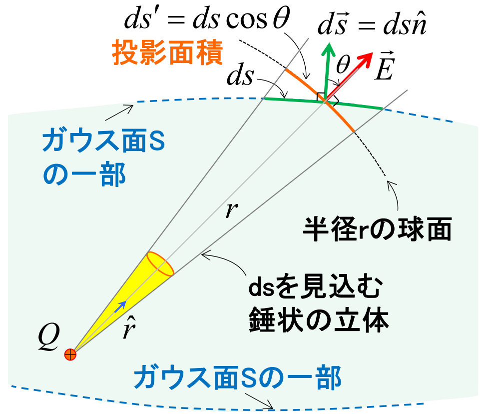
所で、点電荷Qからガウス面上の微小面積dsを見込む立体角は定義より

$$d\Omega = \frac{ds'}{r^2} = \frac{ds\cos\theta}{r^2} \qquad (4)$$

であるから、式(3)は

$$\vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega \qquad (5)$$

となる。即ち、流束は立体角に比例する。




式(5)を電荷Qを包むガウス閉面全体で総和すると、立体角の総和になるので、

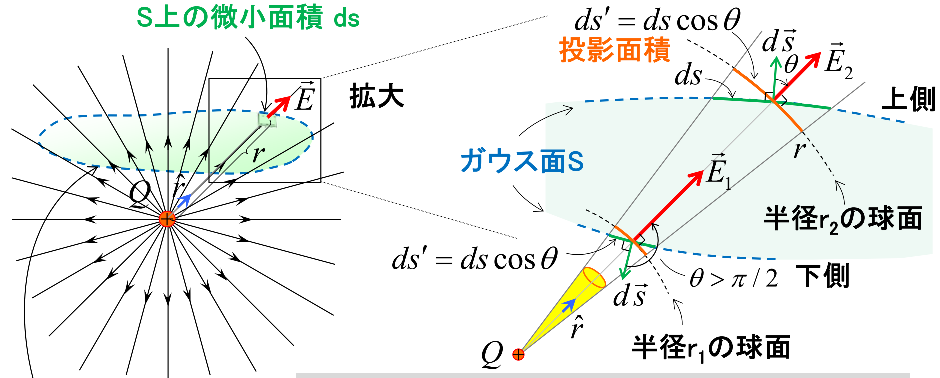
$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\oint_S d\Omega}_{4\pi} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (6)$$

となる。

ノート https://www.kusamalab.org/lecture/em1/B1_et2_1.pdf　河本, 身近に学ぶ電磁気学, p.8, 共立出版

## ガウスの法則(Sが電荷を含まない場合)


②次に、ガウス面が点電荷Qを含まない任意形状の閉じた面Sの場合 を考える。点電荷Qが微小面積dsを切り取る錐状の立体に着目するが、今度はガウス面の上側(電界が出てゆく面)と下側(電界が 入ってゆく面)の微小面積をセットにして考える。dsは閉じた面Sに対して常に外向きに取る約束があるので、下面ではEとdsのなす角度が$\theta > \pi/2$となり、点電荷Qを中心とした球面 $r_1$への射影面積が$ds' = ds\cos\theta < 0$となる。




$$\vec{E}\bullet d\vec{s}\Big|_{上側} + \vec{E}\bullet d\vec{s}\Big|_{下側} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}(d\Omega - d\Omega) = 0$$

電荷Qを含まないガウス面S全体で総和してもゼロとなることは明らか。

## 真空中のガウスの法則


【ベクトル形】

積分面Sが閉じていることを示す記号

閉面S上の電界ベクトル

積分面を構成する外向き微小面積ベクトル

閉面内に含まれる真電荷(分極電荷除く)

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

表面積

内積記号

真空の誘電率

$8.854\text{x}10^{-12}$

[V/m] × [$m^2$] = [C] ÷ [F/m]

## 真空中のガウスの法則


【スカラー形】

積分面Sが閉じていることを示す記号

閉面Sに垂直な電界成分

積分面を構成する外向き微小面積

閉面内に含まれる真電荷

$$\oint_S \overbrace{E\cos\theta}\, ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

表面積

閉面Sと電界ベクトルのなす角度

真空の誘電率

$8.854\text{x}10^{-12}$

[V/m] × [$m^2$] = [C] ÷ [F/m]

# ベクトルの面積分

## 流束という物理量

面Sが閉じていることを示す記号

微小面積dsに垂直で外向きを示す

$$\oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

表面積

面S上のベクトル量

内積記号

微小面積

ミラーボール

微小面積ds ミラーボールを構成する鏡1枚の面積

※ 図では赤道上は大きく見えるが、実際は無限小の大きさ

全表面積S =Σds

---

面Sが閉じていない（開いている）ことを示す記号

微小面積dsに垂直で外向きを示す

$$\int_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

表面積

面S上のベクトル量

内積記号

微小面積

風船と熱気球の違いでもよい

微小面積ds パズルを構成するピース1枚の面積


※ 内側は表面ではなく裏面として考えるので、表面積Sに含まない

全表面積S =Σds

※ 計算結果は、ベクトルFの単位[〇]と面積[m²]との積になる



# ベクトルの面積分

$$\boxed{\int_S \vec{A} \bullet d\vec{s} = \int_S \left\{ A_t \hat{t} + A_n \hat{n} \right\} \bullet ds\hat{n} = \int_S A_n ds}$$

$d\vec{s} = ds\hat{n}$　積分面Sに対して常に法線方向を向いた微小面積ベクトル

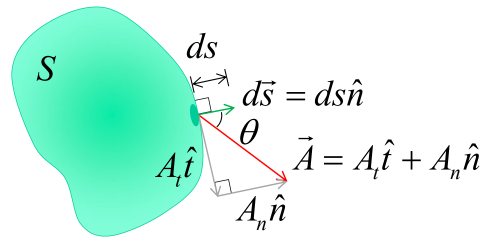
$\vec{A} = A_t\hat{t} + A_n\hat{n}$　積分面S上のある点におけるベクトル（物理量）

$A_t$　積分面Sに対するベクトルAの接線成分

$A_n$　積分面Sに対するベクトルAの法線成分（垂直成分）

$\hat{t}$　積分面Sに対して接線方向を向いた単位ベクトル

$\hat{n}$　積分面Sに対して法線方向を向いた単位ベクトル




$t$ : tangential
接線の（接線成分）

$n$ : normal
法線の（法線成分）



# 重ね合わせの原理

【ベクトル形】

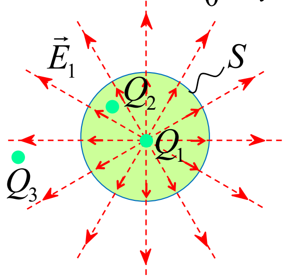
$$\boxed{\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

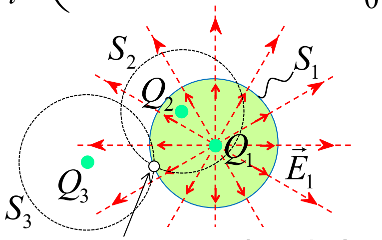
共通の積分面Sの場合

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i Q_i$$

個別の積分面$S_i$の場合

$$\sum_i \left( \oint_{S_i} \vec{E}_i \bullet d\vec{s} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0} \right)$$



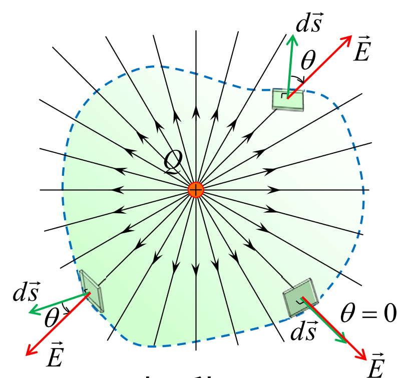




P　3つの球の交点



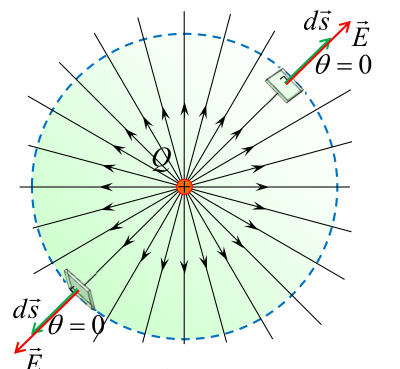
# ガウス閉面の形

ガウス閉面の形は閉じた風船型であれば任意形状でよいが、手計算をするには点電荷を中心とした真球を考えるのが便利である。




表面積 S=?

任意形状のガウス閉面

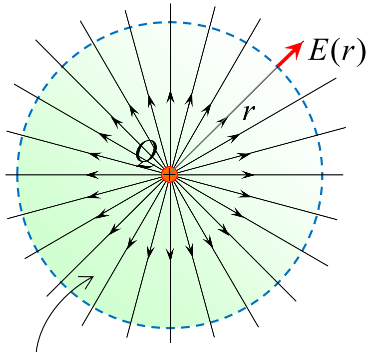



表面積 S=4πr²

球対称のガウス閉面

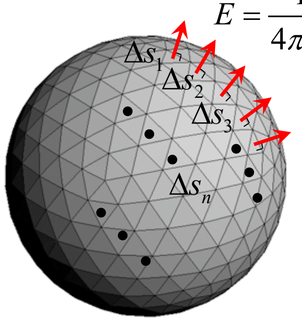
# 球形のガウス閉面と微小面積の例






S: 表面積Sの閉じた面
（風船状のガウス閉面）

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

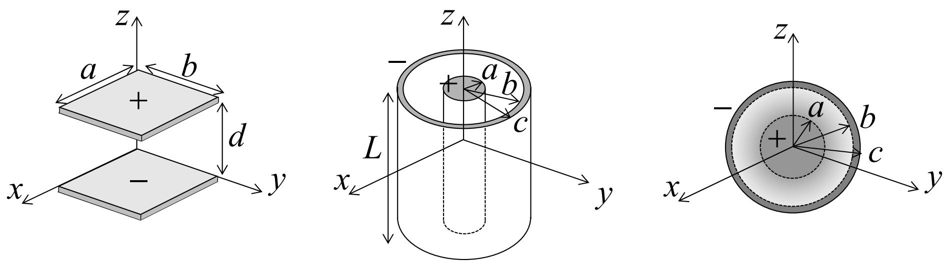



$\Delta s_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$

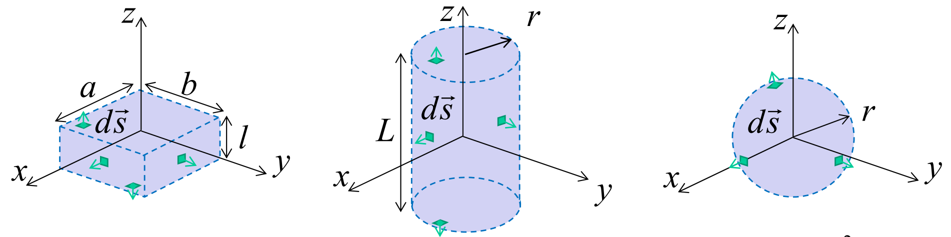
S上の微小面積
のイメージ

# 手計算で解けるガウス閉面の取り方






平板電極　円筒電極　球電極




$S=2ab+2al+2bl$
直方体

$S=2\pi rL+2(2\pi r)$
円筒

$S=4\pi r^2$
球

# ガウスの法則の問題①



【例題】半径a [m]の球の表面に電荷Q [C]が一様に分布しているときの電位を求めよ。（教科書 例題2.6）

【解答】半径aの球を包む半径r（r>a）のガウス閉面を考えると、ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

電界は常にr方向へ放射状に広がるので、

$$\oint_S E\hat{r}\bullet ds\hat{r}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

左辺のベクトルの内積を計算すると

$$\oint_S Eds=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

Eは積分面S上で常に球対称で一定の大きさであるから、積分には寄与しない。

$$E\oint_S ds=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

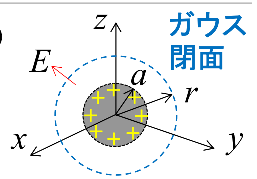
面積分は半径rの球の表面積なので、

$$E4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (5)$$

これをEについて求めると

$$E=\frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0} \qquad (6)$$

ガウス閉面




$S=4\pi r^2$

球表面の電位は、無限遠を基準にして

$$V=-\int_\infty^a \vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_\infty^a \frac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}\hat{r}\bullet dr\hat{r}$$

$$=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^a\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[r^{-1}\right]_\infty^a$$

$$=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_\infty^a\frac{1}{r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a} \qquad (7)$$

この場合はrが無限遠の球面上に−Q [C] の電荷があると考えればよい。

# ガウスの法則の問題②



【例題】面積S [m²]、間隔d [m]の平行平板導体がある。平板Aに+Q [C]、平板Bに−Q [C]を与えたとき、平板内外の電界と平板間の電位差を求めよ。（教科書、p.29）

【解答】平板Aを包む直方体のガウス閉面を考えるとガウスの法則より

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

電界は常に−z方向へ垂直に加わるので、

$$\int_S E(-\hat{z})\bullet ds(-\hat{z})=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

左辺のベクトルの内積を計算すると

$$\int_S Eds=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

Eは積分面S（側面に電界はないので、面Sは電極の面積になる。）上で常に一定の大きさであるから、積分には寄与しない。

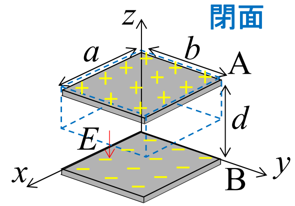
$$E\int_S ds=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

$$ES=\frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad (5)$$

これをEについて求めると

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad (6)$$

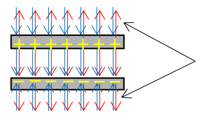
$S=ab$　ガウス閉面




AB間の電位は、B点を基準にして

$$V=-\int_B^A \vec{E}\bullet d\vec{r}=-\int_{z=0}^d\frac{Q}{\varepsilon_0 S}(-\hat{z})\bullet dz\hat{z}$$

$$=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\int_0^d dz=\frac{Q}{\varepsilon_0 S}[1]_0^d=\frac{Qd}{\varepsilon_0 S} \qquad (7)$$



打ち消し

# ガウスの法則の問題③

【例題】半径a [m]の無限に長い円筒表面に電荷が一様に分布している。線電荷密度をλ[C/m]とするとき、任意の点の電界を求めよ。(教科書、p.25)

【解答】半径aの円筒を包む半径r(r>a)のガウス閉面を考えると、ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

電界は常にr方向へ放射状に広がるので、

$$\int_S E\hat{r} \bullet ds\hat{r} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

左辺のベクトルの内積を計算すると

$$\int_S Eds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

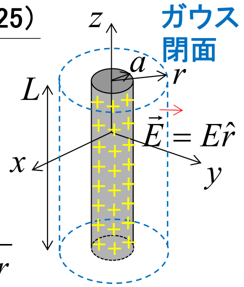
Eは積分面S(上下面に電界はないので、面Sは側面積2πrLになる。)上で常に一定の大きさなので、積分に寄与しない。

$$E\int_S ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

$$E 2\pi r L = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

これをEについて求めると (6)

$$E = \frac{\lambda L}{2\pi r \varepsilon_0 L} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}$$




電位は、無限遠を基準にして

$$V = -\int_\infty^r \vec{E} \bullet d\vec{r} = -\int_\infty^r \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \hat{r} \bullet dr\hat{r}$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_\infty^r \frac{1}{r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}[\ln r]_r^\infty$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln\infty - \ln r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\infty}{r} \quad (7)$$

この場合は、電位差(例えば∞→c)のみが意味を有する。



# ガウスの法則の問題④

【例題】厚みの無視できる無限平面に電荷が一様に分布している。面電荷密度をσ[C/m$^2$] とするとき、任意の点の電界を求めよ。(教科書、p.24)

【解答】一部分の面積Sを包むようにガウス閉面を考えると、ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

電界は±z方向のみへ垂直に伸びるので、

$$\int_S E\hat{z} \bullet ds\hat{z} + \int_S E(-\hat{z}) \bullet ds(-\hat{z}) + = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

左辺のベクトルの内積を計算すると

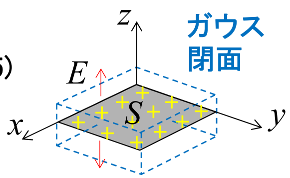
$$\int_S Eds + \int_S Eds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

Eは積分面S(側面に電界はないので、積分面は上下面積2Sになる。)上で常に一定の大きさなので、積分に寄与しない。

$$2E\int_S ds = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

ガウス閉面のうち、上下面の大きさはSであるから

$$E 2S = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (5)$$




これをEについて求めると

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma S}{2\varepsilon_0 S} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad (6)$$

即ち、

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} & (z>0) \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\hat{z}) & (z<0) \end{cases} \quad (7)$$

この場合はz軸正負無限遠面に−σ/2 [C/m$^2$]の電荷があると考えればよい。



# ガウス閉面の取り方に関する考察

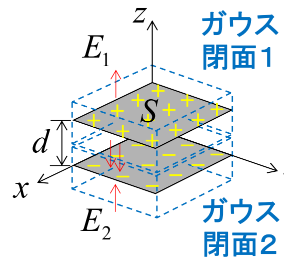
【例題】面積S [m$^2$]、間隔d [m]の平行平板導体がある。平板Aに+Q [C]、平板Bに−Q [C]を与えたとき、平板内外の電界と平板間の電位差を求めよ。(教科書、p.29)

この問題を二つのガウス閉面の重ね合わせの問題として計算してみる。

【解答】正電極を包むガウス閉面1および、負電極を包むガウス平面2の両方を考えると

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \oint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

右図のモデルでこれを解くと、ガウス平面1の上下に生じる電界E1および、ガウス平面2の上下に生じる電界E2は




$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\hat{z} & (z>d) \\ \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}(-\hat{z}) & (z<d) \end{cases} \qquad \vec{E}_2 = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}(-\hat{z}) & (z>0) \\ \dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}\hat{z} & (z<0) \end{cases}$$

各領域の電界はE1とE2の重ね合わせで与えられるので、

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} 0 & (z>d) \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}(-\hat{z}) & (0<z<d) \\ 0 & (z<0) \end{cases}$$

即ち、正負電極間に挟まれた領域だけに電界が生じ、電極の上下には電界が発生しない。
これはガウスの法則の問題②と同じ結果である。



# ガウスの法則の問題⑤

【例題】内導体の半径がa [m]、外導体の内半径がb [m]、外半径がc [m]の同心導体球がある。内導体に電荷Q [C]を与えたとき、導体球の電位を求めよ。(教科書、p.27)

【解答】半径r [m]の球面をガウス閉面にとると、ガウスの法則より

① r < a のとき

$$\oint_{S_1} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_1 = 0 \quad (1)$$

② a < r < b のとき

$$\oint_{S_2} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (2)$$

③ b < r < c のとき

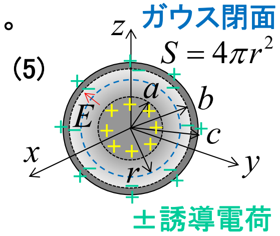
$$\oint_{S_3} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q-Q}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E_3 = 0 \quad (3)$$

④ r > cのとき

$$\oint_{S_4} \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_4 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (4)$$

これで各領域の電界が求まった。

次に電位を求める。




$$V = -\int_\infty^a \vec{E} \bullet d\vec{r} \quad (5)$$

$$= -\int_\infty^a E\hat{r} \bullet dr\hat{r}$$

$$= -\int_\infty^a Edr \quad (6)$$

$$= -\int_\infty^c E_4 dr - \int_c^b E_3 dr - \int_b^a E_2 dr \quad (7)$$

$$= -\int_\infty^c \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr - \int_b^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr \quad (8)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^c + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_b^a$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \quad [\mathrm{V}]$$

# ガウス閉面の取り方に関する考察

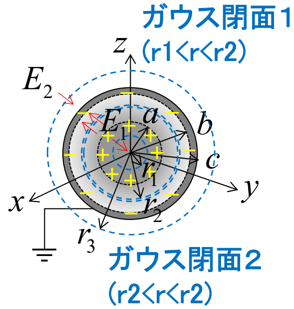
【例題】内導体の半径がa [m]、外導体の内半径がb [m]、外半径がc [m]の同心導体球がある。外導体球を接地して内導体に電荷Q [C]を与えたとき、導体球の電位を求めよ。この問題を二つのガウス閉面の重ね合わせの問題として計算してみる。

【解答】正電極を包むガウス閉面1および、負電極を包むガウス平面2の両方を考えると

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \oint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

右図のモデルでこれを解くと、ガウス平面1の内外に生じる電界E1および、ガウス平面2の内外に生じる電界E2は

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_1^2}(-\hat{r}) & (r < a) \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_2^2}\hat{r} & (r > a) \end{cases} \qquad \vec{E}_2 = \begin{cases} \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_2^2}\hat{r} & (r < b) \\ \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 r_3^2}(-\hat{r}) & (r > b) \end{cases}$$




各領域の電界はE1とE2の重ね合わせで与えられるので、

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & (a < r < b) \\ 0 & (r > b) \end{cases}$$

即ち、正負電極間に挟まれた領域だけに電界が生じ、電極の上下には電界が発生しない。これはガウスの法則の問題⑤で負電極を設置した場合と同じ結果である。



# ガウスの法則の問題⑦

【例題】半径a [m]の導体球が中心間隔d [m]で配置されている。±Q [C]が導体球表面に一様に分布しているとき、導体球を結ぶ直線上の任意の点の電界を求めよ。

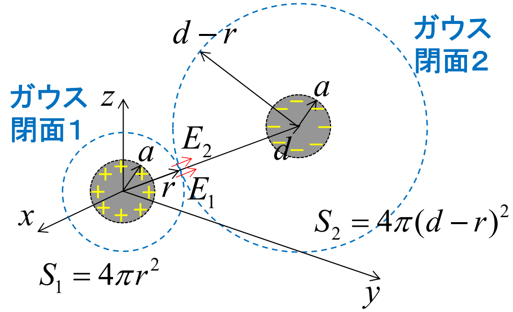
【解答】正電極を包むガウス閉面1および、負電極を包むガウス平面2の両方を考えると

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \oint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

右図のモデルでこれを解くと、ガウス平面1に生じる電界E1および、ガウス平面2に生じる電界E2は

$$\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (d-r)^2}\hat{r}$$




導体球間の電界はE1とE2の重ね合わせで与えられるので、

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (d-r)^2}\hat{r}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r-d)^2}\right\}\hat{r}$$



# ガウスの法則の問題⑥

【例題】半径a [m]の無限に長い2本の導体円筒が中心間隔d [m]で平行に配置されている。線電荷密度±λ [C/m]で正電荷と負電荷が一様に分布しているとき、導体円筒間の任意の点の電界を求めよ。

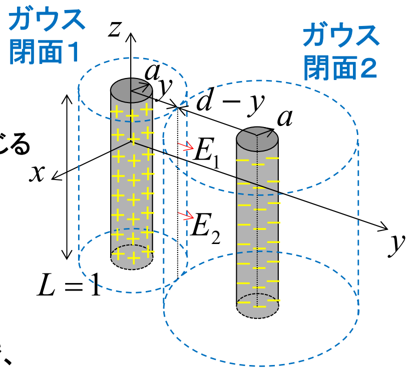
【解答】正電極を包むガウス閉面1および、負電極を包むガウス平面2の両方を考えると

$$\oint_{S_1} \vec{E}_1 \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \qquad \oint_{S_2} \vec{E}_2 \bullet d\vec{s} = -\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

右図のモデルでこれを解くと、ガウス平面1の側面に生じる電界E1および、ガウス平面2の側面に生じる電界E2は

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\hat{y}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-y)}\hat{y}$$




円筒間の電界はE1とE2の重ね合わせで与えられるので、

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}\hat{y} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d-y)}\hat{y}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y}\right)\hat{y} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-d}\right)\hat{y}$$



# ガウスの法則の適用手順(まとめ)

1. 積分路内部に電荷を含むように積分面Sを決める。積分面の方向は閉面の外向き方向を正とする。この際、電荷が作る電気力線を頭でイメージし、力線に沿った形に積分面を取る。例えば、電極形状が円筒形なら円筒状、球形なら球状、平面形なら直方体状の閉空間を考えるのが最も簡単。
2. **ベクトル積分方程式**をスカラー積分方程式にして難易度を1ランク下げる。さらに、電場が積分面上で一定である(ように積分面を1. で決定している)ことを利用して、**未知数を積分の外に出す**。これで積分を単なる積に置き換えて難易度をさらに1ランク下げる。
3. 方程式を解いて電界Eを求める。