帯電導体の電荷分布

1st. 2011/11/10
Lst. 2021/11/08

導体表面電荷密度と電界の関係

高さhで導体表面に垂直な面積Δsの円筒を
ガウス閉面に選ぶと、ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

微小円筒の高さhが小さければ側面から
電界は流出しないので

$$\int_{S_{\mathrm{upper}}} \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{\sigma\Delta s}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

微小面積Δsと電界Eの方向は同じ方向なので

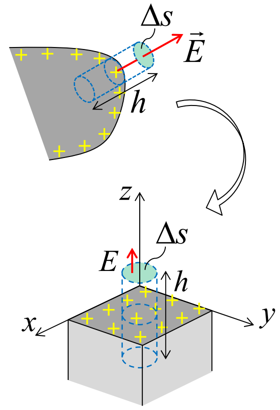
$$\int_{S_{\mathrm{upper}}} Eds\cos 0^\circ = \frac{\sigma\Delta s}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

微小面積Δs上の電界Eは一定の大きさなので

$$E\int_{S_{\mathrm{upper}}} ds = \frac{\sigma\Delta s}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

微小円筒上部の面積はΔsなので

$$E\Delta s = \frac{\sigma\Delta s}{\varepsilon_0} \quad (5)$$



従って，導体表面上の電界は

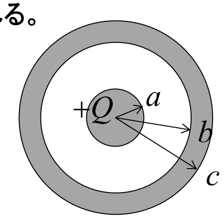
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ [\mathrm{V/m}] \quad (6)$$

帯電導体の電荷分布と電界①

【例題】二つの導体球のうち、内導体球にQ [C]の電荷を与えたとき、各部の電界と電位を求めよ。(教科書 p.27)

【解答】静電誘導により外導体に図のような電荷が誘起される。
半径rの球面にガウスの法則を適用すると、

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{S} = \begin{cases} 0 & r<a \\ Q/\varepsilon_0 & a<r<b \\ (Q-Q)/\varepsilon_0 & b<r<c \\ (Q-Q+Q)/\varepsilon_0 & r>c \end{cases} \quad (1)$$

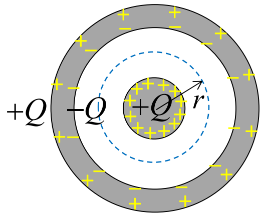


ここで左辺は、

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{S} = \oint_S Eds\cos 0^\circ = E\oint_S ds = E4\pi r^2 \quad (2)$$

従って
電界は、

$$E = \begin{cases} 0 & r<a \\ Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 & a<r<b \\ 0 & b<r<c \\ Q/4\pi\varepsilon_0 r^2 & r>c \end{cases} \quad (3)$$

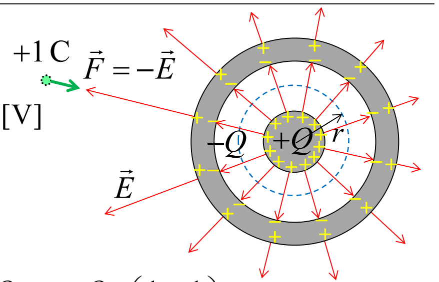


内導体は強制帯電、
外導体は静電誘導

帯電導体の電荷分布と電界②

【例題】二つの導体球のうち、内導体球にQ [C]の電荷を与えたとき、各部の電界と電位を求めよ。(教科書 p.27)

【続き】電位は、無限遠を基準として



① c<rのとき

$$V = -\int_\infty^r \vec{E}\bullet d\vec{r} = -\int_\infty^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad [\mathrm{V}]$$

② b<r<cのとき

$$V = -\int_\infty^c \vec{E}\bullet d\vec{r} - \int_c^r 0\bullet d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\quad [\mathrm{V}]$$

③ a<r<bのとき

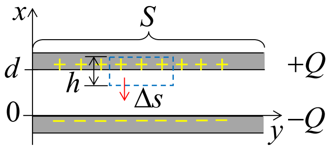
$$V = -\int_\infty^c \vec{E}\bullet d\vec{r} - \int_c^b 0\bullet d\vec{r} - \int_b^r \vec{E}\bullet d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right)\quad [\mathrm{V}]$$

④ r<aのとき

$$V = -\int_\infty^c \vec{E}\bullet d\vec{r} - \int_c^b 0\bullet d\vec{r} - \int_b^a \vec{E}\bullet d\vec{r} - \int_a^r 0\bullet d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\quad [\mathrm{V}]$$

帯電導体の電荷分布と電界③

【例題】面積S [m²]を有する2枚の平行平板導体を間隔d [m]で配置し、それぞれにQと−Qの電荷を与えるとき、導体間の電界と電位差を求めよ。（教科書 p.29）



【解答】高さhで導体表面に垂直な面積Δsの円筒をガウス閉面に選ぶと、ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

微小円筒の高さhが小さければ側面から電界は流出しないので

$$\int_{S_{\mathrm{lower}}} \vec{E}\bullet d\vec{s} = \frac{\sigma\Delta s}{\varepsilon_0}$$

微小面積Δsと電界Eの方向は同じ方向なので

$$\int_{S_{\mathrm{lower}}} Eds\cos 0^\circ = \frac{\sigma\Delta s}{\varepsilon_0}$$

微小面積Δs上の電界Eは一定の大きさなので

$$E\int_{S_{\mathrm{lower}}} ds = \frac{\sigma\Delta s}{\varepsilon_0}$$

微小円筒上部の面積はΔsなので

$$E\Delta s = \frac{\sigma\Delta s}{\varepsilon_0}$$

従って，導体表面上の電界は

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\ \mathrm{[V/m]}$$

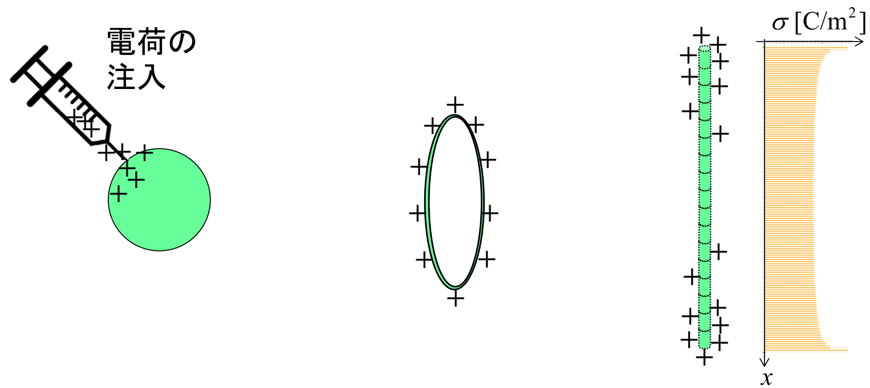
電位差は

$$V = -\int_0^d \vec{E}\bullet d\vec{x} = -\int_0^d\left(-\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)dx = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}\,\mathrm{[V]}$$

$$\because\ \vec{E}\bullet d\vec{x} = Edx\cos 180^\circ = -Edx$$

帯電導体の電荷分布

【例題】次のケースで、電荷はどのように分布するか？



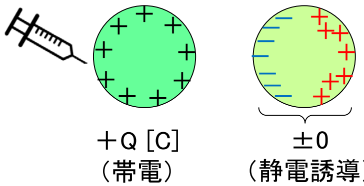
(1) 導体球
または導体球殻

(2)導体円環

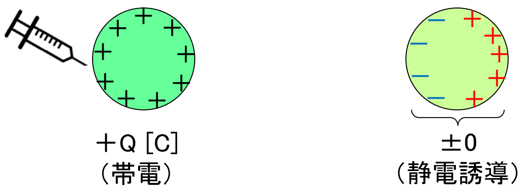
(3)導体棒

Answer：(1) クーロン力によって互いに反発するため、導体球表面に電荷が集中する。(2) 同じ理由で円環の外周に均一に分布する。(3) 同じ理由で導体棒のエッジに集中する。（均一にはならない。）

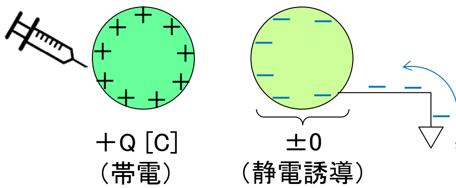
静電誘導（復習）



帯電導体と誘導導体が近いとき



帯電導体と誘導導体が離れるとき



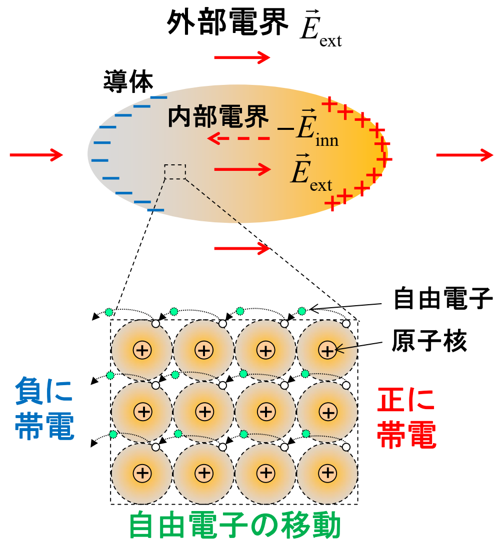
誘導導体がアースされているとき

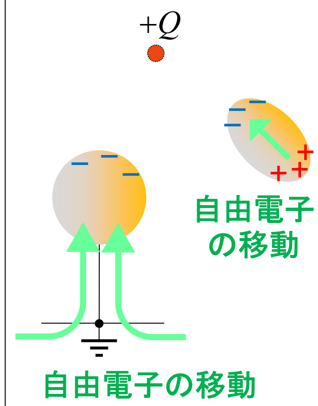
地球は我々よりも非常に大きいので、多少の電荷を供給しても、裏側に電荷の不足は起きない。

無限の電荷供給源
（アース）

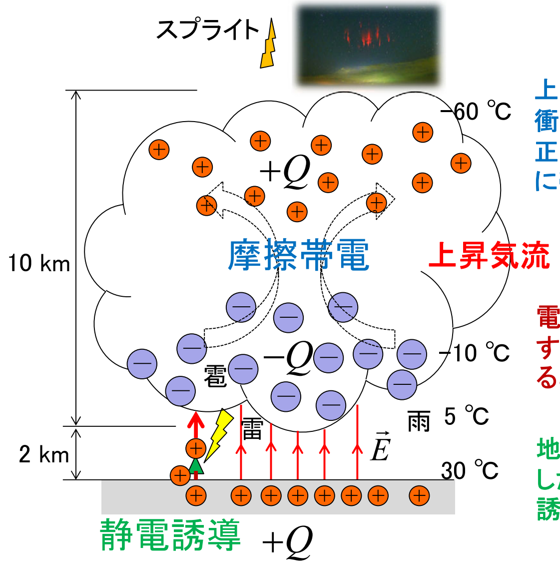
静電誘導（復習）

外部電界と内部電界の打消しにより、導体内部では<u>電界ゼロ</u>





静電誘導の例



上昇する小さい氷の結晶(粒)は衝突によって電子が叩き出されて正に帯電し、落下する雹(塊)は負に帯電する。(摩擦帯電)

電荷はお互いにクーロン力で反発するので、地表に尖ったものがあると、電荷が蓄積しやすい。

地上表面には雲の下層部に蓄積した負電荷に誘発されて正電荷が誘導される。(静電誘導)

紙田, ``改訂版 やさしい電気の手ほどき'' pp. 24-25, 電気書院 より引用　　Discovery Channel, 災害警報 稲妻

導体と静電界の関係(まとめ)

$$\vec{E}_{\text{ext}} = -\vec{E}_{\text{inn}} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_{\text{inn}} = 0 \qquad (1)$$

$$\vec{E} = -\nabla V = 0, \quad \Rightarrow \quad V = \text{Const.} \qquad (2)$$

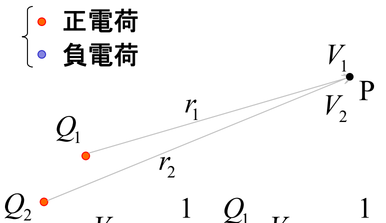
$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = (+Q - Q)/\varepsilon_0 = 0 \qquad (3)$$

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = +Q/\varepsilon_0 \qquad (4)$$

$$\sigma = \varepsilon_0 E \qquad (5)$$

(1) 外部電界と内部電界の打消しによって、導体内部では電界はゼロになる。
(2) 導体内部の電界(電位の勾配)はゼロなので、導体内部ではあらゆる点で等電位となる。
(3) 導体内部では正電荷と負電荷が釣合って、正味の電荷が存在しない。(ガウスの法則から、電荷密度はゼロ)
(4) 導体を外部電界にさらすと、静電誘導により電荷は導体表面のみに分布しているように見える。
(5) 導体表面では電界Eは表面に直交し、表面電荷密度σ[C/m^2]との間にσ=ε$_0$Eの関係を有する。

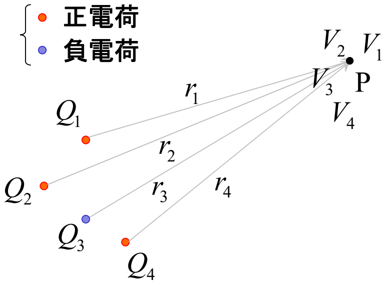
点電荷が作る電位の重ね合わせ



$$V_{\text{P}} = V_1 + V_2$$

$$V_{\text{P}} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} \qquad (2)$$

$$V_{\text{P}_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r_1}, V_{\text{P}_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} \qquad (1)$$



$$V_{\text{P}} = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_{\text{P}} = \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_i}{r_i} \qquad (3)$$

電位の重ね合わせ

i 番目の電荷 [C]

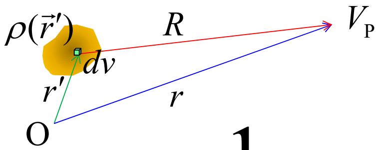
$$V_{\text{P}} = \sum_i \frac{1}{\underbrace{4\pi\varepsilon_0}_{\text{比例定数}}} \frac{Q_i}{r_i}$$

比例定数

点電荷から観測点Pまでの距離 [m]

任意点の電位は、点電荷Qが作る電位の重ね合わせで表現される

電位の総和(一般化)



位置rにおける電位 [V]

位置r' における電荷密度 [C/m³]

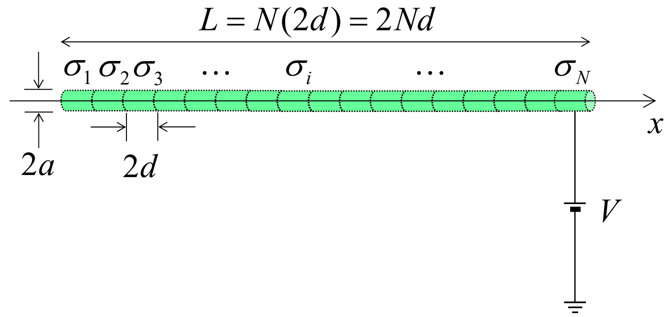
$$V_P(\vec{r}) = \underbrace{\int_V}_{\text{重ね合わせ領域}} \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\text{比例定数}} \frac{\rho(\vec{r}')}{R} dv$$

点電荷から観測点Pまでの距離 [m]

任意点の電位は、微小電荷ρ dvが作る電位の積分で表現される

電荷分布の計算モデル

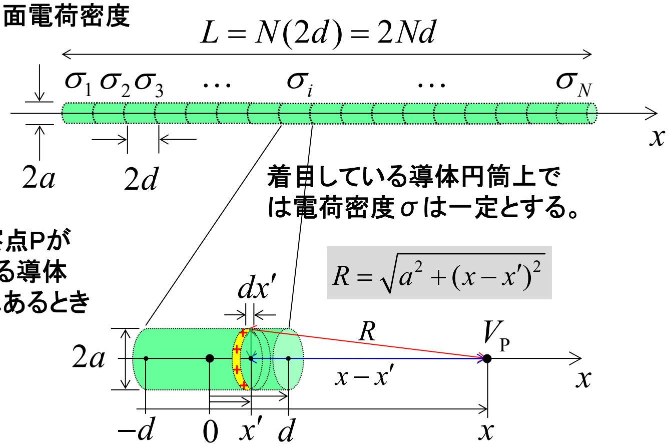
【演習2】長さ1 mの導体棒に1 Vの電圧を加えたとき、導体上の電荷密度分布σ[C/m²]を求めよ。ただし, 導体半径はa=1 mm とせよ。分割幅は各自で決めよ。



N. N. Rao, "Elements of Engineering Electromagnetics Sixth ed.," p. 741, Pearson Prentice Hall
J. D. Kraus, D. A. Fleisch, "Electromagnetics with applications Fifth ed.," pp.558-559, McGraw-Hill
依田, Mathematicaによる電磁界シミュレーション入門, 森北出版

問題の定式化1

$\sigma[\mathrm{C/m^2}]$ 面電荷密度

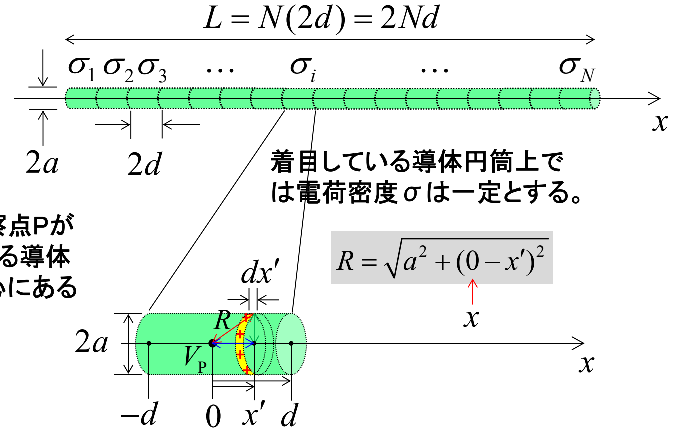


電位の観察点Pが着目している導体円筒の外にあるとき

$$V_P = \int_{x'=-d}^{d} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma_i}{R} a\, d\varphi\, dx' \quad (1)$$

x=0とすれば、着目している円筒導体が自身の中心に作る電位になる。

問題の定式化2



電位の観察点Pが着目している導体円筒の中心にあるとき

$$V_P = \int_{x'=-d}^{d} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma_i}{r} a\, d\varphi\, dx' \quad (2)$$

観察点Pにおける電位は、常に波源からズレていることがポイント。これによって特異点(電位が発散する点)を避けて計算ができる。

問題の定式化3（解析的な積分）

電位を求める積分は以下のようにして計算できる。

$$V_{\mathrm{P}} = \int_{x'=-d}^{d}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma_i}{R}a\,d\varphi\,dx' \qquad (1)$$

未知数は積分記号内の面電荷密度σ（積分方程式と呼ぶ）

$$= \frac{\sigma_i}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi\int_{x'=-d}^{d}\frac{1}{\sqrt{a^2+(x-x')^2}}dx'$$

$$= \frac{2\pi\sigma_i a}{4\pi\varepsilon_0}\boxed{\int_{x'=-d}^{d}\frac{1}{\sqrt{a^2+(x-x')^2}}dx'} \Rightarrow$$

積分公式

$$\boxed{\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C} \qquad (2)$$

$$= \frac{\sigma_i a}{2\varepsilon_0}\left[-\ln\left\{(x-x')+\sqrt{a^2+(x-x')^2}\right\}\right]_{x'=-d}^{d}$$

$$= \sigma_i\frac{a}{2\varepsilon_0}\ln\frac{x+d+\sqrt{a^2+(x+d)^2}}{x-d+\sqrt{a^2+(x-d)^2}}$$

$$= \sigma_i f(x)$$

下の式でx=0とすれば、電位の観察点が着目している導体円筒の中心にあるときでも使える。

ただし、f(x)を右のように置いた。

$$f(x) = \frac{a}{2\varepsilon_0}\ln\frac{x+d+\sqrt{a^2+(x+d)^2}}{x-d+\sqrt{a^2+(x-d)^2}} \qquad (3)$$

電磁気学でよく使う積分公式

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C \quad \cdots(1)$$ を証明せよ。

$$f(x) = x+\sqrt{a^2+x^2},\quad f'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$ と置くと、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

もとの式の分子・分母に $x+\sqrt{a^2+x^2}$ を掛けると、

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}dx$$

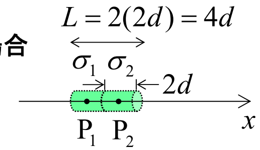
$$= \int\frac{\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int\frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$$

証明終わり。

問題の定式化4（連立方程式）

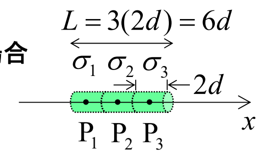
N=2の場合



$$\begin{cases} V_{\mathrm{P}_1} = \sigma_1 f(0)+\sigma_2 f(-2d) \\ V_{\mathrm{P}_2} = \sigma_1 f(2d)+\sigma_2 f(0) \end{cases} \qquad (1)$$

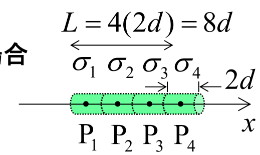
観測点P_1に作られる電位は、σ_1が自分の中心に作る電位と、σ_2が−2d離れた位置に作る電位の和で表される。

N=3の場合



$$\begin{cases} V_{\mathrm{P}_1} = \sigma_1 f(0)+\sigma_2 f(-2d)+\sigma_3 f(-4d) \\ V_{\mathrm{P}_2} = \sigma_1 f(2d)+\sigma_2 f(0)+\sigma_3 f(-2d) \\ V_{\mathrm{P}_3} = \sigma_1 f(4d)+\sigma_2 f(2d)+\sigma_3 f(0) \end{cases} \qquad (2)$$

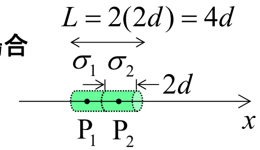
N=4の場合



$$\begin{cases} V_{\mathrm{P}_1} = \sigma_1 f(0)+\sigma_2 f(-2d)+\sigma_3 f(-4d)+\sigma_4 f(-6d) \\ V_{\mathrm{P}_2} = \sigma_1 f(2d)+\sigma_2 f(0)+\sigma_3 f(-2d)+\sigma_4 f(-4d) \\ V_{\mathrm{P}_3} = \sigma_1 f(4d)+\sigma_2 f(2d)+\sigma_3 f(0)+\sigma_4 f(-2d) \\ V_{\mathrm{P}_4} = \sigma_1 f(6d)+\sigma_2 f(4d)+\sigma_3 f(2d)+\sigma_4 f(0) \end{cases} \qquad (3)$$

問題の定式化5（マトリクス表示）

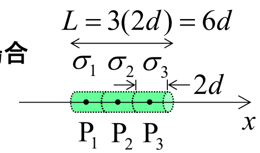
N=2の場合



$$\begin{bmatrix} f(0) & f(-2d) \\ f(2d) & f(0) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{\mathrm{P}_1} \\ V_{\mathrm{P}_2} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

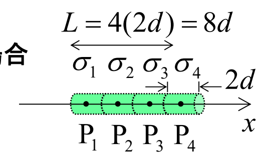
[ ]は行列、{ }は列ベクトルを示す。行列には一定の規則性があることが分かる。

N=3の場合



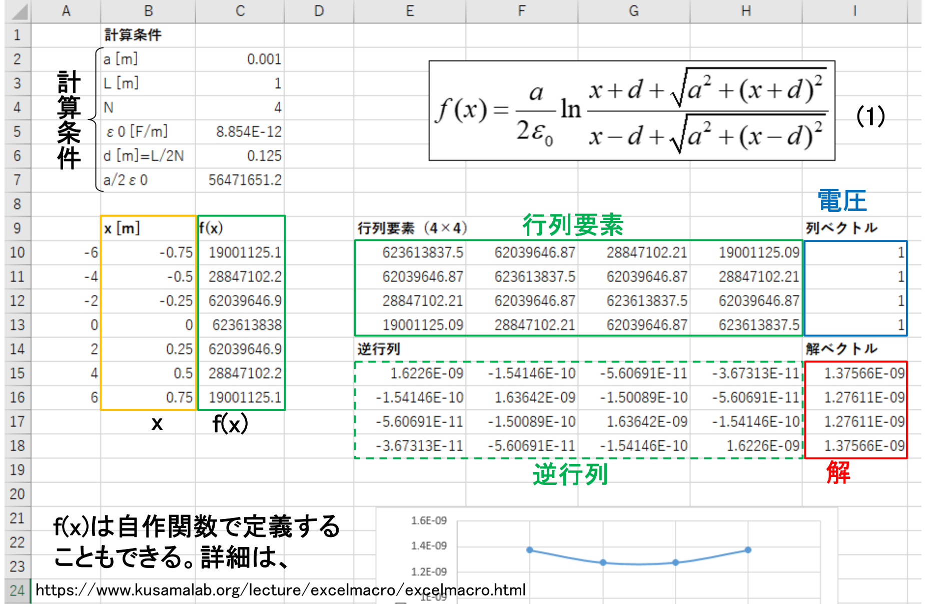
$$\begin{bmatrix} f(0) & f(-2d) & f(-4d) \\ f(2d) & f(0) & f(-2d) \\ f(4d) & f(2d) & f(0) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{\mathrm{P}_1} \\ V_{\mathrm{P}_2} \\ V_{\mathrm{P}_3} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

N=4の場合



$$\begin{bmatrix} f(0) & f(-2d) & f(-4d) & f(-6d) \\ f(2d) & f(0) & f(-2d) & f(-4d) \\ f(4d) & f(2d) & f(0) & f(-2d) \\ f(6d) & f(4d) & f(2d) & f(0) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_{\mathrm{P}_1} \\ V_{\mathrm{P}_2} \\ V_{\mathrm{P}_3} \\ V_{\mathrm{P}_4} \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

計算手順の一例（N=4の場合）

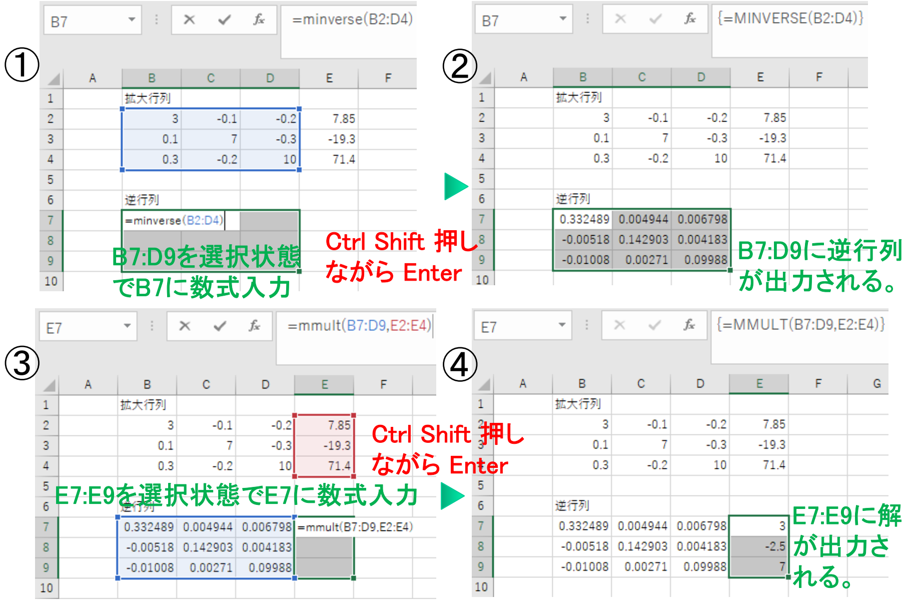

計算条件

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		計算条件							
2		a [m]	0.001						
3		L [m]	1						
4		N	4						
5		ε 0 [F/m]	8.854E-12						
6		d [m]=L/2N	0.125						
7		a/2 ε 0	56471651.2						
8									
9		x [m]	f(x)		行列要素（4×4）				列ベクトル
10	-6	-0.75	19001125.1		623613837.5	62039646.87	28847102.21	19001125.09	1
11	-4	-0.5	28847102.2		62039646.87	623613837.5	62039646.87	28847102.21	1
12	-2	-0.25	62039646.9		28847102.21	62039646.87	623613837.5	62039646.87	1
13	0	0	623613838		19001125.09	28847102.21	62039646.87	623613837.5	1
14	2	0.25	62039646.9		逆行列				解ベクトル
15	4	0.5	28847102.2		1.6226E-09	-1.54146E-10	-5.60691E-11	-3.67313E-11	1.37566E-09
16	6	0.75	19001125.1		-1.54146E-10	1.63642E-09	-1.50089E-10	-5.60691E-11	1.27611E-09
17					-5.60691E-11	-1.50089E-10	1.63642E-09	-1.54146E-10	1.27611E-09
18					-3.67313E-11	-5.60691E-11	-1.54146E-10	1.6226E-09	1.37566E-09

$$f(x)=\frac{a}{2\varepsilon_0}\ln\frac{x+d+\sqrt{a^2+(x+d)^2}}{x-d+\sqrt{a^2+(x-d)^2}} \quad (1)$$

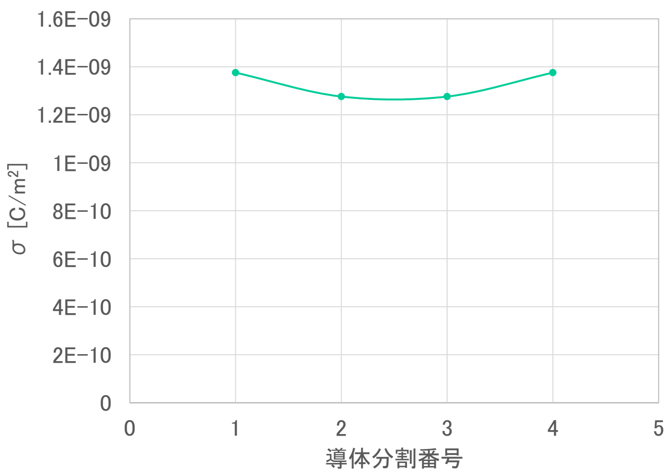
f(x)は自作関数で定義することもできる。詳細は、
https://www.kusamalab.org/lecture/excelmacro/excelmacro.html

Excelによる連立方程式の解法



計算結果（N=4の場合）

【解答例】 エクセルを使って数式を入力し、計算結果を描画する。



電荷分布の計算結果

【解答例】 Mathematica でプログラミングした結果