

# 目次

第 1 章	電気ダイポールと電界	3
1.1	電気ダイポール	4
1.1.1	余弦定理	4
1.1.2	球座標における勾配	5
1.1.3	遠方近似表現	6
1.1.4	遠方近似ダイポール条件のまとめ	7
1.1.5	多項式による厳密解	8
1.1.6	デカルト座標における厳密解	9

## 1.1 電気ダイポール

図 1.1 に原点近傍に配置された電荷と観測点 P の位置関係を示す。電荷が一つの場合をモノポール、2つの場合をダイポール、4つの場合を4重極、8個の場合を8重極と呼び、一般化したものを多重極と呼ぶ。電荷が1つの場合は既にクーロンの法則で説明しているので、ここでは最も基本的かつ応用性の高いダイポールについて調べる。図 1.1 に右上のダイポールにおいて、P 点の電位（ポテンシャル）は点電荷の重ね合わせより式 (1.1) となる。

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.1)$$

ここで、点電荷から観測点までの距離  $r_1$  と  $r_2$  を原点からの距離  $r$  と  $z$  軸からの傾斜角度  $\theta$  のみで表現することを考える\*1。余弦定理を使えば、 $r_1$  と  $r_2$  は原点を基準にした関数  $(r, \theta)$  によって次式 (1.2) および式 (1.3) になる\*2。

$$r_1 = \sqrt{r^2 - rl \cos \theta + (l/2)^2} \quad (1.2)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + rl \cos \theta + (l/2)^2} \quad (1.3)$$

一方、電界は電位の勾配より式 (1.4) となる\*3。

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad} V = -\nabla V = -\left( \frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) \\ &= -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (1.4)$$

### 1.1.1 余弦定理

図 1.2 左において、右上の直角三角形に三平方の定理を使えば

$$r_1^2 = \left( \frac{l}{2} \sin \theta \right)^2 + \left( r - \frac{l}{2} \cos \theta \right)^2 = r^2 + \left( \frac{l}{2} \right)^2 - rl \cos \theta \quad (1.5)$$

となる。従って、 $r_1$  は次式となる。

$$r_1 = \sqrt{r^2 - rl \cos \theta + (l/2)^2} = r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos \theta + \left( \frac{l}{2r} \right)^2} \quad (1.6)$$

同様にして、図 1.2 右において、外側の直角三角形に三平方の定理を使えば

$$r_2^2 = \left( r + \frac{l}{2} \cos \theta \right)^2 + \left( \frac{l}{2} \sin \theta \right)^2 = r^2 + \left( \frac{l}{2} \right)^2 + rl \cos \theta \quad (1.7)$$

となる。従って、 $r_2$  は次式となる。

$$r_2 = \sqrt{r^2 + rl \cos \theta + (l/2)^2} = r \sqrt{1 + \frac{l \cos \theta}{r} + \left( \frac{l}{2r} \right)^2} \quad (1.8)$$

\*1  $r_1$  と  $r_2$  を  $x, y, z$  座標で表現すると、 $\vec{r}_1 = (x, y, z - l/2)$ ,  $\vec{r}_2 = (x, y, z + l/2)$  となるが、変数が増えて式の見通しが良くないというデメリットがある。

\*2 余弦定理の導出については次節で説明する。

\*3 極座標系における勾配の式については次々節で説明する。

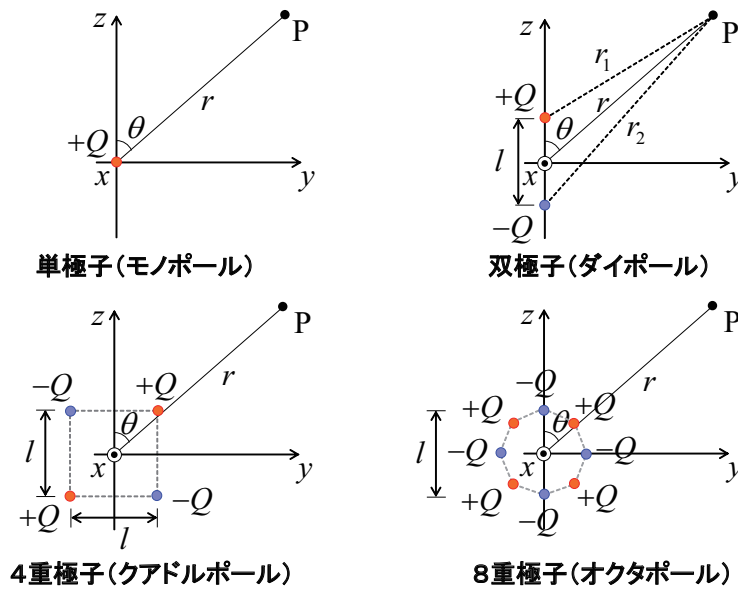


図 1.1 原点近傍の電荷と観測点 P との関係

これで  $r_1$  と  $r_2$  を原点からの距離  $r$  と  $z$  軸からの角度  $\theta$  のみで表現することができた。式 (1.6) と式 (1.8) を式 (1.1) に代入すれば、P 点の電位  $V$  を原点からの距離  $r$  と角度  $\theta$  のみで簡易的に表現できる。

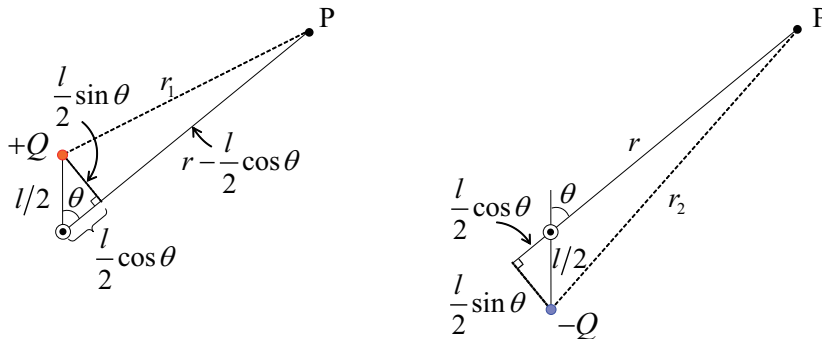


図 1.2 余弦定理

### 1.1.2 球座標における勾配

デカルト座標  $(x, y, z)$  直角座標) における勾配は次式 (1.9) で与えられた。

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.9)$$

これを図 1.3 に示す球座標における勾配に置き換えると次式 (1.10) となる。

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{\partial V}{\partial l_\theta} - \hat{\varphi} \frac{\partial V}{\partial l_\varphi} \quad (1.10)$$

球座標における独立変数  $\theta, \varphi$  は長さの単位 [m] ではないので、長さ  $l_\theta, l_\varphi$  にすると

$$dl_\theta = r d\theta, \quad dl_\varphi = r \sin \theta d\varphi \quad (1.11)$$

であるから、式 (1.10) の右辺第 2 項目の偏微分  $\partial V/\partial l_\theta$  は

$$\frac{\partial V}{\partial l_\theta} \equiv \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{V(r, \theta + \Delta\theta, \varphi) - V(r, \theta, \varphi)}{r\Delta\theta} = \frac{\partial V}{r\partial\theta} \quad (1.12)$$

同様にして、式 (1.10) の右辺第 3 項目の偏微分  $\partial V/\partial l_\varphi$  は

$$\frac{\partial V}{\partial l_\varphi} \equiv \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{V(r, \theta, \varphi + \Delta\varphi) - V(r, \theta, \varphi)}{r \sin\theta \Delta\varphi} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial\varphi} \quad (1.13)$$

となる。従って、球座標における勾配は次式 (1.14) となる。

$$\vec{E} = -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial\theta} - \hat{\varphi} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial V}{\partial\varphi} \quad (1.14)$$

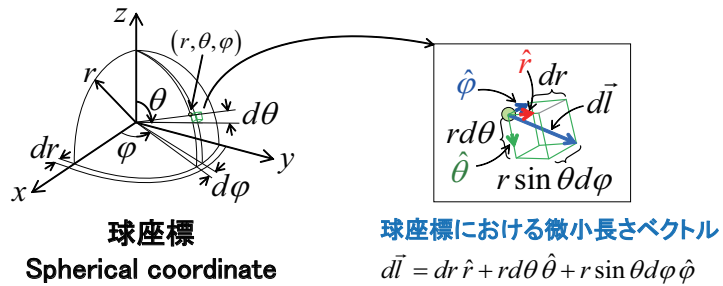


図 1.3 球座標系

### 1.1.3 遠方近似表現

図 1.1 右上および、図 1.2 において、 $l \ll r$  のとき、式 (1.6) と式 (1.8) は、それぞれ次式 (1.15) 式 (1.16) のように近似することができる。

$$r_1 = \sqrt{r^2 - rl \cos\theta + (l/2)^2} = r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos\theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \simeq r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos\theta} \quad (1.15)$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + rl \cos\theta + (l/2)^2} = r \sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos\theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \simeq r \sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos\theta} \quad (1.16)$$

従って、式 (1.1) における距離減衰項の重ね合わせは、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos\theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} - \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos\theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} \\ &\simeq \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos\theta}} - \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos\theta}} \\ &= \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{r} \cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{r} \cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$x \ll 1$  のとき、 $(1+x)^n \simeq 1+nx$  を使って\*4(1.17) をさらに近似すると

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{2r} \cos\theta\right) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{2r} \cos\theta\right) = \frac{l}{r^2} \cos\theta \quad (1.18)$$

\*4  $f(x) = (1+x)^n$  とおくと、マクローリン級数展開より  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \dots$

従って、最終的に電気ダイポールが作るポテンシャルは次式 (1.19) となる。

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^2} \cos\theta \quad (1.19)$$

#### 1.1.4 遠方近似ダイポール条件のまとめ

以上を整理すると、図 1.1 右上のように、 $l \ll r$  の遠方条件が成立する場合の電気ダイポールの電位  $V$  は

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^2} \cos\theta \quad (1.20)$$

となり、その電界は極座標系で

$$E_r = \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^3} \quad (1.21)$$

$$E_\theta = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} \quad (1.22)$$

$$E_\varphi = 0 \quad (1.23)$$

で与えられることがわかる。なお、外部電界  $\vec{E}$  を加えたときのトルク  $\vec{N}$  は

$$\vec{N} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (1.24)$$

で与えられ、電気ダイポールモーメント  $\vec{p}$  は

$$\vec{p} = Q\vec{l} \quad (1.25)$$

となる。比較のために、図 1.1 左上のように、電気モノポールが作る電位は近似条件なしで

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1.26)$$

となり、その電界は極座標系で

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad (1.27)$$

$$E_\theta = 0 \quad (1.28)$$

$$E_\varphi = 0 \quad (1.29)$$

となる。電気モノポールには外部電界  $\vec{E}$  を加えたときにクーロン力  $\vec{F} = q\vec{E}$  ははたらくが、トルクは生じない。つまり、電気ダイポールモーメントという概念は存在しない。所で、式 (1.20) と式 (1.26) の電位  $V$  を比較すると、電気ダイポールはモノポールに比べて  $1/r^2$  で減衰し、式 (1.21) および式 (1.22) と式 (1.27) の電界  $\vec{E}$  を比較すると、電気ダイポールはモノポールに比べて  $1/r^3$  で減衰することに注意が必要である。モノポールに比べてダイポールの距離減衰が大きい理由は次のように説明できる。図 1.1 右上において、P 点の電位は近傍にある負電荷  $-Q$  [C] の存在によって正電荷  $+Q$  [C] が作る電位が打ち消される。モノポールでは電位の打ち消しが起きないので、電位の減衰は単独電荷  $+Q$  [C] によるものだけである\*5。

\*5 同じように考えると、極数が増えるほど単独の電荷  $+Q$  [C] の電位を打ち消す負電荷の数が増えるため、電位の距離減衰が激しくなる。このとき、電位を互いに強め合う正電荷の数も増えるが、打ち消しあいを生じる負電荷との距離の方が近い。

## 1.1.5 多項式による厳密解

今度は、式 (1.1) において  $l \ll r$  の遠方近似条件を使わずに  $(r, \theta)$  のみの関数で表現する方法を考える。まず、次式 (1.30)

$$G_L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}, \quad |t| < 1, \quad |x| < 1 \quad (1.30)$$

をルジャンドル多項式の母関数と呼ぶ。そして、この母関数は次式 (1.31)

$$G_L(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1, \quad |x| < 1 \quad (1.31)$$

で展開することができる\*6。ここで、

$$t = \frac{l}{2r}, \quad x = \cos \theta \quad (1.32)$$

とおくと\*7

$$\begin{aligned} G_L\left(\cos \theta, \frac{l}{2r}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{2r}\right)^2 - 2\cos \theta\left(\frac{l}{2r}\right) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l}{r}\cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta)\left(\frac{l}{2r}\right)^n \end{aligned} \quad (1.33)$$

となる。一方、式 (1.30) と式 (1.31) において

$$t = \frac{-l}{2r}, \quad x = \cos \theta \quad (1.34)$$

とおくと

$$\begin{aligned} G_L\left(\cos \theta, \frac{-l}{2r}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{2r}\right)^2 + 2\cos \theta\left(\frac{l}{2r}\right) + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{l}{r}\cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta)\left(\frac{-l}{2r}\right)^n \end{aligned} \quad (1.35)$$

となる。ただし、 $P_n(\cos \theta)$  は第1種帯球関数またはルジャンドルの多項式と呼ばれ、次式 (1.36) で与えられる。

$$\begin{aligned} P_n(\cos \theta) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left\{ 2\cos n\theta + 2\frac{1 \cdot n}{1 \cdot (2n-1)} \cos(n-2)\theta \right. \\ &\quad \left. + 2\frac{1 \cdot 3 \cdot n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot (2n-1)(2n-3)} \cos(n-4)\theta + \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.36)$$

式 (1.33) と式 (1.35) の関係を式 (1.1) の距離減衰項の重ね合わせに代入すると、

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{l}{r}\cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} - \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{l}{r}\cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}}$$

\*6 アルフケン、基礎物理数学第4版 特殊関数, pp.121-125, 講談社

\*7 この条件は、 $l/2 < r$  となる。即ち、原点 O を中心として 2つの点電荷  $\pm Q$  を含む半径  $l/2$  の球の外側に観測点 P があることを示すもので、 $l/2 > r$  の場合には成立しないことに注意が必要である。

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left( \frac{-l}{2r} \right)^n \right) \\
&= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) P_n(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^n \\
&= \frac{1}{r} \left( 0 + 2P_1(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right) + 0 + 2P_3(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^3 + \dots \right) \\
&= \frac{2}{r} \left( P_1(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right) + P_3(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^3 + P_5(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^5 + \dots \right) \quad (1.37)
\end{aligned}$$

が得られる。従って、近似を含まないポテンシャルは

$$\begin{aligned}
V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\
&= \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( P_1(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right) + P_3(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^3 + P_5(\cos \theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^5 + \dots \right) \quad (1.38)
\end{aligned}$$

と表現することができる。仮に式 (1.41) を第 1 項で打ち切ると、式 (1.36) より

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta \quad (1.39)$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta) \quad (1.40)$$

...

であるから\*8,

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^2} \cos \theta \quad (1.41)$$

となる。これは電気ダイポールの  $l \ll r$  の遠方近似式 (1.20) に一致する。つまり、電気ダイポールの遠方近似式は式 (1.41) の多項式を第 1 項だけで打ち切ったことを意味している。しかし、この多項式も厳密ではなく、 $r < l/2$  では成立しないことに注意が必要である。

### 1.1.6 デカルト座標における厳密解

最後に、デカルト座標における厳密解について求めておく。近似を含まない電位の重ね合わせの式は

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.42)$$

であった。ここで、簡単のために図 1.4 に示すように  $z = 0$  として座標系を  $x, y$  平面内に限定して考える。

$$r_1 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2} \quad (1.43)$$

$$r_2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2} \quad (1.44)$$

デカルト座標で電界  $E_x$  を求めると

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1.45)$$

\*8 寺沢, 自然科学のための数学概論, p.400, 岩波書店

であるから,

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-r_1'}{r_1^2} - \frac{-r_2'}{r_2^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-d}{r_1^3} - \frac{x+d}{r_2^3} \right) \end{aligned} \quad (1.46)$$

となる。ただし,  $r_1'$  と  $r_2'$  は次式 (1.47) と次式 (1.48) である。

$$\begin{aligned} r_1' &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x-d)^2 + y^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{2} \left\{ (x-d)^2 + y^2 \right\}^{-1/2} 2(x-d) \\ &= \frac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} = \frac{x-d}{r_1} \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} r_2' &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (x+d)^2 + y^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{2} \left\{ (x+d)^2 + y^2 \right\}^{-1/2} 2(x+d) \\ &= \frac{x+d}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} = \frac{x+d}{r_2} \end{aligned} \quad (1.48)$$

同様にして, デカルト座標で電界  $E_y$  を求めると

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-r_1'}{r_1^2} - \frac{-r_2'}{r_2^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{r_1^3} - \frac{y}{r_2^3} \right) \end{aligned} \quad (1.49)$$

となる。ただし,  $r_1'$  と  $r_2'$  は次式 (1.50) と次式 (1.51) である。

$$\begin{aligned} r_1' &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (x-d)^2 + y^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{2} \left\{ (x-d)^2 + y^2 \right\}^{-1/2} 2y \\ &= \frac{y}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} = \frac{y}{r_1} \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\begin{aligned} r_2' &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (x+d)^2 + y^2 \right\}^{1/2} = \frac{1}{2} \left\{ (x+d)^2 + y^2 \right\}^{-1/2} 2y \\ &= \frac{y}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} = \frac{y}{r_2} \end{aligned} \quad (1.51)$$

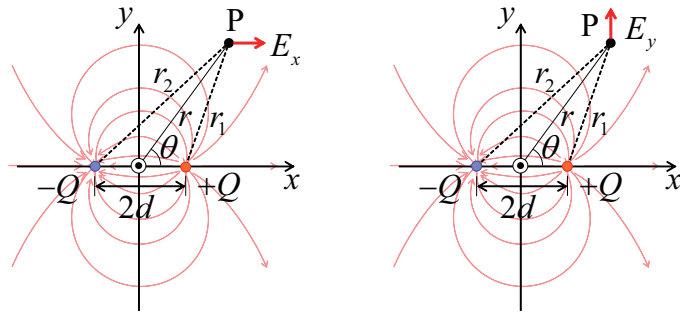


図 1.4 デカルト座標における厳密解