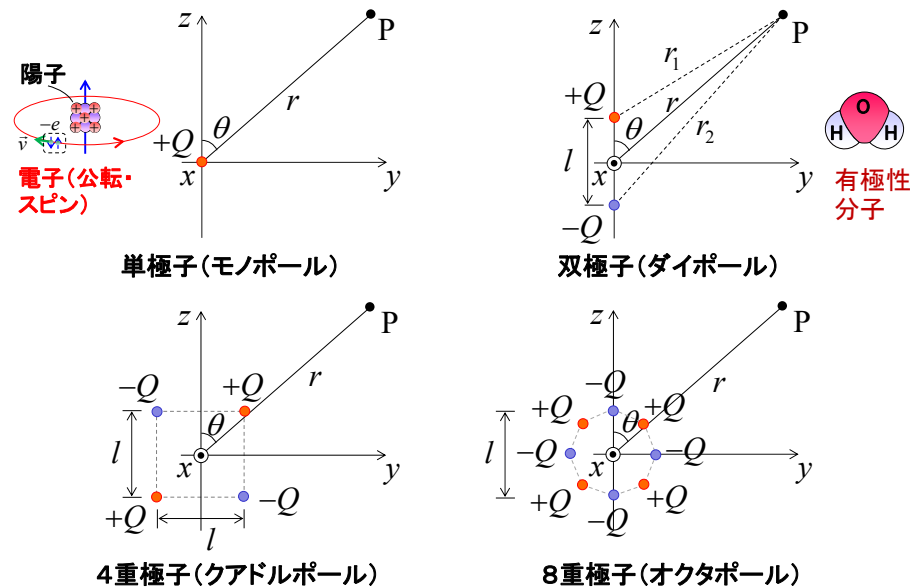


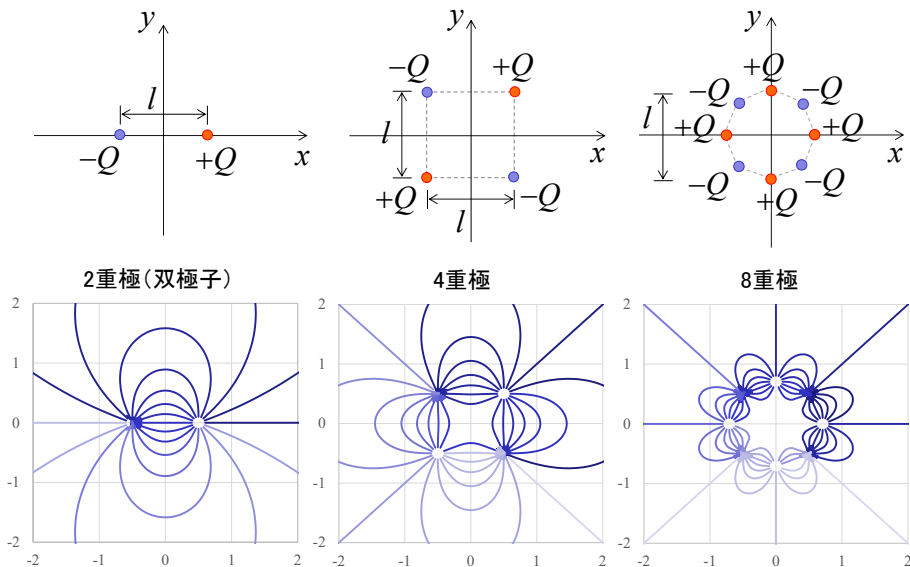
# 電気ダイポールと 電気二重層

1st. 2016/05/10  
Lst. 2021/11/07

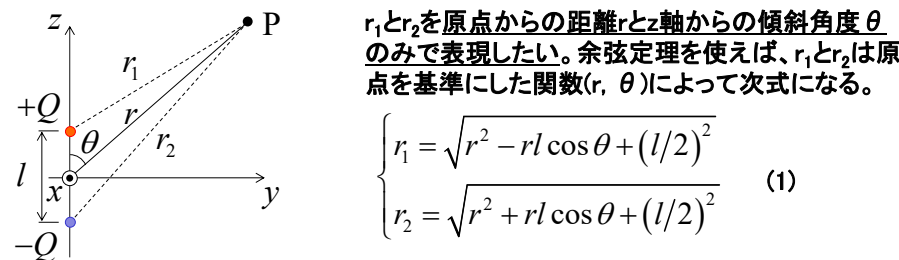
# 単極子と多重極子



# 電気力線の描画例



# 電気ダイポール



電位 (ポテンシャル) は点電荷の重ね合わせより

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2)$$

電界は電位の勾配より

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad} V = -\nabla V = -\left( \frac{\partial V}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) \\ &= -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (3)$$

# 余弦定理(復習)

$$\left\{ \begin{aligned} r_1^2 &= \left(\frac{l}{2} \sin \theta\right)^2 + \left(r - \frac{l}{2} \cos \theta\right)^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 - rl \cos \theta \\ r_1 &= \sqrt{r^2 - rl \cos \theta + (l/2)^2} = r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_2^2 &= \left(r + \frac{l}{2} \cos \theta\right)^2 + \left(\frac{l}{2} \sin \theta\right)^2 = r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 + rl \cos \theta \\ r_2 &= \sqrt{r^2 + rl \cos \theta + (l/2)^2} = r \sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2} \end{aligned} \right. \quad (5)$$

# 球座標における勾配

デカルト座標における勾配

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (6)$$

球座標における微小長さベクトル

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

球座標における勾配

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{\phi} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (7)$$

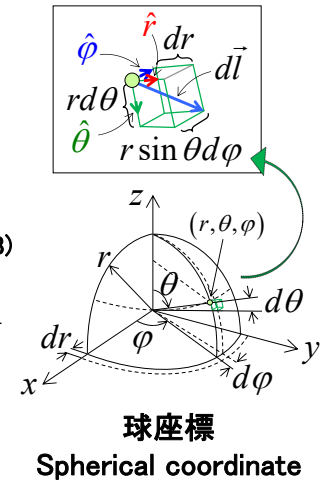
θとφは長さの単位ではないので、長さにすると  $dl_\theta = r d\theta$ ,  $dl_\phi = r \sin \theta d\phi$  であるから

$$\left\{ \frac{\partial V}{\partial l_\theta} \equiv \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{V(r, \theta + \Delta\theta, \phi) - V(r, \theta, \phi)}{r \Delta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right. \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial l_\phi} \equiv \lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{V(r, \theta, \phi + \Delta\phi) - V(r, \theta, \phi)}{r \sin \theta \Delta\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \right. \quad (9)$$

従って、球座標における勾配は

$$\vec{E} = -\hat{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \hat{\phi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (10)$$



# 遠方近似表現

$$\left\{ \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 - rl \cos \theta + (l/2)^2} = r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2} = r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos \theta} \\ r_2 &= \sqrt{r^2 + rl \cos \theta + (l/2)^2} = r \sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2} = r \sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos \theta} \end{aligned} \right. \quad (11)$$

距離減衰項の重ね合わせは、

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r \sqrt{1 - \frac{l}{r} \cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} - \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{l}{r} \cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} \quad \text{2乗の項を無視して近似すると}$$

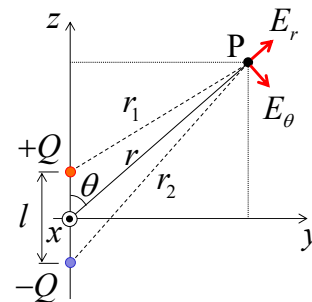
$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{l}{2r} \cos \theta\right) - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{l}{2r} \cos \theta\right) = \frac{l}{r^2} \cos \theta \quad \text{x \ll 1 のとき, (1+x)^n \approx 1+nx を使ってさらに近似すると} \quad (13)$$

最終的に電気双極子がr離れた位置に作るポテンシャルは、

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^2} \cos \theta \quad (14)$$

# 電気双極子の遠方近似表現



双極子(ダイポール)

電位

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^2} \cos \theta \quad (1)$$

電界

$$E_r = \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (2)$$

$$E_\theta = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (3)$$

$$E_\phi = 0 \quad (4)$$

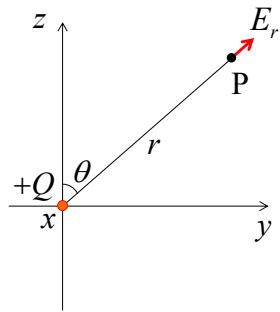
外部電界Eを加えたときのトルク

$$\vec{N} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (5)$$

電気双極子モーメント

$$\vec{p} = Q\vec{l} \quad (6)$$

# 電気モノポールの場合



単極子(モノポール)

電位

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (1)$$

電界

$$\begin{cases} E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \\ E_\theta = 0 \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \\ E_\theta = 0 \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \\ E_\theta = 0 \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad (4)$$

外部電界Eを加えたときのトルク

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E} = 0 \quad (5)$$

電気ダイポールモーメント

$$\vec{p} = Q\vec{l} = 0 \quad (6)$$

# (参考)多項式による厳密解①

$$\begin{cases} G_L(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}, \quad |t| < 1, |x| < 1 \quad \text{ルジャンドル多項式の母関数} \\ G_L(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1, |x| < 1 \quad \text{ルジャンドル多項式} \end{cases} \quad (1)$$

$t = \frac{l}{2r}, x = \cos \theta$  とおくと

$$G_L(\cos \theta, \frac{l}{2r}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{2r}\right)^2 - 2\cos \theta \frac{l}{2r} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{l}{r}\cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right)^n \quad (2)$$

$t = \frac{-l}{2r}, x = \cos \theta$  とおくと

$$G_L(\cos \theta, \frac{-l}{2r}) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{l}{2r}\right)^2 + 2\cos \theta \frac{l}{2r} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{l}{r}\cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{-l}{2r}\right)^n \quad (3)$$

新田, ``物理と特殊関数-入門セミナー-, `` pp.39-43, 共立出版, 1997.

# (参考)多項式による厳密解②

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{r\sqrt{1 - \frac{l}{r}\cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} - \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{l}{r}\cos \theta + \left(\frac{l}{2r}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \left(\frac{-l}{2r}\right)^n \right) = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - (-1)^n) P_n(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right)^n \\ &= \frac{1}{r} \left( 0 + 2P_1(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right) + 0 + 2P_3(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right)^3 + \dots \right) \\ &= \frac{2}{r} \left( P_1(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right) + P_3(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right)^3 + P_5(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right)^5 + \dots \right) \end{aligned} \quad (4)$$

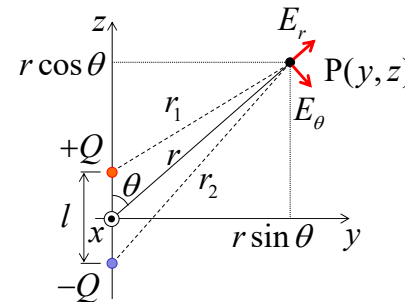
これで、 $1/r_1 - 1/r_2$ を近似を含めずに原点からの距離rで表現することができた。

したがって、近似を含まないポテンシャルは

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( P_1(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right) + P_3(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right)^3 + P_5(\cos \theta) \left(\frac{l}{2r}\right)^5 + \dots \right) \quad (5)$$

川村, 梅村, 加藤, 北原, 坂田, 鈴木, 鳥塚, 本間, ``わかりやすい理工系の電磁気学, `` p.42, 講談社, 2012

# デカルト座標への変換方法



$$\begin{cases} E_r = \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} E_r = \frac{Ql}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{Ql}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r^3} \\ E_\phi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

デカルト座標系への置き換え

$$r = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (4)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{z} \quad (5)$$

$$\begin{cases} E_y = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta \\ E_z = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} E_y = E_r \sin \theta + E_\theta \cos \theta \\ E_z = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta \end{cases} \quad (7)$$

# デカルト座標における厳密解① 13

電位の重ね合わせより、

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$

$$r_1 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2} \quad (2)$$

$$r_2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

デカルト座標で電界Exを求めると

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (3)$$

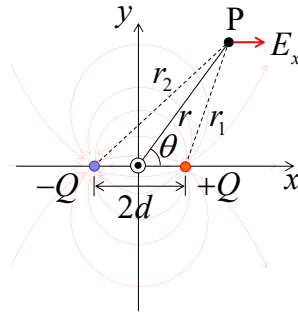
$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-r_1'}{r_1^2} - \frac{-r_2'}{r_2^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{x-d}{r_1^3} - \frac{x+d}{r_2^3} \right) \quad (4)$$

ただし、

$$r_1' = \frac{\partial}{\partial x} \{(x-d)^2 + y^2\}^{1/2} = \frac{1}{2} \{(x-d)^2 + y^2\}^{-1/2} 2(x-d) = \frac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} = \frac{x-d}{r_1} \quad (5)$$

$$r_2' = \frac{\partial}{\partial x} \{(x+d)^2 + y^2\}^{1/2} = \frac{1}{2} \{(x+d)^2 + y^2\}^{-1/2} 2(x+d) = \frac{x+d}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} = \frac{x+d}{r_2} \quad (6)$$



# デカルト座標における厳密解② 14

電位の重ね合わせより、

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (7)$$

$$r_1 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

デカルト座標で電界Eyを求めると

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (9)$$

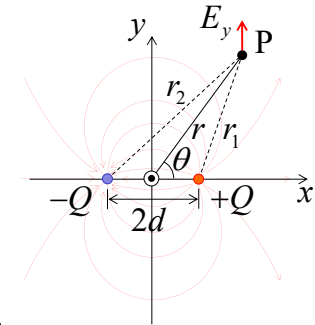
$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-r_1'}{r_1^2} - \frac{-r_2'}{r_2^2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{y}{r_1^3} - \frac{y}{r_2^3} \right) \quad (10)$$

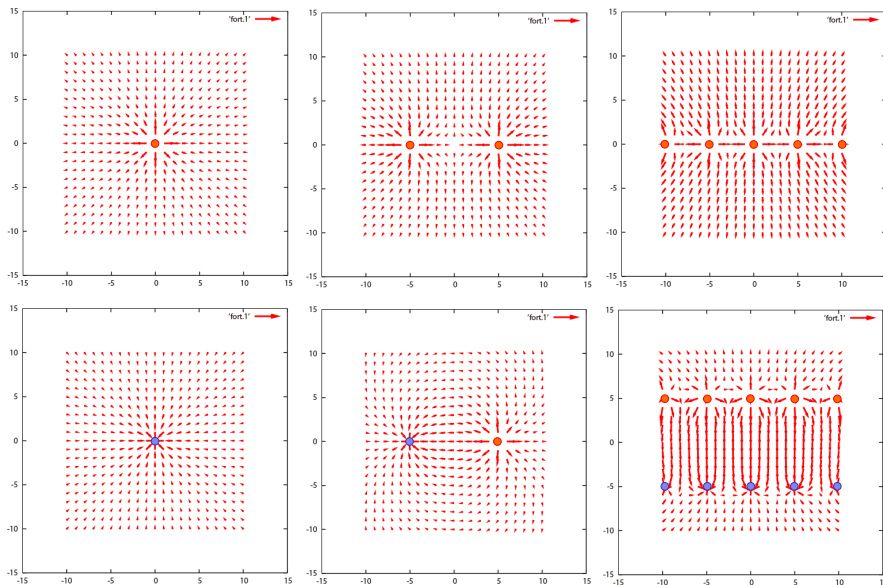
ただし、

$$r_1' = \frac{\partial}{\partial y} \{(x-d)^2 + y^2\}^{1/2} = \frac{1}{2} \{(x-d)^2 + y^2\}^{-1/2} 2y = \frac{y}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}} = \frac{y}{r_1} \quad (11)$$

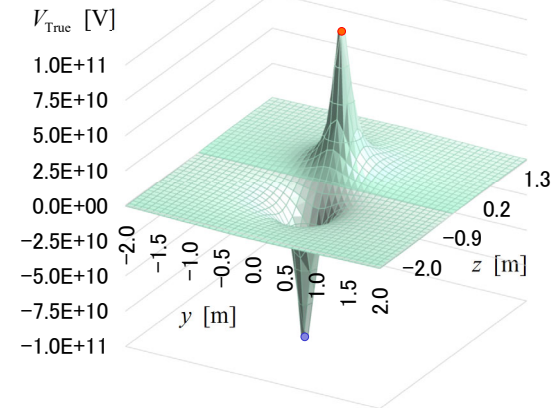
$$r_2' = \frac{\partial}{\partial y} \{(x+d)^2 + y^2\}^{1/2} = \frac{1}{2} \{(x+d)^2 + y^2\}^{-1/2} 2y = \frac{y}{\sqrt{(x+d)^2 + y^2}} = \frac{y}{r_2} \quad (12)$$



# 点電荷が作る電場のイメージ 15

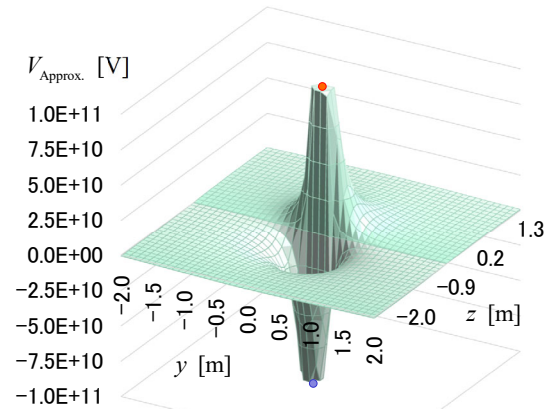


# ダイポール厳密解の電位分布 16



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

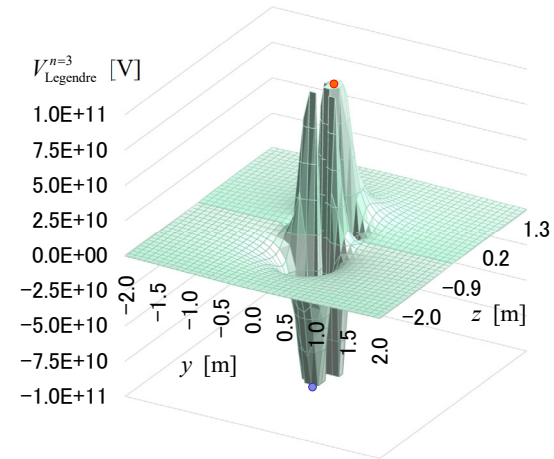
# ダイポール近似解の電位分布 17



$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^2} \cos\theta$$

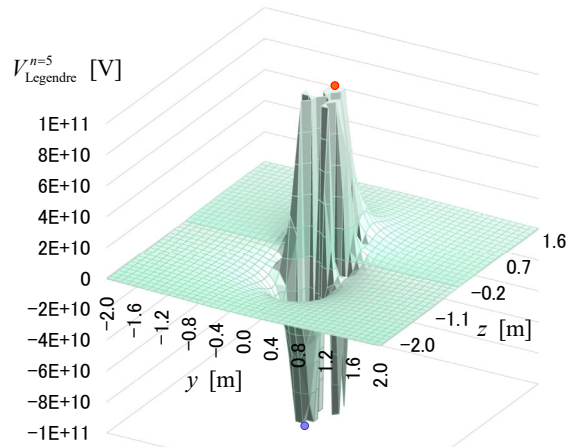
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( P_1(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right) + P_3(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^3 + P_5(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^5 + \dots \right)$$

# 多重極展開 (n=3) の電位分布 18



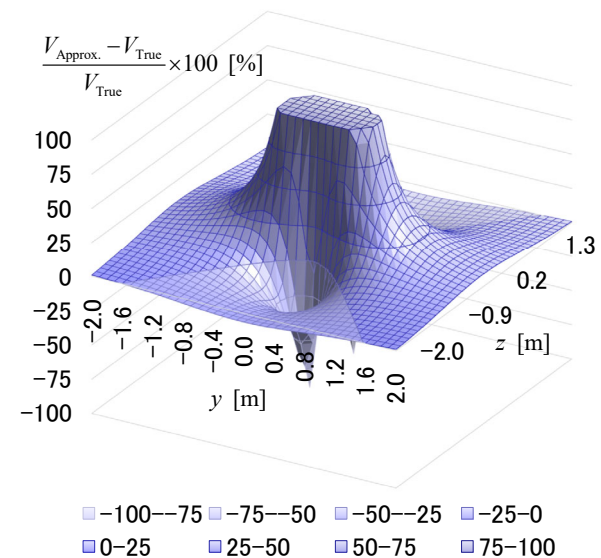
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( P_1(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right) + P_3(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^3 + P_5(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^5 + \dots \right)$$

# 多重極展開 (n=5) の電位分布 19

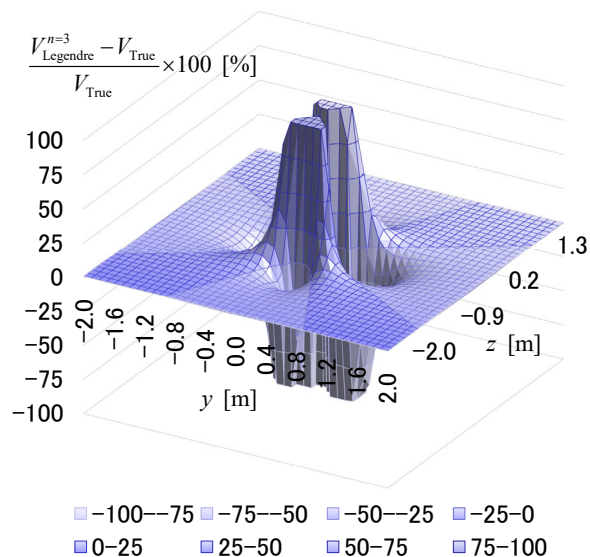


$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( P_1(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right) + P_3(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^3 + P_5(\cos\theta) \left( \frac{l}{2r} \right)^5 + \dots \right)$$

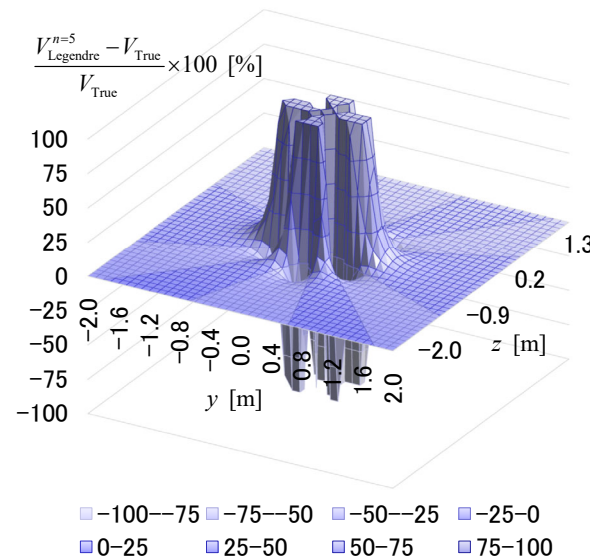
# ダイポール近似の誤差分布% 20



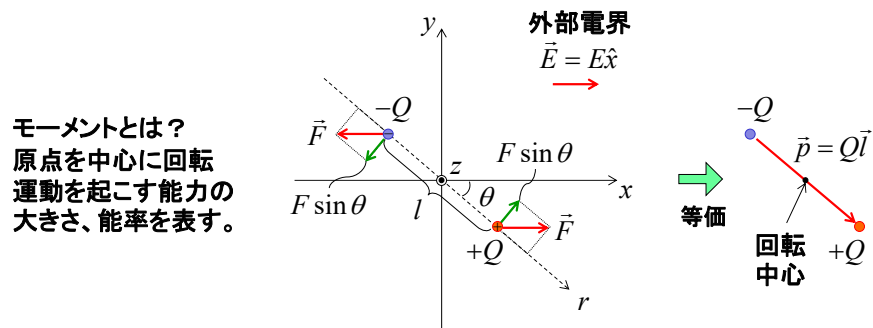
# 多重極 (n=3) の誤差分布%



# 多重極 (n=5) の誤差分布%



# 電気ダイポールモーメント

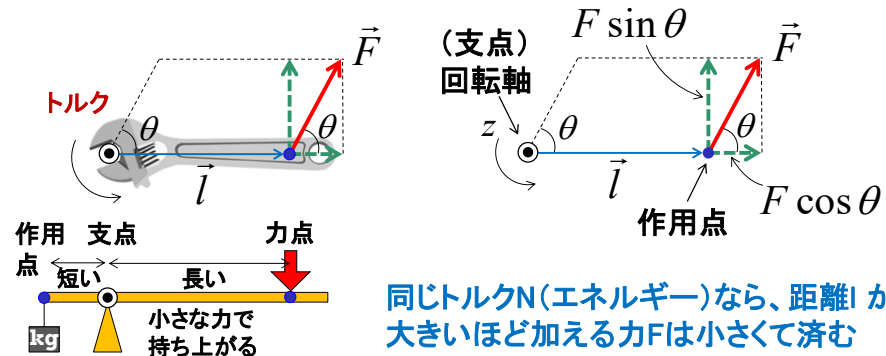


電場Eの中に電荷±Qで距離lの電気ダイポールを置くと、次のトルクNが発生する。ここで、 $p=Ql$ を電気ダイポールモーメントと呼ぶ。

$$\vec{N} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$[N \cdot m] = [C] \times [m] \times [V/m] = [C \cdot m] \times [V/m]$$

# トルク(力のモーメント)とは？

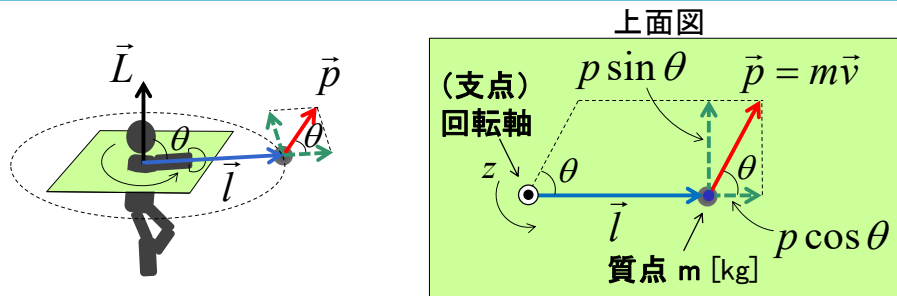


$$\vec{N} = lF \sin \theta \hat{z} = \vec{l} \times \vec{F}$$

$$[N \cdot m] = [m] \times [N]$$

マーク・レヴィ著, 森田由子訳, ひらめきの物理学, pp.304-305, SBクリエイティブ  
 ノート: [https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2\\_magnetic\\_dipole.pdf](https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2_magnetic_dipole.pdf)

# 角運動量とは？



$$\vec{L} = lp \sin \theta \hat{z} = \vec{l} \times \vec{p}$$

$$[J \cdot s] = [m] \times [kg \cdot m/s] = [m] \times [N \cdot s]$$

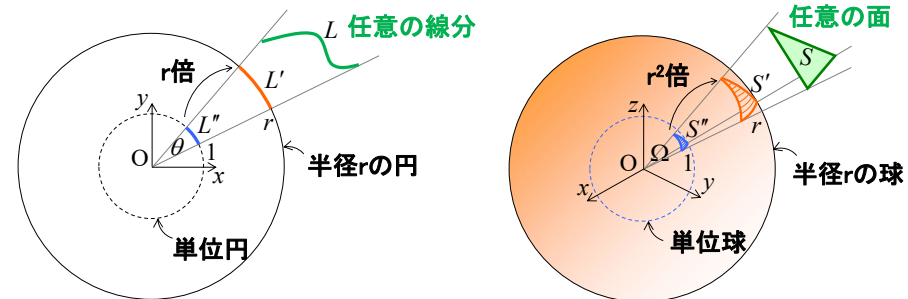
同じ角運動量Lならば、距離が小さいほど運動量 p は大きくなる。(速度vが大きくなる = 高速回転)



マーク・レヴィ著, 森田由子訳, ひらめきの物理学, pp.304-305, SBクリエイティブ

# 平面角と立体角

- ①【平面角度  $\theta$  [rad] の定義】: 任意の線分  $L$  [m] を単位円に射影したときの弧の長さ  $L''$ 
  - ... 半径  $r$  [m] の円に射影された弧の長さは  $L' = rL'' = r\theta$
- ②【立体角  $\Omega$  [Sr] の定義】: 任意の面  $S$  [m<sup>2</sup>] を単位球に射影したときの球面上の面積  $S''$ 
  - ... 半径  $r$  [m] の球に射影された面積は  $S' = r^2 S'' = r^2 \Omega$
  - (即ち、半径  $r$  [m] の球面上の面積  $S'$  の立体角は  $\Omega = S' / r^2$  となるから、 $d\Omega = ds' / r^2$ )



$L'$ :  $L$  を半径  $r$  の円に投影した線分  
 $L''$ :  $L$  を半径 1 の円に投影した線分

$S'$ :  $S$  を半径  $r$  の球に投影した面積  
 $S''$ :  $S$  を半径 1 の球に投影した面積

平面角 [rad]  $\theta \equiv L'' = \frac{L'}{r}$

立体角 [Sr]  $\Omega \equiv S'' = \frac{S'}{r^2}$   
 ステラジアンと読む

伊藤, 図でわかる電磁気学, p.23, 講談社サイエンティフィク

# 電気二重層の立体角

【例題】円錐形の立体角  $\Omega$  は、円錐の中心軸と円錐母線とのなす角  $\theta$  に対して次式となることを示せ。(教科書、p.32)

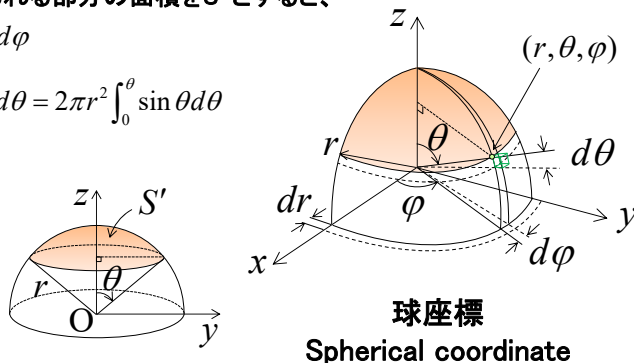
$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

【解答】半径  $r=1$  の球面上において、 $z$  軸からの角度  $\theta$  が  $0$  から  $\theta$  で切り取られる部分の面積が立体角  $\Omega$  (半径 1 の球面への投影面積が立体角の定義) になる。まず、半径  $r$  の球面上で切り取られる部分の面積を  $S'$  とすると、

$$\begin{aligned} S' &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\theta} r \sin \theta d\theta d\phi \\ &= r^2 \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{\theta=0}^{\theta} \sin \theta d\theta = 2\pi r^2 \int_0^{\theta} \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi r^2 [-\cos \theta]_0^{\theta} \\ &= 2\pi r^2 (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

ここで  $r=1$  を代入すると、

$$\begin{aligned} S'' &= \Omega \\ &= 2\pi(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$



# 電気二重層(面状ダイポール)

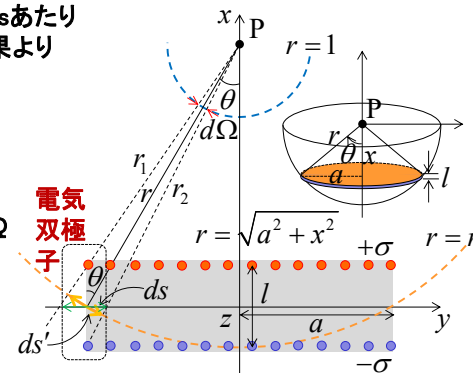
【例題】電荷密度  $\pm \sigma$  [C/m<sup>2</sup>] の等量異符号の面電荷が半径  $a$  [m] の円板の表裏に微小間隔  $l$  [m] で一様に分布しているとき、中心軸上で  $x$  の距離にある点  $P$  の電位と電界を求めよ。(教科書、p.32)

【解答】半径  $a$  の円板のうち、微小面積  $ds$  あたりが  $P$  点に作る電位は、電気双極子の結果より

$$\begin{aligned} dV_P &= \frac{\sigma ds l}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta = \frac{\sigma l}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds \cos \theta}{r^2} \\ &= \frac{\sigma l}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds'}{r^2} = \frac{\sigma l}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (1) \end{aligned}$$

$P$  点から二重層全体を見込む立体角を  $\Omega$  (半径  $r=1$  の球への投影面積) とすると、

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\Omega} dV_P = \int_0^{\Omega} \frac{\sigma l}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{\sigma l}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\Omega} d\Omega \\ &= \frac{\sigma l}{4\pi\epsilon_0} \Omega = \frac{\sigma l}{4\pi\epsilon_0} 2\pi(1 - \cos \theta) \\ &= \frac{\sigma l}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) \quad (2) \end{aligned}$$



電界は電位の勾配より

$$\vec{E} = -\hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} = \hat{x} \frac{\sigma l}{2\epsilon_0} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad (3)$$