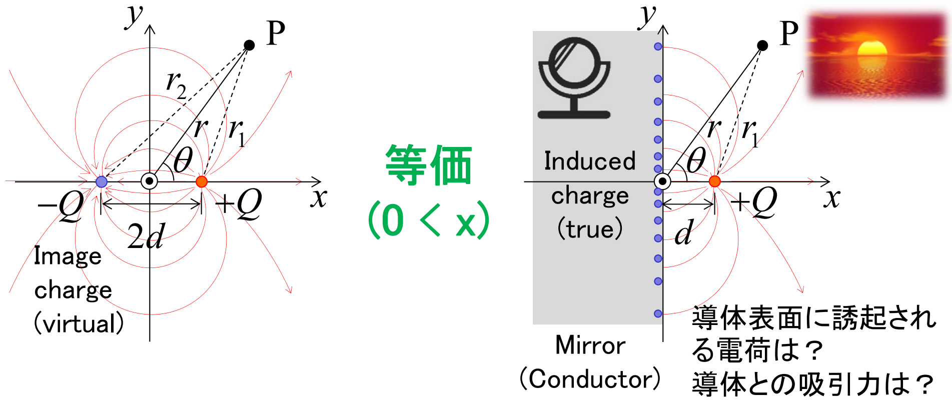
イメージ法（鏡像法）

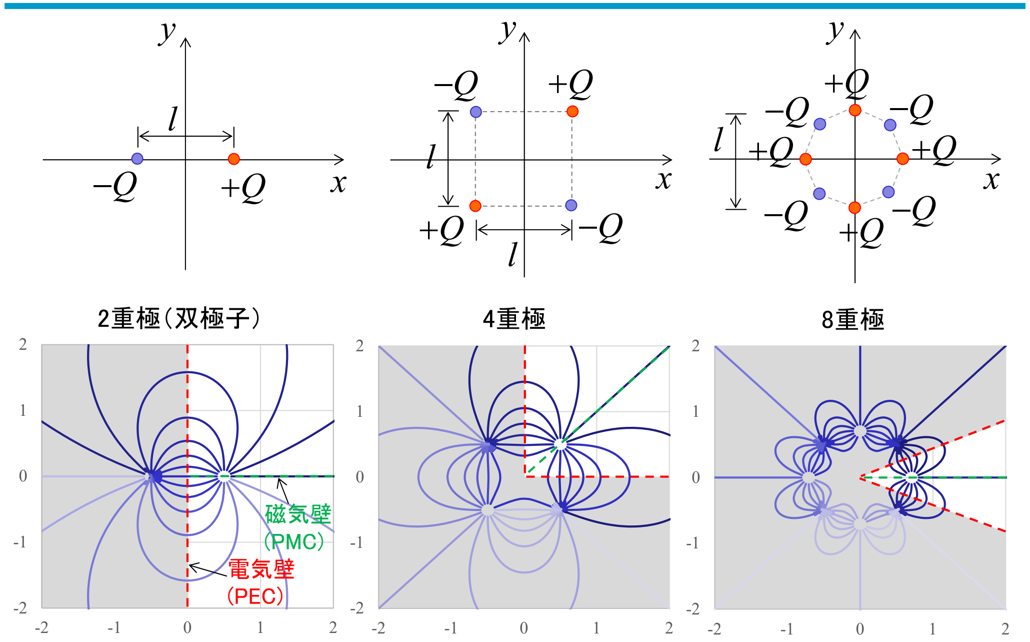
1st. 2016/04/01
Lst. 2021/11/15

イメージ法（鏡像法）



導体がある場合の電場は、導体を取り払って異符号のイメージ電荷を配置したときの電場と右半分だけは等しい（実際には導体内部には電場は存在しない）。この性質を利用すれば、適切にイメージ電荷を配置することで、導体が電荷の近傍に置かれた場合の電界を簡単に計算できる。これを**イメージ法または鏡像法**と呼ぶ。

電気力線の描画例



PEC: Perfect Electric Conductor　PMC: Perfect Magnectric Conductor

無限導体板の電気影像法

影像電荷を−Q [C]とすると、P点の電位は重ね合わせより、

$$V_P = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \quad (1)$$

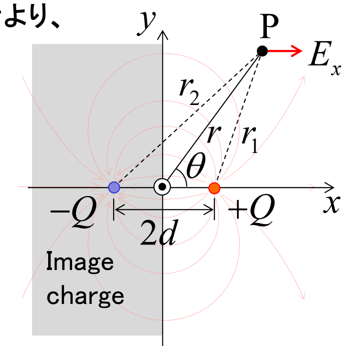
$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x-d)^2+y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x+d)^2+y^2} \end{cases} \quad (2)$$

デカルト座標で電界E_xを求めると

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} \quad (3)$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_1}\right)}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-r_1'}{r_1^2}-\frac{-r_2'}{r_2^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x-d}{r_1^3}-\frac{x+d}{r_2^3}\right) \quad (4)$$



$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right) = r_1'\frac{-1}{r_1^2}}$$

ただし、

$$r_1' = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(x-d)^2+y^2\right\}^{1/2} = \frac{1}{2}\left\{(x-d)^2+y^2\right\}^{-1/2}2(x-d) = \frac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}} = \frac{x-d}{r_1} \quad (5)$$

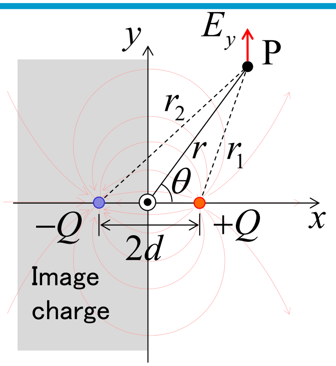
$$r_2' = \frac{\partial}{\partial x}\left\{(x+d)^2+y^2\right\}^{1/2} = \frac{1}{2}\left\{(x+d)^2+y^2\right\}^{-1/2}2(x+d) = \frac{x-d}{\sqrt{(x+d)^2+y^2}} = \frac{x+d}{r_2} \quad (6)$$

無限導体板の電気影像法

同様にして電位の重ね合わせより、

$$V_{\mathrm{P}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad (7)$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{(x-d)^2+y^2} \\ r_2 = \sqrt{(x+d)^2+y^2} \end{cases} \qquad (8)$$



デカルト座標で今度は電界E_yを求めると

$$\vec{E} = -\nabla V = -\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} - \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} - \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (9)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-r_1'}{r_1^2}-\frac{-r_2'}{r_2^2}\right) = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{r_1^3}-\frac{y}{r_2^3}\right)} \qquad (10)$$

ただし、

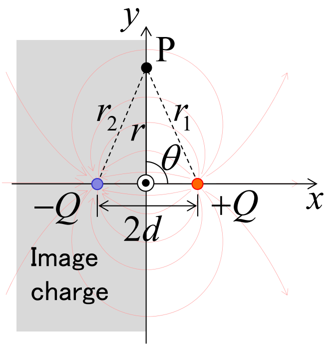
$$r_1' = \frac{\partial}{\partial y}\left\{(x-d)^2+y^2\right\}^{1/2} = \frac{1}{2}\left\{(x-d)^2+y^2\right\}^{-1/2}2y = \frac{y}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}} = \frac{y}{r_1} \qquad (11)$$

$$r_2' = \frac{\partial}{\partial y}\left\{(x+d)^2+y^2\right\}^{1/2} = \frac{1}{2}\left\{(x+d)^2+y^2\right\}^{-1/2}2y = \frac{y}{\sqrt{(x+d)^2+y^2}} = \frac{y}{r_2} \qquad (12)$$

無限導体板の電気影像法

導体表面ではx=0を式(2)または式(8)に代入して、

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{d^2+y^2}, \\ r_2 = \sqrt{d^2+y^2} \end{cases} \qquad (13)$$



これを先に導出した(4)と(10)のE_xとE_yに代入すると,

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{r_1^3}-\frac{y}{r_2^3}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-d}{\sqrt{(d^2+y^2)^{3/2}}}-\frac{d}{\sqrt{(d^2+y^2)^{3/2}}}\right)$$

$$= \frac{-Qd}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(d^2+y^2)^{3/2}} \qquad (14)$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{r_1^3}-\frac{y}{r_2^3}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y}{\sqrt{(d^2+y^2)^{3/2}}}-\frac{y}{\sqrt{(d^2+y^2)^{3/2}}}\right)$$

$$= 0 \qquad (15)$$

即ち、導体表面では電界は垂直成分であるE_xのみであり、平行成分のE_yは存在しない。
導体表面の電荷密度は$\sigma=\varepsilon_0 E$より、

$$\sigma = \varepsilon_0 E_x = \frac{-Qd}{2\pi}\frac{1}{(d^2+y^2)^{3/2}} \ [\mathrm{C/m^2}] \qquad (16)$$

イメージ法より、電荷Qと導体板の間にはたらく力は吸引力となり、次式となる。

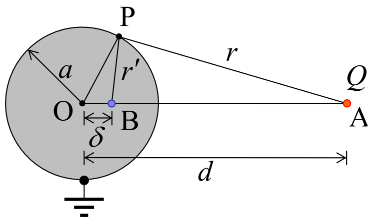
$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(2d)^2} \ [\mathrm{N}] \qquad (17)$$

接地導体球の電気影像法1

【例題】接地された半径a [m]の導体球がある。導体球の中心から距離d [m]の位置に点電荷Q [C]を配置したとき、影像電荷Q' の大きさと位置を求めよ。(教科書 p.35)

【解答】

方針: 影像電荷Q' を配置したとき、半径aの球面上で常にV=0が成立するようにする。



接地されているので、導体球は常にゼロ電位(V=0)になる。

2点A, Bにそれぞれ, Q, Q' を配置したときのP点の電位は

$$V_{\mathrm{P}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r}+\frac{Q'}{r'}\right) \qquad (1)$$

ここで、V_p=0となる条件は

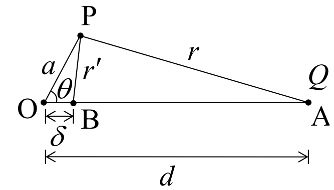
$$\frac{Q}{r}+\frac{Q'}{r'} = 0 \Rightarrow \frac{Q}{r} = -\frac{Q'}{r'} \Rightarrow \frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} \qquad (2)$$

異なる2点からの距離の比が一定値をとる点の軌跡は円(アポロニウスの円と呼ばれる)になる。これが点Oを中心とする半径aの円と一致すれば、B点に配置した電荷Q' はQの影像電荷となる。そのためには、まずOB間の距離δを求める必要がある。

接地導体球の電気影像法2

【つづき】右図において余弦定理より

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta} \\ r' = \sqrt{a^2+\delta^2-2a\delta\cos\theta} \end{cases} \qquad (3)$$



r' とrの比は

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{a^2+\delta^2-2a\delta\cos\theta}}{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\theta}} = \frac{\sqrt{2a\delta}\sqrt{\frac{a^2+\delta^2}{2a\delta}-\cos\theta}}{\sqrt{2ad}\sqrt{\frac{a^2+d^2}{2ad}-\cos\theta}} \qquad (4)$$

これがθに依らず一定となるには、

$$\frac{a^2+\delta^2}{2a\delta} = \frac{a^2+d^2}{2ad} \Rightarrow d(a^2+\delta^2) = \delta(a^2+d^2) \Rightarrow a^2(d-\delta) = d\delta(d-\delta) \qquad (5)$$

これをδについて求めると

$$\boxed{\delta = \frac{a^2}{d}} \qquad (6)$$

このときr' とrの比は(4)より

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{2a\delta}}{\sqrt{2ad}} = \sqrt{\frac{\delta}{d}} = \sqrt{\frac{a^2/d}{d}} = \frac{a}{d} \qquad (7)$$

先に導出した式(2)より

$$\frac{r'}{r} = -\frac{Q'}{Q} = \frac{a}{d} \qquad (8)$$

従って、影像電荷の大きさは

$$\boxed{Q' = -\frac{a}{d}Q} \qquad (9)$$

接地導体球の電気影像法3

【つづき】簡単のために、P点がOAを結ぶ直線上に存在する場合で考えると、

① Pが球左端にある場合（右図上）、

$$\frac{r'}{r}=\frac{a+\delta}{a+d} \qquad (10)$$

② Pが球右端にある場合（右図下）、

$$\frac{r'}{r}=\frac{a-\delta}{d-a} \qquad (11)$$

(10)と(11)より、r’/rは

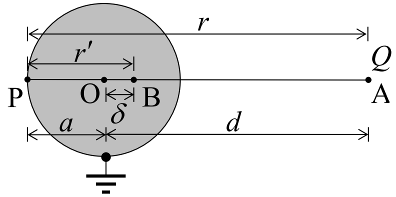
$$\frac{a-\delta}{d-a}=\frac{a+\delta}{a+d} \qquad (12)$$

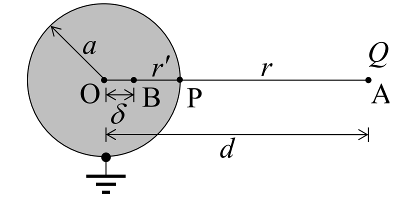
これをδについて整理すると、

$$\boxed{\delta=\frac{a^2}{d}} \qquad (13)$$

(13)を(10)または(11)に代入して整理すると、

$$\frac{r'}{r}=\frac{a}{d} \qquad (14)$$





(14)を先に導出した(2)に代入して

$$\frac{r'}{r}=-\frac{Q'}{Q}=\frac{a}{d} \qquad (15)$$

従って、最終的に影像電荷の大きさは

$$\boxed{Q'=-\frac{a}{d}Q} \qquad (16)$$

としてもよい。

（補足）アポロニウスの円について

一例として2点をA(1, 2), B(4, 5)とするとき、BP/AP=1/2を満たすPの軌跡を求める。

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\frac{r'}{r}=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

A点およびB点からP点までの距離は

$$\begin{cases}\mathrm{AP}=r=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} \\ \mathrm{BP}=r'=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}\end{cases} \qquad (2)$$

(1)より

$$r=2r' \qquad (3)$$

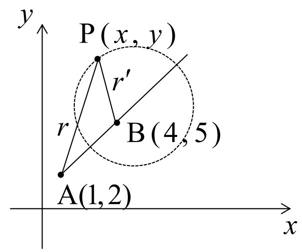
(3)に(2)を代入すると

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} \qquad (4)$$

両辺2乗して整理すると、

$$(x-5)^2+(y-6)^2=8 \qquad (5)$$

これは点(5,6)を中心とした半径√8の円である。



宮腰，高校数学+α，p.137，共立出版

絶縁導体球の電気影像法1

【例題】接地されず、帯電していない半径a [m]の絶縁導体球がある。導体球の中心から距離d [m]の位置に点電荷Q [C]を配置したとき、影像電荷および導体球の電位を求めよ。（教科書 p.36）

【解答】

方針： 影像電荷Q’を配置したとき、半径aの球面上で常にV≠0を成立させる。

接地した場合の既出問題の答えより、

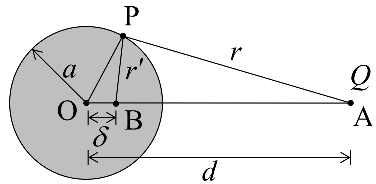
$$\delta=\frac{a^2}{d} \qquad (1)$$

の位置に影像電荷

$$Q'=-\frac{a}{d}Q \qquad (2)$$

を配置すれば、半径r=aの表面では常にV=0が成立することが分かっている。導体上のVを常に一定値（≠0）にするには、球の中心Oに新たな影像電荷Q”[C]を配置すればよい。このときの球表面の電位は次式となる。

$$V=\frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad (3)$$



接地されていないので、導体球はゼロ電位にならず、一定値（V≠0）になる。

導体球は絶縁されており、もともと電荷は存在しないので

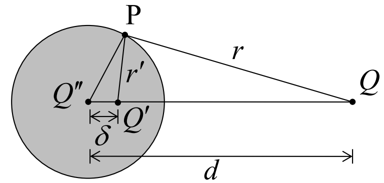
$$Q''+Q'=0 \qquad (4)$$

を満たす必要がある。従って、

$$Q''=-Q'=-\left(-\frac{a}{d}Q\right)=\frac{a}{d}Q \qquad (5)$$

絶縁導体球の電気影像法2

【つづき】
以上をまとめると、



位置	$\delta=\frac{a^2}{d}$	(1)
影像電荷1	$Q'=-\frac{a}{d}Q$	(2)
影像電荷2（原点O）	$Q''=\frac{a}{d}Q$	(3)
導体球表面の電位	$V=\frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}$	(4)