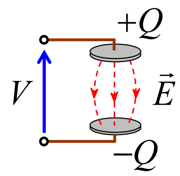
多導体系と静電遮へい

1st. 2016/04/07
Lst. 2021/11/22

キャパシタンス

キャパシタンス C の定義・・・
単位電圧 1V を加えたときの蓄積電荷量 Q [C/V] = [F]



電荷 [C]　　電圧 [V]

$$Q = CV$$

<u>比例定数</u> [C/V]=[F]
キャパシタンスまたは
静電容量と呼ぶ

※加える電圧 V が大きいほど蓄積電荷 Q は大きくなる

複数導体のキャパシタンスは？

①導体が1つのとき

$$Q_1 = q_{11}V_1 = C_1V_1 \quad (1)$$

②導体が2つのとき

$$\begin{cases} Q_1 = q_{11}V_1 + q_{12}V_2 \\ Q_2 = q_{21}V_1 + q_{22}V_2 \end{cases} \quad (2)$$

(2)でV_2=0とすれば、導体が1つのとき①と等価になり

$$\begin{cases} Q_1 = q_{11}V_1 \\ Q_2 = q_{21}V_1 = -q_{11}V_1 \end{cases} \quad (2)'$$

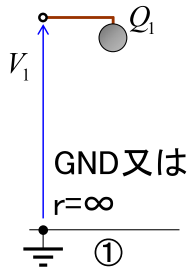
となる。

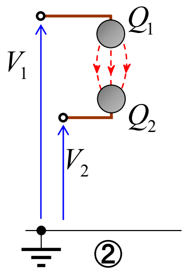
③導体が3つのとき　V_2=V_3=0とすれば①と等価

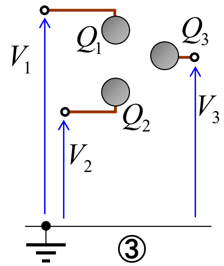
$$\begin{cases} Q_1 = q_{11}V_1 + q_{12}V_2 + q_{13}V_3 \\ Q_2 = q_{21}V_1 + q_{22}V_2 + q_{23}V_3 \\ Q_3 = q_{31}V_1 + q_{32}V_2 + q_{33}V_3 \end{cases} \quad (3)$$

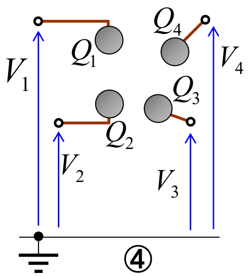
④導体が4つのとき

$$\begin{cases} Q_1 = q_{11}V_1 + q_{12}V_2 + q_{13}V_3 + q_{14}V_4 \\ Q_2 = q_{21}V_1 + q_{22}V_2 + q_{23}V_3 + q_{24}V_4 \\ Q_3 = q_{31}V_1 + q_{32}V_2 + q_{33}V_3 + q_{34}V_4 \\ Q_4 = q_{41}V_1 + q_{42}V_2 + q_{43}V_3 + q_{44}V_4 \end{cases} \quad (4)$$









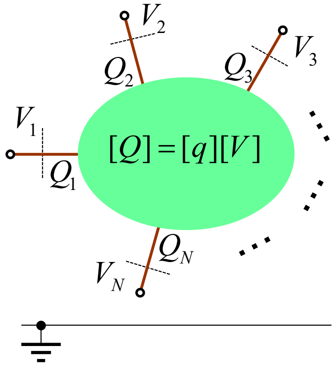
誘導係数マトリクス（q行列）

導体がN個のとき（一般化）すると

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{array}{c|cccc} & & & j & \\ & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1N} \\ & q_{21} & q_{22} & & \vdots \\ & \vdots & & & \vdots \\ i & \vdots & & q_{ij} & \vdots \\ & q_{N1} & \cdots & \cdots & q_{NN} \end{array} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、

$$q_{ij} = \left. \frac{Q_i}{V_j} \right|_{V_k=0\,(k\neq j)}$$



<u>異なる導体間の電荷と電圧の比率を表す指標</u>。誘導係数と呼ばれる。ただし、対角成分(i=j)だけは静電容量の定義に等しいので、容量係数と呼ばれる。q_{ij} 成分を求めるときは、j 以外の導体をすべてグランドに接続し、j番目の導体に単位電圧 1 V を加えたときの電荷 Q_i を求める。

複数導体の電位は？

①導体が1つのとき

$$V_1 = p_{11}Q_1 = \frac{1}{C_1}Q_1 \quad (1)$$

②導体が2つのとき

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases} \quad (2)$$

(2)でQ_2=0とすれば

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 \\ V_2 = p_{21}Q_1 = -p_{11}Q_1 \end{cases} \quad (2)'$$

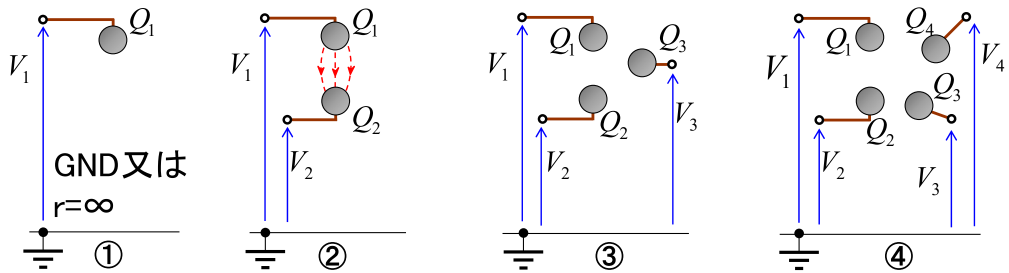
これは導体が1つの場合①に等しい。

③導体が3つのとき　Q_2=Q_3=0とすれば①と等価

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 \\ V_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3 \end{cases} \quad (3)$$

④導体が4つのとき

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 + p_{14}Q_4 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 + p_{24}Q_4 \\ V_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3 + p_{34}Q_4 \\ V_4 = p_{41}Q_1 + p_{42}Q_2 + p_{43}Q_3 + p_{44}Q_4 \end{cases} \quad (4)$$



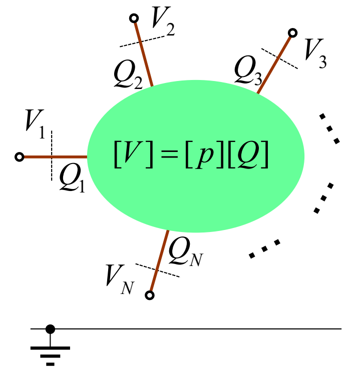
電位係数マトリクス（p行列）

導体がN個のとき（一般化）すると

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & p_{ij} & \vdots \\ p_{N1} & \cdots & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、

$$p_{ij} = \left.\frac{V_i}{Q_j}\right|_{Q_k=0\,(k\neq j)}$$



異なる導体間の電圧と電荷の比率を表す指標。電位係数と呼ばれる。

p_{ij} 成分を求めるときは、j 以外の電荷をすべてゼロにして、j 番目だけに単位電荷 1 C を加えたときの電圧 V_i を求める。

電位係数マトリクス1

【例題】接地されていない2個の同心球導体の電位係数p_{ij}を求めよ。ただし、内球を導体1、外球を導体2とする。（教科書、例題3.1、p.39）

【解答】導体が2つのときの電位係数は

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases} \quad (1)$$

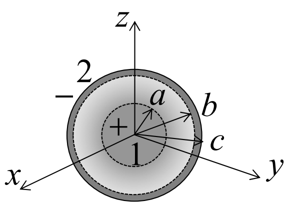
Q_1のみを内球に与えて、Q_2=0とすると、

$$\begin{cases} V_1 = V_a = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)Q_1 = p_{11}Q_1 \\ V_2 = V_c = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{c}Q_1 = p_{21}Q_1 \end{cases} \quad (2)$$

Q_2のみを外球に与えて、Q_1=0とすると、

$$\begin{cases} V_1 = V_a = V_c = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{c}Q_2 = p_{12}Q_2 \\ V_2 = V_c = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{c}Q_2 = p_{22}Q_2 \end{cases} \quad (3)$$

これで，p_{11}, p_{21}, p_{12}, p_{22}が求まった。



マトリクス形に直すと、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

誘導係数マトリクス1

【演習】接地されていない2個の同心球導体の誘導係数q_{ij}を求めよ。ただし、内球を導体1、外球を導体2とする。（教科書、演習3.2、p.53）

【解答】導体が2つのときの誘導係数は

$$\begin{cases} Q_1 = q_{11}V_1 + q_{12}V_2 \\ Q_2 = q_{21}V_1 + q_{22}V_2 \end{cases} \quad (1)$$

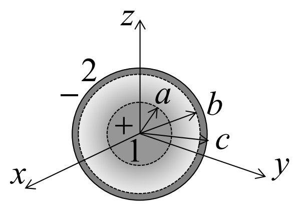
先に導出した電位係数マトリクスの結果より、逆行列を求めると

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで、

$$\Delta = \det = \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \overset{\frac{1}{\Delta}}{\boxed{\dfrac{(4\pi\varepsilon_0)^2}{\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)}}} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} \\ -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 c} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$



従って、誘導係数は

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} & -\dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} \\ -\dfrac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}} & \dfrac{4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)}{\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

電位係数マトリクス2

【例題】外球が接地されている同心球導体の電位係数p_{ij}を求めよ。ただし、内球を導体1、外球を導体2とする。

【解答】導体が2つのときの電位係数は

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases} \tag{1}$$

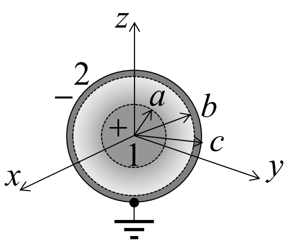
Q_1のみを内球に与えて、Q_2=0とすると、

$$\begin{cases} V_1 = V_a = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)Q_1 = p_{11}Q_1 \\ V_2 = V_c = 0 = p_{21}Q_1 \end{cases} \tag{2}$$

Q_2のみを外球に与えて、Q_1=0とすると、

$$\begin{cases} V_1 = V_a = 0 = p_{12}Q_2 \\ V_2 = V_c = 0 = p_{22}Q_2 \end{cases} \tag{3}$$

これで、p_{11}, p_{21}, p_{12}, p_{22}が求まった。



マトリクス形に直すと、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

電位係数マトリクス3

【演習】半径がそれぞれa, b [m]の導体球が、中心間距離d [m]でおかれている。距離dが半径a, bに比べて十分大きい場合の電位係数を求めよ。
（演習書、応用3.1、p.27）

【解答】導体が2つのときの電位方程式

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases} \tag{1}$$

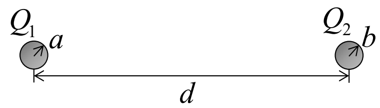
電位係数（方程式の要素）は

$$p_{11} = \left.\frac{V_1}{Q_1}\right|_{Q_2=0},\ p_{12} = \left.\frac{V_1}{Q_2}\right|_{Q_1=0},\quad p_{21} = \left.\frac{V_2}{Q_1}\right|_{Q_2=0},\ p_{22} = \left.\frac{V_2}{Q_2}\right|_{Q_1=0} \tag{2}$$

Q_1=1 C, Q_2=0とすると、

$$p_{11} = V_1 = V_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{3}$$

$$p_{21} = V_2 = V_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \tag{4}$$



Q_1=0, Q_2=1 Cとすると、

$$p_{12} = V_1 = V_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \tag{5}$$

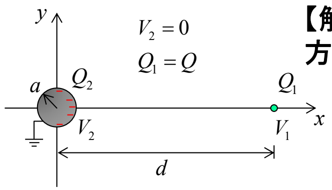
$$p_{22} = V_2 = V_b = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 b} \tag{6}$$

これで、p_{11}, p_{21}, p_{12}, p_{22}が求まった。
マトリクス形に直すと、

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

電位係数マトリクス4

【演習】接地された半径a [m]の導体球の中心から距離d [m]の点に点電荷Q [C]を置いたとき、導体球に誘導される電荷を電位係数による考え方で求めよ。
（演習書、応用3.2、p.27）



【解答】2導体の電位方程式は

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases} \tag{1}$$

電位係数（各要素）

$$p_{11} = \left.\frac{V_1}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{Q_1/4\pi\varepsilon_0 0}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 0} = \infty$$

$$p_{12} = \left.\frac{V_1}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = \frac{Q_2/4\pi\varepsilon_0 d}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$p_{21} = \left.\frac{V_2}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{Q_1/4\pi\varepsilon_0 d}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \tag{2}$$

$$p_{22} = \left.\frac{V_2}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = \frac{Q_2/4\pi\varepsilon_0 a}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

マトリクス形式にすると

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$V_2 = 0$ 条件1　条件2 $Q_2 = Q$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ \boxed{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{Q} \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

第2行より、

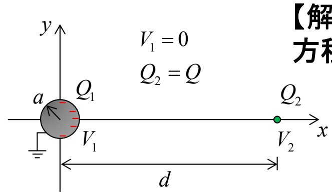
$$0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 a} \tag{5}$$

従って、

$$\boxed{Q_2 = -\frac{a}{d}Q} \tag{6}$$

多導体系の例題

【類題】演習書の応用問題3.2において，半径aの導体球を導体1，点電荷Qを導体2とした場合，導体1に誘導される電荷を電位係数による考え方で求めよ。



【解答】2導体の電位方程式は

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 \end{cases} \tag{1}$$

電位係数

$$p_{11} = \left.\frac{V_1}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{Q_1/4\pi\varepsilon_0 a}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

$$p_{12} = \left.\frac{V_1}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = \frac{Q_2/4\pi\varepsilon_0 d}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

$$p_{21} = \left.\frac{V_2}{Q_1}\right|_{Q_2=0} = \frac{Q_1/4\pi\varepsilon_0 d}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \tag{2}$$

$$p_{22} = \left.\frac{V_2}{Q_2}\right|_{Q_1=0} = \frac{Q_2/4\pi\varepsilon_0 0}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 0} = \infty$$

マトリクス形式にすると

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} & \infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

条件1 $V_1 = 0$　$Q_2 = Q$ 条件2

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} & \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 d} & \infty \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \boxed{Q} \end{bmatrix} \tag{4}$$

第1行より、

$$0 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} \tag{5}$$

従って、

$$\boxed{Q_1 = -\frac{a}{d}Q} \tag{6}$$

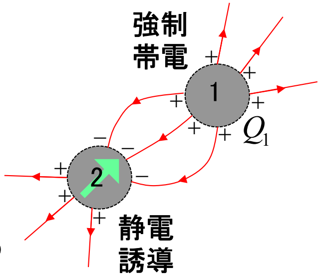
静電遮へい1

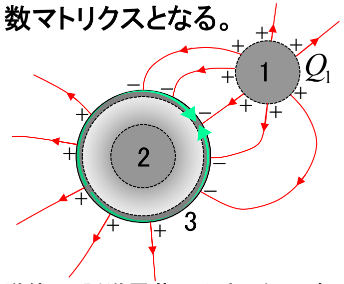
右図のような導体が2つのときの誘導係数マトリクスは

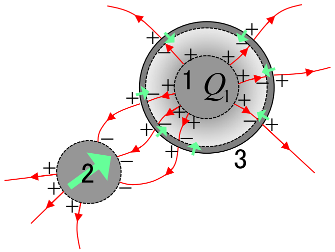
$$\begin{cases} Q_1 = q_{11}V_1 + q_{12}V_2 \\ Q_2 = q_{21}V_1 + q_{22}V_2 \end{cases}$$

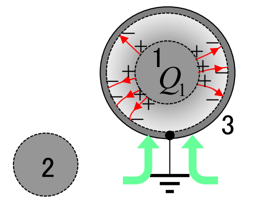
となる。このとき、導体1にQ_1を与えると、導体2も電荷が誘導されるためお互いに影響を及ぼしあう。

次に、左下図のように導体2を包むように導体3を新たに追加するか、中央下図や右下図のように導体1を包むように導体3を新たに追加すると、導体が3つのときの誘導係数マトリクスとなる。









導体2に誘導電荷は発生しないが、導体3の電位変化とともに導体2の電位は上昇する。

導体2に誘導電荷が発生し、導体2の電位も上昇する。

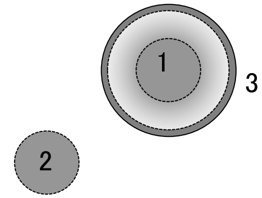
導体2に誘導電荷は発生せず、導体2の電位も変化しない。(静電遮へい)

安達，大貫，電磁気学[第2版・新装版]，p.41

静電遮へい2

導体が3つのときの誘導係数マトリクスは

$$\begin{cases} Q_1 = q_{11}V_1 + q_{12}V_2 + q_{13}V_3 \\ Q_2 = q_{21}V_1 + q_{22}V_2 + q_{23}V_3 \\ Q_3 = q_{31}V_1 + q_{32}V_2 + q_{33}V_3 \end{cases} \qquad (1)$$

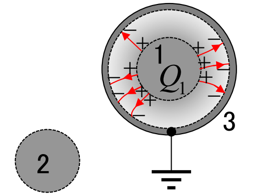


第1行目の式において Q_1=0 とすると，導体1–3間には電界は存在しないので V_1=V_3 となる。従って、

$$q_{12}V_2 + (q_{11} + q_{13})V_3 = 0 \qquad (2)$$

上式は V_2, V_3 に関わらず常に成立するので

$$\begin{cases} q_{12} = 0 \\ q_{11} + q_{13} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$



これを第1行目の式に戻すと

$$Q_1 = q_{11}V_1 + q_{13}V_3 = q_{11}V_1 - q_{11}V_3 \qquad (4)$$

q_{12}=q_{21} より，q_{21}=0 となるので第2行目の式は

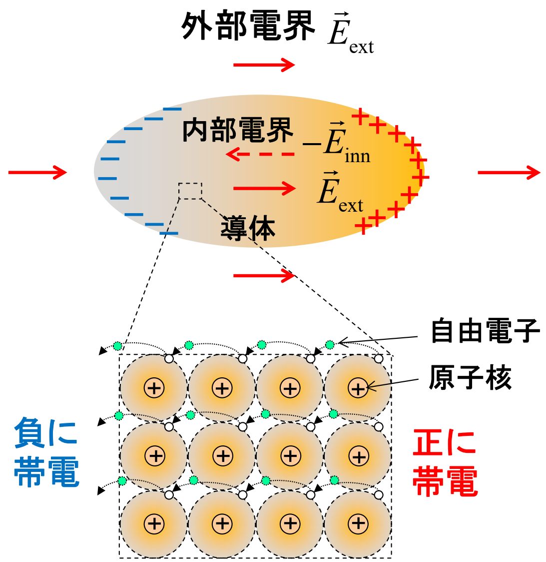
$$Q_2 = q_{22}V_2 + q_{23}V_3 \qquad (5)$$

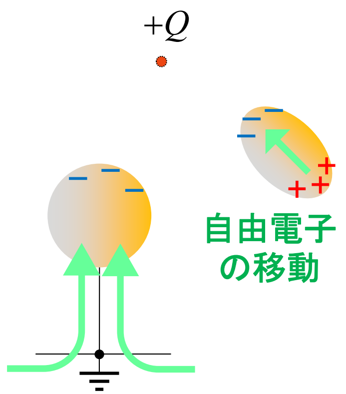
V_3を一定(例えば接地)にしておけば Q_1 と Q_2 は互いに無関係になる。
これを**静電遮へい**と呼ぶ。

安達，大貫，電磁気学[第2版・新装版]，p.41

静電誘導

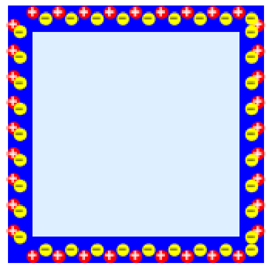
外部電界と内部電界の打消しにより、導体内部では電界ゼロ

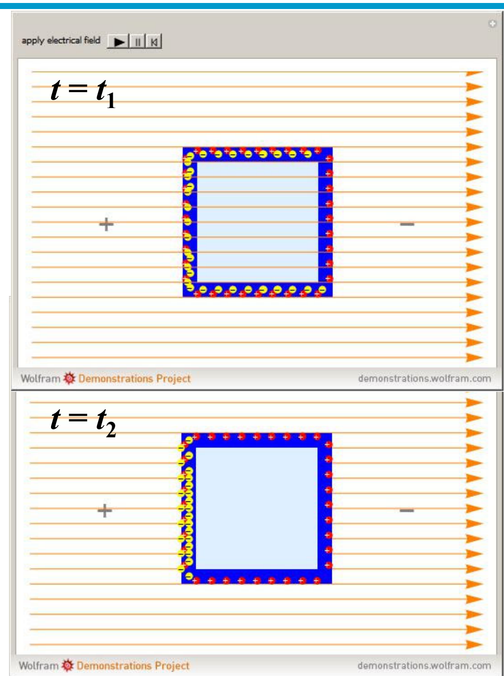




ファラデーケージ

$t = 0$





https://demonstrations.wolfram.com/FaradayCage/