静電容量（キャパシタンス）の導出

v1.4 May.2021　　＿＿＿＿＿ 科 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 番　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. ガウスの法則の適用

図 1 に示す内導体の半径 a [m]，外導体の内半径が b [m]，外導体の外半径が c [m]，長さ 1 m の同軸線路がある。導体間の空洞は誘電体であり，その誘電率は ε [F/m] である。内導体に $+Q$ [C]，外導体に $-Q$ [C] の電荷を与えると，電荷は内導体では $r = a$ の円筒表面に電荷が集中し，外導体では $r = b$ の内表面に電荷が集中する[*1]。ガウスの法則を解析的に適用できるのは，点電荷，球状電荷等の球対称問題，ならびに無限長線電荷，無限長円筒電荷，同軸線路等の軸対称問題に限られる。また，適用するガウスの法則には 2 つの形があり，1 つは図 2 に示すような**誘電体を含まないガウスの法則**であり，もう 1 つは図 3 に示すような**誘電体を含むガウスの法則**である。そして適用手順には次のパターンがある。【手順 1】正電荷から負電荷に伸びる電界 $\vec{E}$ または電束密度 $\vec{D}$ 分布のパターンを想像する。【手順 2】電界 $\vec{E}$ または電束密度 $\vec{D}$ と垂直に閉じた積分面 S を決める[*2]。【手順 3】積分面 S 上で $\vec{E}$ または $\vec{D}$ が一定と考えて積分方程式を解く。このケースでは導体間の空洞が誘電体で満たされているので，2 つ目の誘電体を含むガウスの法則を適用する方が楽である[*3]。適用手順に従うと次のようになる。【手順 1】内導体から外導体に向かって放射状に電束 $\vec{D}$ が生じる。【手順 2】積分面の半径を r と置くと，(ア) $r < a$, (イ) $a < r < b$, (ウ) $b < r < c$, (エ) $c < r$ の 4 つの場合が考えられる。【手順 3】前述の各場合について次のように積分方程式を立てる。

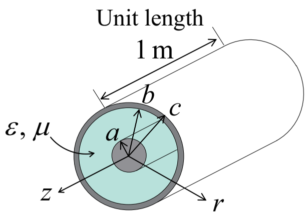

図 1　単位長さあたりの同軸線路モデル

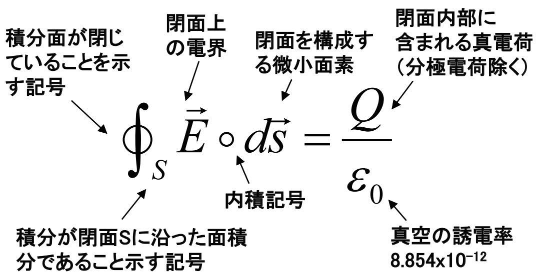

図 2　ガウスの法則 (誘電体を含まない)

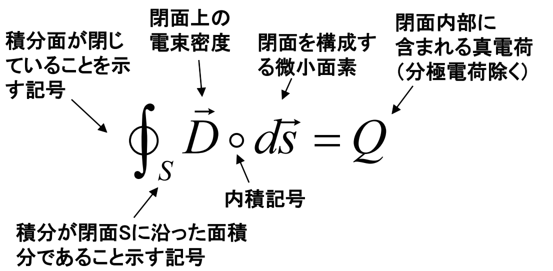

図 3　誘電体を含むガウスの法則

(ア) $r < a$ の場合

電荷 $+Q$ はすべて $r = a$ の表面に分布しているので，積分面 S 内部に含まれる電荷は 0 である。従って，誘電体を含むガウスの法則より

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 0 \tag{1}$$

ここで $\vec{D} = D\hat{r}$, $d\vec{s} = ds\hat{r}$ であり，$\vec{D} \circ d\vec{s} = Dds\cos 0^\circ = Dds$ となるから式 (1) のベクトル積分方程式は，式 (2) のように簡単になる。

$$\oint_S Dds = 0 \tag{2}$$

さらに，この同軸線路は z 軸に対して軸対称であるから，D の大きさは半径 r の円周上では同じ大きさになる。即ち，積分には寄与しない定数とみなせる。さらに，微小面積 ds を閉面 S で総和した値は，長さ 1 m で半径 r の円筒表面積 $2\pi r$ に相当するので式 (3) となる。

$$D\oint_S ds = 0 \quad \Rightarrow \quad D2\pi r = 0 \tag{3}$$

したがって，$r < a$ のときの $D = E = 0$ となる。

(イ) $a < r < b$ の場合

閉面 S の内部に含まれる電荷は $+Q$ である。従って

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q \tag{4}$$

この場合，先の式 (3) に該当する式は

$$D2\pi r = Q \tag{5}$$

となるので，$a < r < b$ のときの D と $E = D/\varepsilon$ は次のようになる。

$$D = \frac{Q}{2\pi r}, \quad E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r} \tag{6}$$

(ウ) $b < r < c$ の場合

負電荷 $-Q$ はすべて $r = b$ の表面に分布しているので，閉面 S の内部に含まれる電荷は $Q + (-Q) = 0$ である。従って

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 0 \tag{7}$$

となるから，$b < r < c$ の場合は $D = E = 0$ となる。

(エ) $c < r$ の場合

閉面 S の内部に含まれる電荷は $Q + (-Q) = 0$ である。従って

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = 0 \tag{8}$$

となるから，$c < r$ の場合は $D = E = 0$ となる。なお，電束密度 D と電界 E の大きさを図示すると図 4 のようになる。

2. 電位差の導出

導体間の電界は式 (6) で与えられることが分かったので，内導体と外導体の間の電位差 V は次式 (9) となる。

$$\begin{aligned} V &= -\int_b^a Edr \\ &= -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\varepsilon r}dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon}\left[\ln|r|\right]_b^a = \frac{Q}{2\pi\varepsilon}(\ln b - \ln a) \end{aligned} \tag{9}$$

3. キャパシタンスの導出

キャパシタンス C [F/m] の定義は，導体間に単位電圧 [V] を加えたときに蓄えられる電荷量 [C] である。即ち，$Q = CV$ の関係を式 (9) に適用することで次式 (10) が求まる。ほとんどの測定器には同軸ケーブルが使われているので，この式は極めて良く使われる重要な式である。

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln b/a} \quad \text{[F/m]} \tag{10}$$

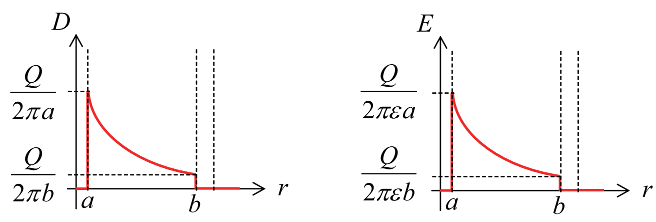

図 4　同軸線路内の電束・電界分布

[*1] 内導体に与えた正電荷はクーロン力によってお互い反発し合うので，内導体表面へ逃げるようにして落ち着く。また，内導体表面に誘起された正電荷に誘発されて，外導体内側には正電荷と等量の負電荷が集まる。

[*2] この面をガウス閉面 (Gaussian closed surface) と呼ぶ。

[*3] 自由に動ける真電荷 Q とは別に，誘電体表面の分極電荷 Q_b を考慮すれば，1 つ目のガウスの法則でも同じ結果を導くことができる。