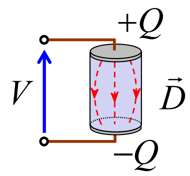
コンデンサの接続

1st. 2016/05/17
Lst. 2021/12/06

キャパシタンス

キャパシタンス C の定義・・・
単位電圧 1V を加えたときの蓄積電荷量 Q [C/V] = [F]



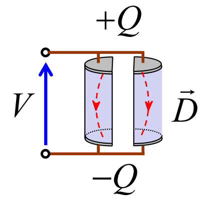
電荷　　電圧

$$Q = CV$$

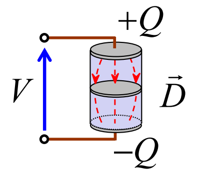
比例定数
キャパシタンスと呼ぶ

[C] = [C/V] × [V]

※加える電圧 V が大きいほど
蓄積電荷 Q は大きくなる

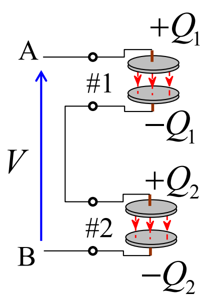


縦に2分割した
ときは？



横に2分割した
ときは？

コンデンサの直列接続



$$\begin{cases} Q_1 & \text{コンデンサ1に電圧}V_1\text{が加わることによる電荷} \\ Q_2 & \text{コンデンサ2に電圧}V_2\text{が加わることによる電荷} \\ Q_1 = Q_2 = Q & \text{端子Aに蓄えられる電荷の総量} \end{cases}$$

#1と#2を結ぶ導線内の電荷はもともと
中性なので±ゼロ（電荷保存の法則）

$$V = V_1 + V_2$$
$$= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q = \frac{1}{C} Q$$
$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

合成
キャパシタンスC

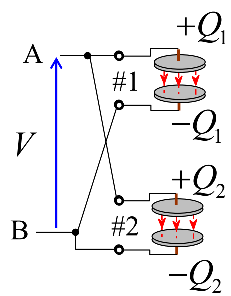
AB間の合成キャパシタンス

$$\boxed{C_{\mathrm{AB}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}$$

各コンデンサの電圧

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{Q}{C_1} = \dfrac{C}{C_1} V \\ V_2 = \dfrac{Q}{C_2} = \dfrac{C}{C_2} V \end{cases}$$

コンデンサの並列接続



$$\begin{cases} Q_1 & \text{コンデンサ\#1に共通電圧Vが加わることによる電荷} \\ Q_2 & \text{コンデンサ\#2に共通電圧Vが加わることによる電荷} \\ Q = Q_1 + Q_2 & \text{端子Aに蓄えられる電荷の総量} \end{cases}$$

$$V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$
$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V = CV$$
$$\Rightarrow C = C_1 + C_2$$

合成キャパ
シタンスC

AB間の合成キャパシタンス

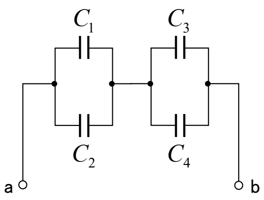
$$\boxed{C_{\mathrm{AB}} = C_1 + C_2}$$

各コンデンサの電荷

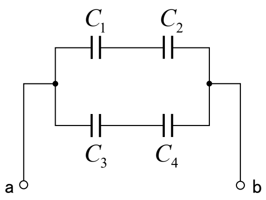
$$\begin{cases} Q_1 = C_1 V = C_1 \dfrac{Q}{C} = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} Q \\ Q_2 = C_2 V = C_2 \dfrac{Q}{C} = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2} Q \end{cases}$$

コンデンサの接続1

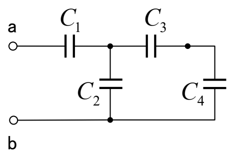
【例題】次の回路の合成容量C_{ab} を求めよ。(教科書, 演習3.6)
(1) 図(a)において、C_1 = 0.1 μF, C_2 = 0.2 μF, C_3 = 0.3 μF, C_4 = 0.4 μF
(2) 図(b)において、C_1 = 0.5 μF, C_2 = 0.5 μF, C_3 = 0.5 μF, C_4 = 0.5 μF
(3) 図(c)において、C_1 = 100 pF, C_2 = 100 pF, C_3 = 100 pF, C_4 = 100 pF



(a)



(b)



(c)

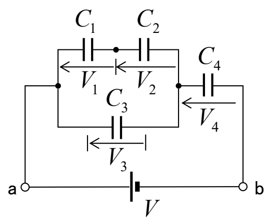
答え：(a) 0.21 μF, (b) 0.5 μF, (c) 60 pF

コンデンサの接続2

【例題】図において、C_1 = 1 μF, C_2 = 2 μF, C_3 = 3 μF, C_4 = 4 μF で あり、電源にDC 100 Vが加えられている。(1)合成容量C_{ab}を求めよ。(2) 各コンデンサの電荷を求めよ。(3) 各コンデンサに加わる電圧を求めよ。

D. K. Cheng, Field and waves electromagnetics 2nd ed., pp.127–128, Addison–Wesley, 1992

$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ Q_2 + Q_3 = Q_4 \\ V_1 + V_2 = V_3 \quad \Rightarrow \dfrac{Q_1}{C_1} + \dfrac{Q_2}{C_2} = \dfrac{Q_3}{C_3} \\ V_3 + V_4 = 100 \quad \Rightarrow \dfrac{Q_3}{C_3} + \dfrac{Q_4}{C_4} = 100 \end{cases}$$



$$\begin{cases} Q_1 = Q_2 \\ Q_2 + Q_3 = Q_4 \\ Q_1 + \dfrac{Q_2}{2} = \dfrac{Q_3}{3} \\ \dfrac{Q_3}{3} + \dfrac{Q_4}{4} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_1 - Q_2 = 0 & (1) \\ Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0 & (2) \\ 6Q_1 + 3Q_2 - 2Q_3 = 0 & (3) \\ 4Q_3 + 3Q_4 = 1200 & (4) \end{cases}$$

この連立方程式を解くと

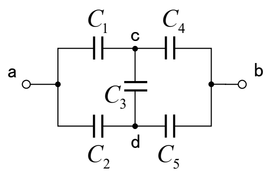
$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 34.78 \\ 34.78 \\ 156.52 \\ 191.30 \end{Bmatrix}$$

答え：(1) C_{ab}=1.91 μF (2) Q_1=34.78 μC, Q_2=34.78 μC, Q_3=156.52 μC, Q_4=191.30 μC (3) 34.78 V, 17.39 V, 52.17 V, 47.83 V

コンデンサの接続3

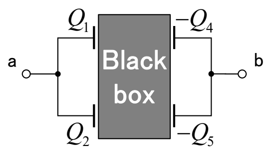
【演習】図(d) において、C_1 = 12 μF, C_2 = 24 μF, C_3 = 18 μF, C_4 = 36 μF, C_5 = 6 μ である。端子ab間に100 Vの電圧を加えたとき、端子dc間の電位差V_{dc}を求めよ。また、合成容量C_{ab}を求めよ。(教科書, 演習3.7)

$$\begin{cases} -Q_1 + Q_3 + Q_4 = 0 \\ -Q_2 - Q_3 + Q_5 = 0 \\ V_1 + V_4 = V \quad \Rightarrow \dfrac{Q_1}{C_1} + \dfrac{Q_4}{C_4} = V \\ V_2 + V_5 = V \quad \Rightarrow \dfrac{Q_2}{C_2} + \dfrac{Q_5}{C_5} = V \\ V_1 + V_3 = V_2 \quad \Rightarrow \dfrac{Q_1}{C_1} + \dfrac{Q_3}{C_3} = \dfrac{Q_2}{C_2} \end{cases}$$



(d)

＝
等価



(d)

$$\begin{cases} -Q_1 + Q_3 + Q_4 = 0 \\ -Q_2 - Q_3 + Q_5 = 0 \\ \dfrac{Q_1}{12} + \dfrac{Q_4}{36} = 100 \\ \dfrac{Q_2}{24} + \dfrac{Q_5}{6} = 100 \\ \dfrac{Q_1}{12} - \dfrac{Q_2}{24} + \dfrac{Q_3}{18} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -Q_1 + Q_3 + Q_4 = 0 & (1) \\ -Q_2 - Q_3 + Q_5 = 0 & (2) \\ 3Q_1 + Q_4 = 3600 & (3) \\ Q_2 + 4Q_5 = 2400 & (4) \\ 6Q_1 - 3Q_2 + 4Q_3 = 0 & (5) \end{cases}$$

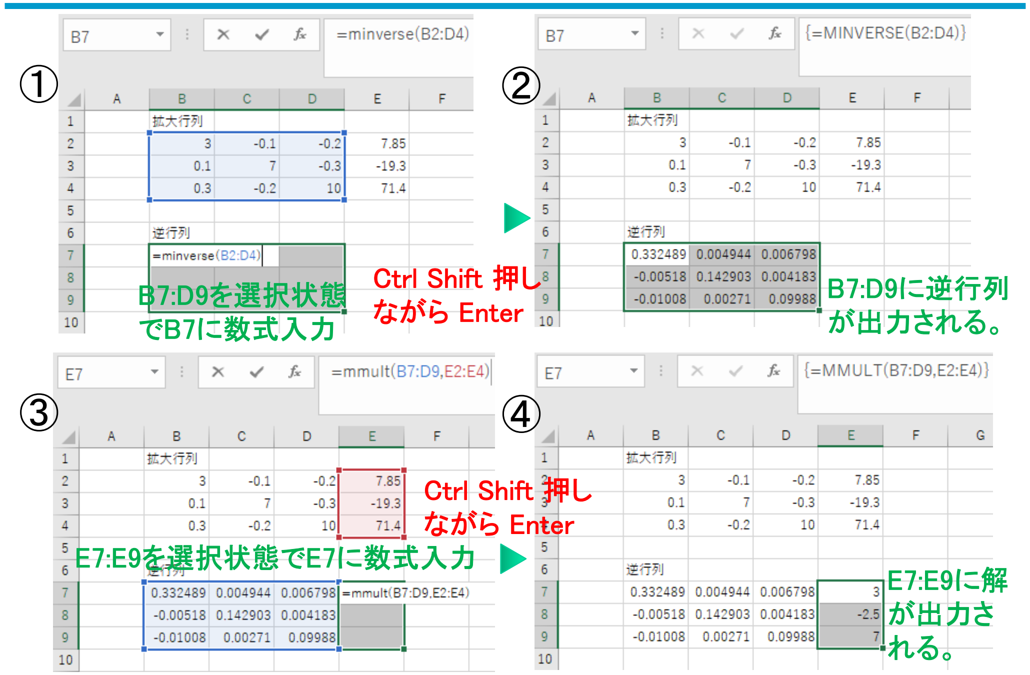
連立方程式を解くと

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 774.68 \\ 881.01 \\ -501.27 \\ 1275.95 \\ 379.75 \end{Bmatrix}$$

(C_1, C_3, C_4をY−Δ変換しても良い)

答え：V_{dc}=27.8 V, V_1=64.56 V, V_2=36.71 V, V_3=−27.85 V, V_4=35.44 V, V_5=63.33 V
Q_1+Q_2=Q=1655.7 μCより, C_{ab}=Q/V=16.6 μF (C_3, C_4, C_5にキャパシタンスのΔ−Y変換を利用しても良い)

Excelによる連立方程式の解法



Excelによる連立方程式の解法

$$
\begin{cases}
Q_1 - Q_2 = 0 & \text{(2-1)} \\
Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0 & \text{(2-2)} \\
6Q_1 + 3Q_2 - 2Q_3 = 0 & \text{(2-3)} \\
4Q_3 + 3Q_4 = 1200 & \text{(2-4)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-Q_1 + Q_3 + Q_4 = 0 & \text{(3-1)} \\
-Q_2 - Q_3 + Q_5 = 0 & \text{(3-2)} \\
3Q_1 + Q_4 = 3600 & \text{(3-3)} \\
Q_2 + 4Q_5 = 2400 & \text{(3-4)} \\
6Q_1 - 3Q_2 + 4Q_3 = 0 & \text{(3-5)}
\end{cases}
$$

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		行列				列ベクトル
4		1	-1	0	0	0
5		0	1	1	-1	0
6		6	3	-2	0	0
7		0	0	4	3	1200
8						
9		逆行列				解ベクトル
10		0.391304	0.086957	0.101449	0.028986	34.78261
11		-0.6087	0.086957	0.101449	0.028986	34.78261
12		0.26087	0.391304	-0.04348	0.130435	156.5217
13		-0.34783	-0.52174	0.057971	0.15942	191.3043
14						

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3		行列					列ベクトル
4		-1	0	1	1	0	0
5		0	-1	-1	0	1	0
6		3	0	0	1	0	3600
7		0	1	0	0	4	2400
8		6	-3	4	0	0	0
9							
10		逆行列					解ベクトル
11		-0.20253	-0.07595	0.202532	0.018987	0.031646	774.6835
12		-0.1519	-0.55696	0.151899	0.139241	-0.10127	881.0127
13		0.189873	-0.3038	-0.18987	0.075949	0.126582	-501.266
14		0.607595	0.227848	0.392405	-0.05696	-0.09494	1275.949
15		0.037975	0.139241	-0.03797	0.21519	0.025316	379.7468
16							
17		Q1+Q2	1655.696				

（参考）インピーダンス回路のΔY変換

【例題】図に示すインピーダンス回路のΔY変換を求めよ。

【解答】ab間の入力インピーダンスは

$$Z_a + Z_b = Z_{ab} \parallel (Z_{ca} + Z_{bc}) \Rightarrow Z_a + Z_b = \frac{Z_{ab}(Z_{ca} + Z_{bc})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (1)$$

bc間の入力インピーダンスは

$$Z_b + Z_c = Z_{bc} \parallel (Z_{ab} + Z_{ca}) \Rightarrow Z_b + Z_c = \frac{Z_{bc}(Z_{ab} + Z_{ca})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (2)$$

ca間の入力インピーダンスは

$$Z_c + Z_a = Z_{ca} \parallel (Z_{bc} + Z_{ab}) \Rightarrow Z_c + Z_a = \frac{Z_{ca}(Z_{bc} + Z_{ab})}{Z_{ac} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (3)$$

(1)+(2)+(3)より

$$\boxed{Z_a + Z_b + Z_c = \frac{Z_{ab}Z_{ca} + Z_{bc}Z_{ca} + Z_{ab}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}} \quad (4)$$

(4)−(2)よりZ_aを求めると

$$Z_a = \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (5)$$

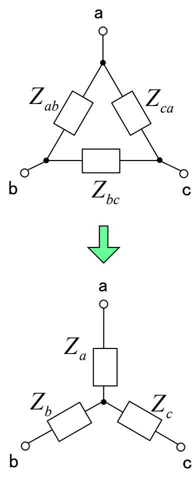
(4)−(3)よりZ_bを求めると

$$Z_b = \frac{Z_{ab}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (6)$$

(4)−(1)よりZ_cを求めると

$$Z_c = \frac{Z_{bc}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (7)$$

これでΔY変換ができた。



P. Vizmuller, RF design guide, p.227, Artech House, 1995
N. M. O. Sadiku, Electric Circuit 4th ed., p.53, McGraw-Hill, 2009

（参考）インピーダンス回路のYΔ変換

【例題】図に示すインピーダンス回路のYΔ変換を求めよ。

【解答】(5)(6)(7)より $Z_aZ_b + Z_bZ_c + Z_cZ_a$ を計算すると

$$Z_aZ_b + Z_bZ_c + Z_cZ_a = \frac{Z_{ab}Z_{ca} \cdot Z_{ab}Z_{bc}}{(Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca})^2} + \frac{Z_{ab}Z_{bc} \cdot Z_{bc}Z_{ca}}{(Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca})^2} + \frac{Z_{bc}Z_{ca} \cdot Z_{ab}Z_{ca}}{(Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca})^2}$$

$$= \frac{Z_{ab}Z_{bc}Z_{ca}(Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca})}{(Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca})^2} = \frac{Z_{ab}Z_{bc}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad (8)$$

従って、

$$\boxed{Z_aZ_b + Z_bZ_c + Z_cZ_a = \frac{Z_{ab}Z_{bc}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}}} \quad (9)$$

(9)÷(7)よりZ_{ab}を求めると

$$Z_{ab} = \frac{Z_aZ_b + Z_bZ_c + Z_cZ_a}{Z_c} \quad (10)$$

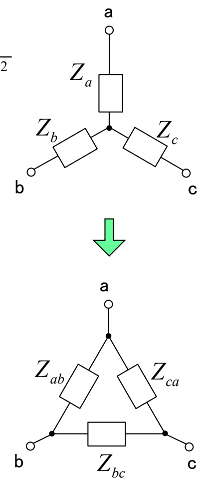
(9)÷(5)よりZ_{bc}を求めると

$$Z_{bc} = \frac{Z_aZ_b + Z_bZ_c + Z_cZ_a}{Z_a} \quad (11)$$

(9)÷(6)よりZ_{ca}を求めると

$$Z_{ca} = \frac{Z_aZ_b + Z_bZ_c + Z_cZ_a}{Z_b} \quad (12)$$

これでYΔ変換ができた。



P. Vizmuller, RF design guide, p.227, Artech House, 1995
N. M. O. Sadiku, Electric Circuit 4th ed., p.53, McGraw-Hill, 2009

（参考）コンデンサのΔY変換

【例題】図に示すコンデンサ回路のΔY変換を求めよ。

【解答】(5)より

$$\frac{1}{j\omega C_a} = \frac{\frac{1}{j\omega C_{ab}}\frac{1}{j\omega C_{ca}}}{\frac{1}{j\omega C_{ab}} + \frac{1}{j\omega C_{bc}} + \frac{1}{j\omega C_{ca}}} \Rightarrow \frac{1}{C_a} = \frac{\frac{1}{C_{ab}}\frac{1}{C_{ca}}}{\frac{1}{C_{ab}} + \frac{1}{C_{bc}} + \frac{1}{C_{ca}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_a} = \frac{C_{bc}}{C_{bc}C_{ca} + C_{ab}C_{ca} + C_{ab}C_{bc}} \qquad \therefore \boxed{C_a = \frac{C_{bc}C_{ca} + C_{ab}C_{ca} + C_{ab}C_{bc}}{C_{bc}}}$$

(6)より

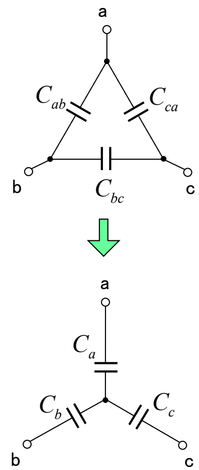
$$\frac{1}{j\omega C_b} = \frac{\frac{1}{j\omega C_{ab}}\frac{1}{j\omega C_{bc}}}{\frac{1}{j\omega C_{ab}} + \frac{1}{j\omega C_{bc}} + \frac{1}{j\omega C_{ca}}} \Rightarrow \frac{1}{C_b} = \frac{\frac{1}{C_{ab}}\frac{1}{C_{bc}}}{\frac{1}{C_{ab}} + \frac{1}{C_{bc}} + \frac{1}{C_{ca}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C_b} = \frac{C_{ca}}{C_{bc}C_{ca} + C_{ab}C_{ca} + C_{ab}C_{bc}} \qquad \therefore \boxed{C_b = \frac{C_{bc}C_{ca} + C_{ab}C_{ca} + C_{ab}C_{bc}}{C_{ca}}}$$

(7)より

$$\frac{1}{j\omega C_c} = \frac{\frac{1}{j\omega C_{bc}}\frac{1}{j\omega C_{ca}}}{\frac{1}{j\omega C_{ab}} + \frac{1}{j\omega C_{bc}} + \frac{1}{j\omega C_{ca}}} \Rightarrow \frac{1}{C_c} = \frac{\frac{1}{C_{bc}}\frac{1}{C_{ca}}}{\frac{1}{C_{ab}} + \frac{1}{C_{bc}} + \frac{1}{C_{ca}}}$$

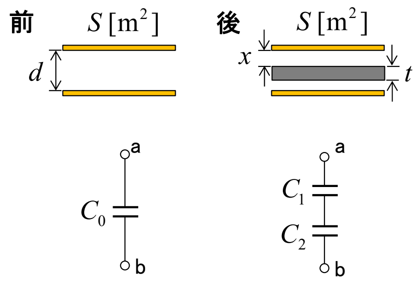
$$\Rightarrow \frac{1}{C_c} = \frac{C_{ab}}{C_{bc}C_{ca} + C_{ab}C_{ca} + C_{ab}C_{bc}} \qquad \therefore \boxed{C_c = \frac{C_{bc}C_{ca} + C_{ab}C_{ca} + C_{ab}C_{bc}}{C_{ab}}}$$



コンデンサの合成容量

【例題】面積S [m²]、間隔d [m]の平行平板コンデンサの間に厚さt [m]の金属板を挟んだときの静電容量を求めよ。（教科書, 例題3.7）

【解答】金属板を挿入する前の静電容量をC_0、挿入後の静電容量をCとすると



$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad (2) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \qquad (2)'$$

ここで、C_1, C_2は

$$C_1 = \varepsilon_0 \frac{S}{x}, \quad C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d-x-t} \qquad (3)$$

(3)を(2)' に代入してCを求めると

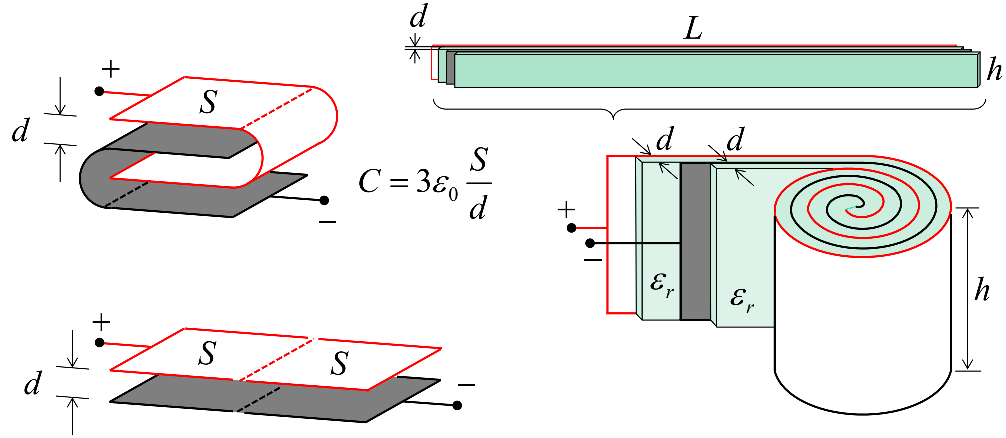
$$C = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{x} \varepsilon_0 \frac{S}{d-x-t}}{\varepsilon_0 \frac{S}{x} + \varepsilon_0 \frac{S}{d-x-t}} = \varepsilon_0 S \frac{\frac{1}{x}\frac{1}{d-x-t}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{d-x-t}} = \varepsilon_0 S \frac{\frac{1}{x(d-x-t)}}{\frac{d-t}{x(d-x-t)}} = \varepsilon_0 S \frac{1}{d-t} \qquad (4)$$

ただし、この場合は以下のように(3)を(2)に代入して逆数を求める方が計算量が少なく済む。

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{x}{\varepsilon_0 S} + \frac{d-x-t}{\varepsilon_0 S} = \frac{d-t}{\varepsilon_0 S} \qquad \therefore C = \frac{\varepsilon_0 S}{d-t} \qquad (5)$$

積層キャパシタ

【例題】図に示すサンドイッチ型のキャパシターの静電容量を求めよ。



$$C = 3\varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

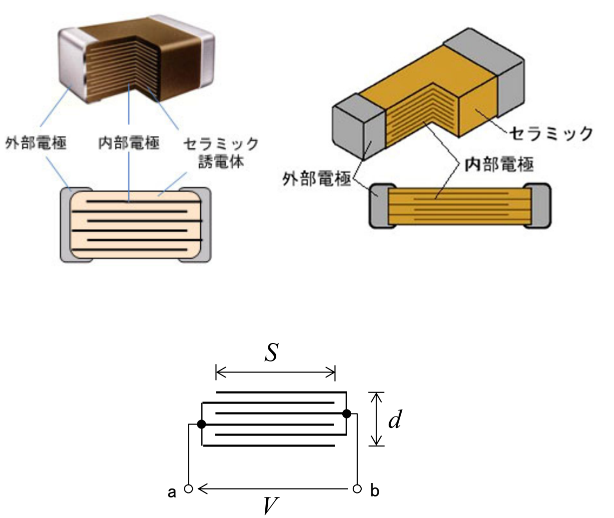
$$C = \varepsilon_0 \frac{2S}{d}$$

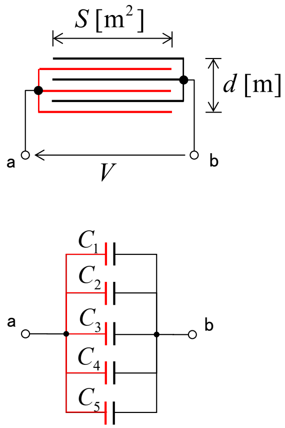
$$C = 2\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{Lh}{d}$$

原, 理工系の基礎物理 電磁気学, p.71, 学術図書　　　　川西, 電磁気学, p.68, コロナ社

チップ積層キャパシタ

【例題】図に示す積層型キャパシター（チップキャパシタ）の静電容量を求めよ。





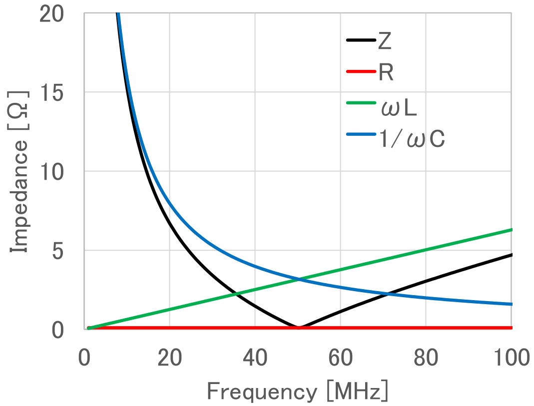
$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d/5} = 5\varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

http://ednjapan.com/edn/articles/1205/24/news099_2.html

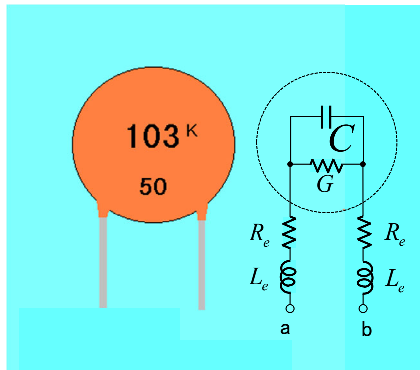
リードキャパシタの周波数特性例

【例題】C=1 nF, R_e=0.1 Ω, L_e=10 nH のとき、コンデンサの自己共振周波数を求めよ。ただし、R_e, L_eはリード線の実効抵抗とインダクタンスとする。

$$|Z| = \sqrt{R_e^2 + \left(\omega L_e - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$



リードキャパシタの
直列簡易等価回路



$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_e C}} = 50\ \mathrm{MHz}$$