真空中の静電エネルギーと力

1st. 2020/11/24
Lst. 2021/12/06

電磁気エネルギーのまとめ

	電気エネルギー	磁気エネルギー
回路素子 電極又は導線	$W_e=\int_0^V Cvdv=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ [J] (1)	$W_m=\int_0^I Lidi=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\varphi I$ [J] (3)
誘電体・磁性体 電極又は巻線 内部のコア材料	$u_e=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\frac{D}{\varepsilon}D=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$ $[\mathrm{J/m^3}]=[\mathrm{N/m^2}]=[\mathrm{Pa}]$ (2)	$u_m=\frac{1}{2}HB=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\frac{B}{\mu}B=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$ $[\mathrm{J/m^3}]=[\mathrm{N/m^2}]=[\mathrm{Pa}]$ (4)

※ 単位体積あたりのエネルギー [J/m³] は [J] = [N・m] の関係より、圧力(応力) [N/m²] = [Pa] に等しい。

回路の電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$$I=I_C+I_R \quad (1)$$

ここで,

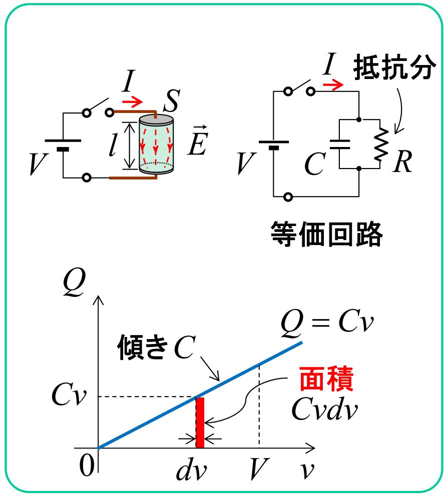
$$I_C=\frac{dQ}{dt},\ I_R=\frac{v}{R}=Gv,\ Q=Cv \quad (2)$$

を式 (1) に代入すると

$$I=\frac{dQ}{dt}+Gv=C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R} \quad (3)$$

両辺に vdt を掛けると

$$\underbrace{vIdt}_{\text{電源がした仕事 } W_s\,[\mathrm{J}]}=\underbrace{Cvdv}_{\text{dv 上がったことで蓄えられたエネルギー } W_e\,[\mathrm{J}]\text{（面積 Cvdv に等しい）}}+\underbrace{(v^2/R)dt}_{\text{抵抗の発熱（ジュール熱）} W_j\,[\mathrm{J}]} \quad (4)$$



コンデンサに加える電圧 v を 0 → V に増やしたとき，コンデンサ全体の蓄積エネルギーは

$$W_e=\int_0^V Cvdv=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\ [\mathrm{J}] \quad (5)$$

ただし，電池のした仕事は電源が一定値なので

$$W_s=QV\ [\mathrm{J}] \quad (6)$$

空気コンデンサの電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$$I=\frac{dQ}{dt}+\frac{v}{R} \quad (1)$$

電源が微小時間 dt の間にする仕事は

$$dW_S=vIdt \quad (2)$$

(1) の両辺に vdt を掛けると

$$\underbrace{vIdt}_{\text{電源がした仕事 } dW_s\,[\mathrm{J}]}=\underbrace{vdQ}_{\text{dQ 増えたことで蓄えられたエネルギー } dW_e\,[\mathrm{J}]}+\underbrace{(v^2/R)dt}_{\text{抵抗の発熱（ジュール熱）} dW_j\,[\mathrm{J}]} \quad (3)$$

所で，ガウスの法則より

$$\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_0},\ \Rightarrow ES=\frac{Q}{\varepsilon_0},\ E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (4)$$

コンデンサの電位差 v は

$$v=-\int_0^l \vec{E}\bullet d\vec{l}=El=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l \quad (5)$$

(3)の右辺第1項目は

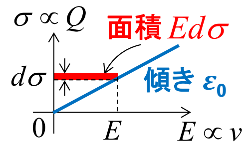
$$dW_e=vdQ=ElS(d\sigma) \quad (6)$$

空気の全体積 Sl [m³] に対して単位体積あたりの蓄積エネルギーは

$$du_e=E(d\sigma)\quad [\mathrm{J/m^3}] \quad (7)$$

電荷を 0 → Q に増やしたとき，即ち，電荷密度が 0 → σ に増えたとき

$$u_e=\int du_e=\int_0^\sigma Ed\sigma=\int_0^\sigma \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d\sigma \quad (8)$$



従って、蓄積エネルギーは

$$u_e=\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}E\sigma\quad [\mathrm{J/m^3}] \quad (9)$$

導体球の静電エネルギー

【例題】半径a [m]の導体球に電荷Q [C]があるとき、この導体球のもつエネルギーを求めよ。(例題3.8)

【解答】コンデンサの蓄積エネルギーは

$$W_e=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\quad[\mathrm{J}]\qquad(1)$$

半径a [m]の孤立導体が作る電界は、ガウスの法則より

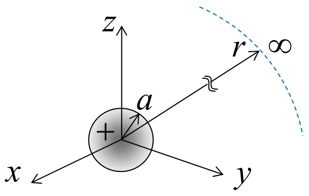
$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oint_S Eds=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E\oint_S ds=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E4\pi r^2=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\qquad(2)$$



無限遠に負電荷が誘導されると考えた場合、導体間の電位差は

$$V=-\int_{r=\infty}^{a}\vec{E}\bullet d\vec{r}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r=\infty}^{a}\frac{1}{r^2}dr$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{a}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\infty}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\qquad(3)$$

静電容量は

$$\Rightarrow C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}}=4\pi\varepsilon_0 a\ [\mathrm{F}]\qquad(4)$$

(4)を(1)に代入して

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\quad[\mathrm{J}]\qquad(5)$$

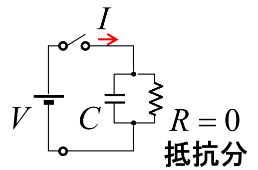
コンデンサの静電エネルギー

【例題】静電容量2μFのコンデンサに50 Vの電圧を加えたとき、コンデンサに蓄えられる電荷とエネルギーを求めよ。(教科書，例題3.9)

【解答】

コンデンサの蓄積電荷は

$$Q=CV=2\times10^{-6}(50)=10^{-4}\quad[\mathrm{C}]\qquad(1)$$



$C=2\ \mu\mathrm{F}$

$V=50\ \mathrm{V}$

コンデンサ全体の蓄積エネルギーは

$$W_e=\underbrace{\frac{1}{2}CV^2}_{①}=\underbrace{\frac{1}{2}QV}_{②}=\underbrace{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}_{③}\quad[\mathrm{J}]\qquad(2)$$

$$① =\frac{1}{2}(2\times10^{-6})(50)^2=2.5\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

$$② =\frac{1}{2}(10^{-4})(50)=2.5\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

$$③ =\frac{1}{2}\frac{(10^{-4})^2}{2\times10^{-6}}=0.25\times10^{-2}\ \mathrm{J}$$

コンデンサ全体の電気エネルギーの式①②③どれを使っても答えは同じ。

帯電導体にはたらく力

【例題】半径a [m]の導体球に電荷Q [C]があるとき、導体表面にはたらく単位面積あたりの力を求めよ。また、電荷が−Q [C]のときはどうなるか。(教科書，例題3.10)

【解答】半径a [m]の孤立導体が作る電界は、ガウスの法則より

$$\oint_S \vec{E}\bullet d\vec{s}=\frac{Q}{\varepsilon_0}\quad\therefore E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\qquad(1)$$

電位は

$$V=-\int_{r=\infty}^{a}\vec{E}\bullet d\vec{r}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r=\infty}^{a}\frac{1}{r^2}dr$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{a}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\infty}\right)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\qquad(2)$$

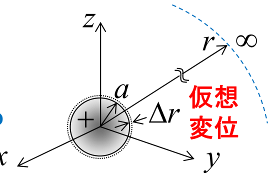
キャパシタンスは

$$\Rightarrow C=\frac{Q}{V}=\frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}}=4\pi\varepsilon_0 a\ [\mathrm{F}]\qquad(3)$$

電気エネルギーは

$$W_e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}\quad[\mathrm{J}]\qquad(4)$$

無限遠のグラウンドに誘起された負電荷との間に吸引力がはたらいていると考えることができる。



単位体積あたりの電気エネルギーは

$$u_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi r^2}\right)^2\quad[\mathrm{J/m^3}]\qquad(5)$$

導体球表面ではr=aを代入して

$$u_e=\frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi a^2}\right)^2=\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\quad[\mathrm{J/m^3}]\qquad(6)$$

$$=[\mathrm{N/m^2}]$$

$$=[\mathrm{Pa}]$$

の圧力が外向きに加わる。

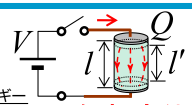
−Qの場合も外向きの圧力

仮想変位の仕事

エネルギー保存則より、

$$dW_e+dW_k=dW_s\qquad(1)$$

電気エネルギー　機械エネルギー　電源のエネルギー



仮想変位

電気エネルギーは

$$dW_e=\frac{\partial W_e}{\partial x}dx+\frac{\partial W_e}{\partial y}dy+\frac{\partial W_e}{\partial z}dz$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial W_e}{\partial x} & \frac{\partial W_e}{\partial y} & \frac{\partial W_e}{\partial z}\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}$$

$$=\nabla W_e\bullet d\vec{l}\qquad(2)$$

機械エネルギーは

$$dW_k=\begin{pmatrix}F_x & F_y & F_z\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix}$$

$$=\vec{F}\bullet d\vec{l}\qquad(3)$$

(2)+(3)と(1)より、

$$dW_e+dW_k=\nabla W_e\bullet d\vec{l}+\vec{F}\bullet d\vec{l}$$

$$(\nabla W_e+\vec{F})\bullet d\vec{l}=dW_s\qquad(4)$$

電荷が dQ増えることは，電流の定義より

$$I=dQ/dt\quad\Rightarrow\quad dQ=Idt\qquad(5)$$

なる電流が流れるので、電源は

$$dW_s=VIdt=VdQ\qquad(6)$$

の仕事をする(エネルギーを供給する)。

ここで、電気エネルギーの増分は

$$dW_e=\frac{1}{2}VdQ=\frac{1}{2}dW_s\qquad(7)$$

となるので、(4)に(7)を代入して，

$$(\nabla W_e+\vec{F})\bullet d\vec{l}=2dW_e\qquad(8)$$

さらに、(8)に(2)を代入して，

$$(\nabla W_e+\vec{F})\bullet d\vec{l}=2\nabla W_e\bullet d\vec{l}\qquad(9)$$

従って、働く力は

$$\vec{F}=\nabla W_e\qquad(10)$$

一方、電源が仕事をしないときは(4)より

$$\vec{F}=-\nabla W_e\qquad(11)$$

D. K. Cheng, Field and wave for electromagnetics 2nd ed., p.289, Addison Wesley

帯電導体にはたらく力

【例題】半径a [m]の導体球に電荷Q [C]があるとき、導体表面にはたらく単位面積あたりの力を求めよ。また、電荷が−Q [C]のときはどうなるか。（教科書，例題3.10）

【別解】電源が仕事をしないとき（電池が接続されていない）の仮想変異の式より

$$\vec{F} = -\nabla W_e \qquad (1)$$

$$\vec{F} = -\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) W_e$$

球対象のため、W_eはr方向にしか依存しないので

$$\vec{F} = -\hat{r}\frac{d}{dr}W_e \qquad (2)$$

ここで、rだけ仮想変位したときの電気エネルギーは

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \quad [\mathrm{J}] \qquad (3)$$

これを(2)に代入して、力を求めると

$$\vec{F} = -\hat{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right) = \hat{r}\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2} \quad [\mathrm{N}] \qquad (4)$$

導体球表面ではr=aを代入して

$$\vec{F} = -\hat{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r}\right) = \hat{r}\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2} \qquad (5)$$

導体球表面の単位面積あたりでは

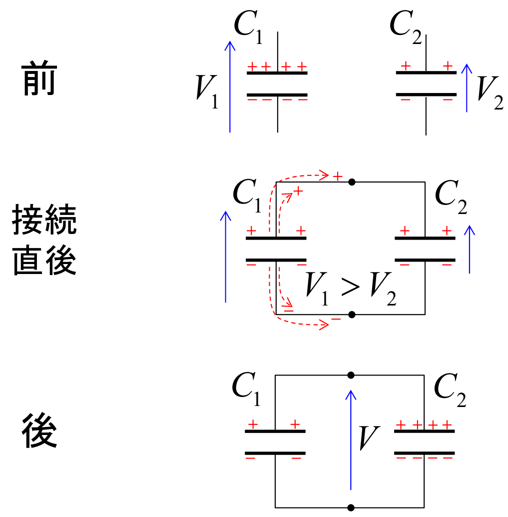
$$\vec{f} = \hat{r}\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a^2 (4\pi a^2)} = \hat{r}\frac{1}{2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{(4\pi a^2)}$$

$$= \hat{r}\frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma^2 \quad [\mathrm{N/m^2}] = [\mathrm{Pa}] \qquad (6)$$

即ち、外向きr方向に圧力を生じる。

コンデンサの接続とエネルギー

【例題】演習教科書応用問題3.6において，C_1=1 μF, C_2=2 μF, V_1=4 V, V_2=1 Vとしたときの接続前後のエネルギー変化を計算し，失われたエネルギーがどこにいったか考察せよ。



電荷の移動

C_2の充電エネルギーのちょうど2倍のエネルギーがC_1（電源に相当）から供給される必要がある。

数値代入計算例

【解答例】

前

$$\begin{cases} C_1 = 1\,\mu\mathrm{F} & V_1 = 4\,\mathrm{V} \\ C_2 = 2\,\mu\mathrm{F} & V_2 = 1\,\mathrm{V} \end{cases}$$

⇨

後

$$\begin{cases} C_1 = 1\,\mu\mathrm{F} \\ C_2 = 2\,\mu\mathrm{F} \end{cases} \quad V = 2\,\mathrm{V}$$

$W_1 = \frac{1}{2}C_1 V_1^2$ → W_1 [μJ] ← $W_1' = \frac{1}{2}C_1 V^2$

$W_2 = \frac{1}{2}C_2 V_2^2$ → W_2 [μJ] ← $W_2' = \frac{1}{2}C_2 V^2$

$V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$ → V_2 [V]

$Q_1 = C_1 V_1$ → Q_1 [μC] ← $Q_1' = C_1 V$

$Q_2 = C_2 V_2$ → Q_2 [μC] ← $Q_2' = C_2 V$

	前	後	増減
W_1 [μJ]	8	2	-6
W_2 [μJ]	1	4	+3
$W=W_1+W_2$ [μJ]	9	6	-3 ※
V_1 [V]	4	2	-2
V_2 [V]	1	2	+1
V [V]	-	2	-
Q_1 [μC]	4	2	-2
Q_2 [μC]	2	4	+2
$Q=Q_1+Q_2$ [μC]	6	6	0

※失われた3Jは、電荷の一部がC_1からC_2へ移動する際に流れる電流Iが配線の抵抗分Rを通ることにより、$P=RI^2$の熱として消費される。

（参考）充電の過渡現象1

キルヒホッフの電流則より

$$V - \frac{q}{C} - IR = 0 \quad \cdots(1)$$

t=0でq=0なので

$$I_0 = \frac{V}{R} \quad \cdots(2)$$

このとき電圧降下はすべて抵抗で生じる。tが十分大きくなるとコンデンサには最大電荷量Qに帯電し，それ以上電流は流れなり，次の定常状態になる。

$$Q = CV \quad \cdots(3)$$

(1)をtで微分すると，

$$\frac{d}{dt}\left(V - \frac{q}{C} - IR\right) = 0 \quad \cdots(4)$$

$$0 - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} - R\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\boxed{R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0}$$

Iに関する
1階常微分方程式

$$RdI + \frac{I}{C}dt = 0$$

$$\frac{dI}{I} + \frac{dt}{CR} = 0$$

$$\frac{dI}{I} = -\frac{1}{CR}dt \quad \cdots(4)'$$

t=0で$I=I_0$であり，CR=τ が定数であることを使えば両辺定積分できるので，

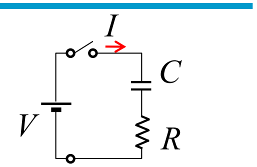
$$\int_{I=I_0}^{I}\frac{1}{I}dI = -\frac{1}{CR}\int_{t=0}^{t}dt \quad \cdots(5)$$

$$\ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t}{CR}$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{CR}} \quad \cdots(5)'$$

$$\boxed{I = \frac{V}{R}e^{-\frac{t}{CR}}}$$



配線抵抗

Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.799, 学術図書

（参考）充電の過渡現象2

I=dq/dtであるから(5)' より

$$\boxed{\frac{dq}{dt}=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{CR}}}\quad\cdots(6)$$

qに関する
1階常微分方程式

$$dq=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{CR}}dt\quad\cdots(6)$$

t=0でq=0であるから両辺定積分すると,

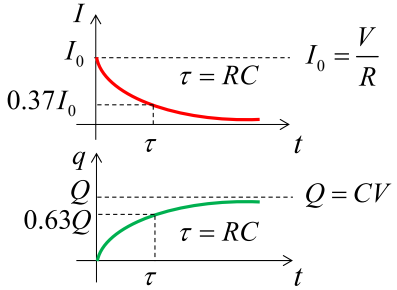
$$\int_{q=0}^{q}dq=\frac{V}{R}\int_{t=0}^{t}e^{-\frac{t}{CR}}dt\quad\cdots(7)$$

$$q=\frac{V}{R}\left[-RCe^{-\frac{t}{CR}}\right]_{t=0}^{t}$$

$$q=-CV\left(e^{-\frac{t}{CR}}-1\right)$$

$$q=CV\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$$

$$\boxed{q=Q\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)}\quad\cdots(7)'$$



所で，電池がした仕事は

$$W_S=V\,[\mathrm{J/C}]\cdot Q\,[\mathrm{J/C}]=QV\,[\mathrm{J}]$$

コンデンサに蓄えられたエネルギーは

$$W_e=\frac{1}{2}CV^2\,[\mathrm{J}]$$

ちょうど電池のした仕事の半分になっている。

Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.799, 学術図書

（参考）充電の過渡現象3

このとき，抵抗で消費されるエネルギーは

$$W_R=\int_{t=0}^{\infty}RI^2dt$$

$$=\int_{t=0}^{\infty}R\left(I_0e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2dt$$

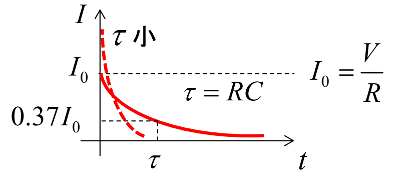
$$=\int_{t=0}^{\infty}R\left(\frac{V}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}\right)^2dt$$

$$=\int_{t=0}^{\infty}\frac{V^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$=\frac{V^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty}$$

$$=-\frac{1}{2}CV^2\left(e^{-\infty}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV$$



理想的な場合として，配線抵抗Rがゼロの場合はτ=0に漸近するため、一気にパルス状の充電電流が流れる。このときは初期電流I_0も大きくなって火花に近い形でエネルギーが空間に消費される。

コンデンサの蓄積エネルギーと同じ＝
電池のした仕事の半分がコンデンサの充電エネルギーとなり，半分が熱エネルギーとして消失

Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.799, 学術図書
川勝, 川勝先生の物理授業（下巻）, pp, 72–73, 海鳴社

（参考）放電の過渡現象1

キルヒホッフの電流則より

$$IR=\frac{q}{C}\quad\cdots(1)$$

ここで，電流はコンデンサの電荷の減少率に等しいので(2)を(1)に代入して

$$I=-\frac{dq}{dt}\quad\cdots(2)$$

$$-R\frac{dq}{dt}=\frac{q}{C}\quad\cdots(3)$$

$$\frac{dq}{q}=-\frac{1}{RC}dt\quad\cdots(3)'$$

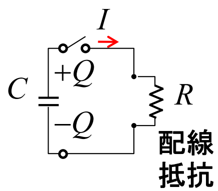
t=0のときq=Q（初期電荷）であるから，両辺を定積分すると

$$\int_{q=Q}^{q}\frac{dq}{q}=-\frac{1}{RC}\int_{t=0}^{t}dt\quad\cdots(4)$$

$$\ln\left(\frac{q}{Q}\right)=-\frac{t}{RC}\quad\cdots(4)'$$

$$\frac{q}{Q}=e^{-\frac{t}{RC}}\quad\cdots(4)''$$

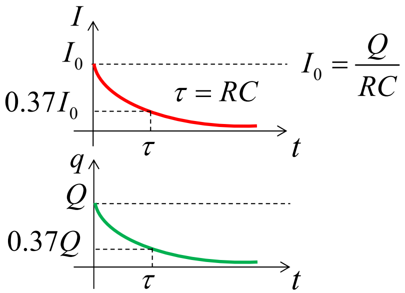
$$q=Qe^{-\frac{t}{RC}}\quad\cdots(4)'''$$



(2)より

$$I=-\frac{dq}{dt}=\frac{Q}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\quad\cdots(5)$$

$$I=I_0e^{-\frac{t}{RC}}\quad\cdots(5)'$$



Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.801, 学術図書

（参考）放電の過渡現象2

このとき，抵抗で消費されるエネルギーは

$$W_R=\int_{t=0}^{\infty}RI^2dt\quad\cdots(6)$$

$$=\int_{t=0}^{\infty}R\left(I_0e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2dt$$

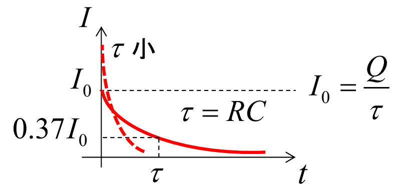
$$=\int_{t=0}^{\infty}R\left(\frac{Q}{RC}\right)^2e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$=\int_{t=0}^{\infty}\frac{V^2}{R}e^{-\frac{2t}{RC}}dt$$

$$=\frac{V^2}{R}\left[-\frac{RC}{2}e^{-\frac{2t}{RC}}\right]_0^{\infty}$$

$$=-\frac{1}{2}CV^2\left(e^{-\infty}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}CV^2$$



理想的な場合として，配線抵抗Rがゼロの場合はτ=0に漸近するため、一気にパルス状の放電電流が流れる。このときは初期電流I_0も大きくなって火花に近い形でエネルギーが空間に消費される。

コンデンサの蓄積エネルギーと同じ＝
放電エネルギーはすべて熱エネルギーとして消失

Serway, 科学者と技術者sのための物理学III電磁気学, p.801, 学術図書