誘電体を含むガウスの法則 (演習問題)

v1.8 Dec.2020　　　　番号:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. ♣ 比誘電率 ε_r の誘電体中に半径 a [m] の導体球がある。(1) 導体球に電荷 Q [C] を与えたとき，誘電体中の電界と導体球の電位，および導体表面に現れる分極電荷の面電荷密度を求めよ。(2) $\varepsilon_r = 1$（真空），$\varepsilon_r = 1.006$（空気），$\varepsilon_r = 2$（テフロン），$\varepsilon_r = 8$（ガラス），$\varepsilon_r = 80$（水）の場合に現れる分極電荷密度は真電荷密度の何倍か。[*1]

2. ♢ 比誘電率 4.2 のガラスを用いて，容量 250 pF，耐電圧 50 kV の平行平板コンデンサを作るためには，電極間隔と電極面積を幾らにすればよいか。ただし，ガラスの絶縁耐力を 5 kV/mm とする。[*2]

3. ♢ 誘電率 ε [F/m] の誘電体中に Q [C] の点電荷があるとき，点電荷から距離 r [m] の点の電界の強さ，電位および分極を求めよ．[*3]

4. ♢ 半径 a [m] の導体球が，内半径 a [m]，外半径 b [m] で比誘電率 ε_r の誘電体層で覆われている。この導体球に電荷 Q [C] を与えたとき，次の各量を求めよ。(1) 誘電体外部の電界と電位，(2) 誘電体中の電界と電位 (3) 導体球の静電容量[*4]

5. ♢ 内球半径 a [m]，外球半径 b [m] の同心導体球形コンデンサがある。導体球間には，半径 R [m] の同心球面を境に誘電率 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ [F/m] の誘電体が詰められている。内導体球に電荷 $+Q$ [C] を与えたとき，(1) 導体球間の電界，(2) 内導体表面の電位，(3) 導体球間の静電容量を求めよ。ただし，外導体は接地されているものとする。[*5]

6. ♡ 比誘電率 ε_r の誘電体中に，半径 a [m] で単位長さ当たり q [C/m] に帯電した非常に長い円柱導体が置かれている。円柱の中心軸から距離 r [m] の点 $(r > a)$ の電束密度と電界の強さおよび分極 P を求めよ。また，距離 $r_1, r_2 (r_1 < r_2)$ の間の電位差 V_{12} を求めよ。[*6]

7. ♡ 内導体の半径 a [m]，外導体の内半径 b [m]，外半径 c [m] の無限長同軸導体がある。導体間には比誘電率 ε_r の誘電体が充てんされている。内外導体中にそれぞれ $+q, -q$ [C/m] の電荷を与えたとき，誘電体中の電束密度と電界の大きさを求めよ。また，内導体の表面と外導体表面それぞれの分極電荷密度を求めよ。[*7]

8. 内球半径 a [m]，外球半径 c [m] の円筒同軸導体がある。導体間には，半径 b [m] を境にして誘電率 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ [F/m] の誘電体が充填されている。内導体に電荷 λ [C/m] を与えたとき，(1) 導体間の電界，(2) 内導体表面の電位，(3) 導体球間の静電容量を求めよ。ただし，外導体は接地されているものとする。[*8]

9. 誘電体を含むガウスの法則と真空中のガウスの法則の違いを真電荷（自由電荷）と分極電荷の観点から説明せよ。[*9]

10. ベクトル形の誘電体を含むガウスの法則からスカラー形の誘電体を含むガウスの法則を導出し，図を用いて各変数をすべて説明せよ。ただし，$\vec{D} = D_t\hat{t} + D_n\hat{n}$ とし，$\hat{t}$ は積分面 S 上の接線方向単位ベクトル，$\hat{n}$ は積分面 S 上の法線方向単位ベクトルとする。[*10]

[*1] 答え：(1) $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a}$ [V], $\frac{Q}{4\pi a^2}(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1)$ [C/m^2],
(2) 0, 0.006, 0.5, 0.875, 0.9875 倍

[*2] 答え：0.01 m, 0.0672 m^2

[*3] 答え：$\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$ [V/m], $\frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$ [V], $\frac{Q}{4\pi r^2}(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})$ [C/m^2]

[*4] 答え：$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ [V/m], $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ [V] $(b < r)$,
$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$ [V/m], $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}[\frac{1}{b} + \frac{1}{\varepsilon_r}(\frac{1}{r} - \frac{1}{b})]$ $(a < r < b)$,
$\frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{b} + \frac{1}{\varepsilon_r}(\frac{1}{a} - \frac{1}{b})}$ [F]

[*5] 答え：$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_1 r^2}, \frac{Q}{4\pi\varepsilon_2 r^2}$ [V/m], $\frac{Q}{4\pi}[\frac{1}{\varepsilon_2}(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a} - \frac{1}{R})]$ [V],
$\frac{4\pi}{\frac{1}{\varepsilon_2}(\frac{1}{R} - \frac{1}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_1}(\frac{1}{a} - \frac{1}{R})}$ [F]

[*6] 答え：$\frac{q}{2\pi r}$ [C/m^2], $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$ [V/m], $\frac{q}{2\pi r}(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})$ [C/m^2], $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \ln \frac{r_2}{r_1}$ [V]

[*7] 答え：$\frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$ [V/m], $\frac{q}{2\pi r}(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})$ [C/m^2], $-\frac{q}{2\pi a}(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})$ [C/m^2], $\frac{q}{2\pi b}(1 - \frac{1}{\varepsilon_r})$ [C/m^2]

[*8] 答え：$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_1 r}, \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_2 r}$ [V/m], $\frac{\lambda}{2\pi}[\frac{1}{\varepsilon_2}\ln(\frac{c}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_1}\ln(\frac{b}{a})]$ [V],
$\frac{2\pi}{\frac{1}{\varepsilon_2}\ln(\frac{c}{b}) + \frac{1}{\varepsilon_1}\ln(\frac{b}{a})}$ [F]

[*9] 答え：誘電体を含むガウスの法則では誘電体表面に発生する分極電荷も考慮しているが，その分極電荷は電束密度の中で考慮されているため，法則を適用する場合には真電荷のみを考えればよい。

[*10] 答え：$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q, \rightarrow \oint_S (D_t\hat{t} + D_n\hat{n}) \bullet ds\hat{n} = Q, \rightarrow \oint_S D_n ds = Q$