誘電体を含むガウスの法則

1st. 2016/07/03
Lst. 2020/12/06

真空中のガウスの法則

プロトタイプバージョン

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

積分面が閉じていることを示す記号

積分面上の電界ベクトル

積分面を構成する微小面素ベクトル

積分面内部に含まれる真電荷

内積記号

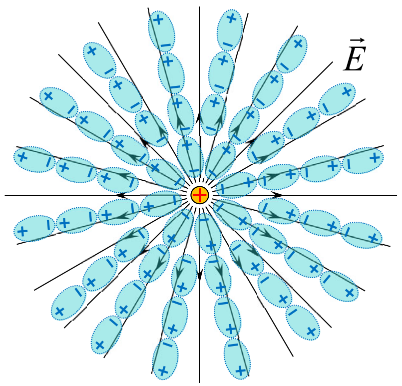
積分が積分面Sに沿った面積分であること示す記号

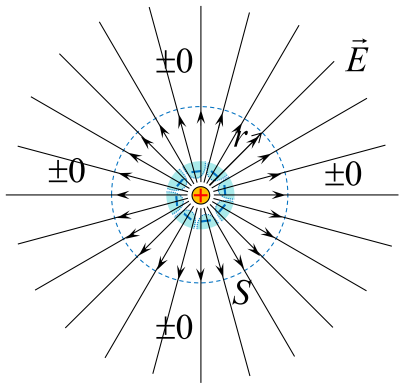
真空の誘電率 8.854×10^{-12}

[V/m] or [N/C] × [m²] = [C] ÷ [F/m]

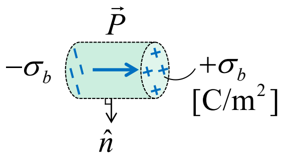
分極電荷の考慮

1. 真電荷により周囲に電界が発生
2. 周辺誘電体の分極による電気モーメントの発生





3. 発生した電気モーメントを等価分極電荷で考えたモデル



$$Q_b = \oint_S \vec{P} \bullet d\vec{s} \ \text{[C]}$$

分極と分極電荷

$$\vec{P} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$$

分極

分子1つあたりの電気ダイポールモーメント

誘電体の全体積

[C/m²] = [C/m] ÷ [m³]

単位体積当たりの平均的な電気ダイポールモーメント

$$\sigma_b = \vec{P} \bullet \hat{n}$$

分極電荷密度

分極

誘電体を外向きに貫く単位ベクトル

[C/m²] = [C/m²] × [無次元]

誘電体の表面に生じる等価電荷(単位面積あたり)

束縛電荷(分極電荷)

束縛電荷

積分面上の分極

$$Q_b = \oint_S \vec{P} \bullet d\vec{s}$$

積分が積分面Sに沿った面積分であること示す記号

積分面を構成する微小面素ベクトル

[C] = [C/m²] × [m²]

分極電荷の考慮1

修正バージョン

積分面が閉じていることを示す記号

積分路上の電界ベクトル

積分面を構成する微小面素ベクトル

積分面内部に含まれる真電荷

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q_b}{\varepsilon_0}$$

積分面内部に含まれる束縛電荷(分極電荷)

内積記号

積分が積分面Sに沿った面積分であること示す記号

真空の誘電率
8.854×10^{-12}

[V/m] or [N/C] × [m²] = [C] ÷ [F/m]

分極電荷の考慮2

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} - \frac{Q_b}{\varepsilon_0}$$

両辺 ε_0 倍すると

$$\Rightarrow \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \bullet d\vec{s} = Q - Q_b$$

Q_b を左辺に移動すると

$$\Rightarrow \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \bullet d\vec{s} + Q_b = Q$$

Q_b をPで置き換えると

$$\Rightarrow \oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \bullet d\vec{s} + \oint_S \vec{P} \bullet d\vec{s} = Q$$

面積分をまとめると

$$\Rightarrow \oint_S \underbrace{(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}_{\vec{D}} \bullet d\vec{s} = Q$$

電束密度と定義

誘電体版ガウスの法則

上位互換バージョン

積分面が閉じていることを示す記号

積分路上の電束密度ベクトル

積分面を構成する微小面素ベクトル

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q$$

内積記号

積分が積分面Sに沿った面積分であること示す記号

積分面内部に含まれる真電荷

[C/m²] × [m²] = [C]

電束密度の定義

$$\underbrace{\vec{D}}_{\text{電束密度}} = \underbrace{\varepsilon_0}_{\text{真空の誘電率}}\underbrace{\vec{E}}_{\text{電界}} + \underbrace{\vec{P}}_{\text{分極}}$$

真空の誘電率
8.854x10^{-12}

[C/m^2] = [F/m] × [V/m] + [C/m^2]

比誘電率の定義

$$\underbrace{\vec{D}}_{\text{電束密度}} = \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi_{\mathrm{e}})}_{\varepsilon_r}\underbrace{\vec{E}}_{\text{電界}}$$

電気感受率 [無次元]：χ_{e}

真空の誘電率：ε_0
8.854x10^{-12}

ε_r 比誘電率 [無次元]

[C/m^2] = [F/m] × [V/m]

電界と電束密度の関係

$$\underbrace{\vec{E}}_{\text{全電界}} = \underbrace{\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}}_{\text{外部電界}} - \underbrace{\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}}_{\text{内部電界}}$$

電界：$\vec{E}$　電束密度：$\vec{D}$　分極：$\vec{P}$

真空の誘電率：ε_0
8.854x10^{-12}

外部電界 $\vec{E}_{\mathrm{e}}$　内部電界 $\vec{E}_{\mathrm{m}}$

[V/m] = [C/m^2] ÷ [F/m]

誘電体を含むガウスの法則

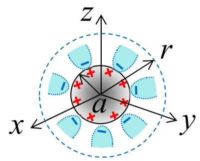
【例題】比誘電率ε_rの誘電体中に半径a [m]の導体球がある。(1)導体球に電荷 Q [C]を与えたとき、誘電体中の電界と導体球の電位、および導体表面に現れる分極電荷の面電荷密度を求めよ。(教科書，例題4.1)

【解答】誘電体を含むガウスの法則より

$$\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = Q \qquad (1)$$

$$\oint_S Dds\cos 0^\circ = Q$$

$$D\oint_S ds = Q$$



従って、電束密度は

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad [\mathrm{C/m^2}] \qquad (2)$$

電界は、D=εEより

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \quad [\mathrm{V/m}] \qquad (3)$$

即ち、真空中の電界に比べ1/ε_r倍小さくなる。導体球表面の電界はr=aを代入して

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a^2} \quad [\mathrm{V/m}] \qquad (4)$$

導体球表面の電位は

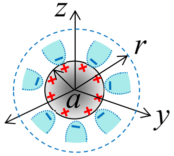
$$V_a = -\int_\infty^a \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_\infty^a \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr$$
$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\int_\infty^a \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\frac{1}{r}\right]_\infty^a$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{a} \quad [\mathrm{V}] \qquad (5)$$

分極電荷密度は

$$\sigma_b = -P = -(D-\varepsilon_0 E) = -(\varepsilon E - \varepsilon_0 E)$$
$$= -(\varepsilon_0\varepsilon_r E - \varepsilon_0 E) = -\varepsilon_0 E(\varepsilon_r - 1)$$
$$= -\varepsilon_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a^2}(\varepsilon_r - 1)$$
$$= \frac{Q}{4\pi a^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_r}-1\right) \quad [\mathrm{C/m^2}] \qquad (6)$$

誘電体を含むガウスの法則

【例題】比誘電率ε_rの誘電体中に半径 a [m] の導体球がある。電荷密度σ [C/m²] を与えたとき、$\varepsilon_r = 1$(真空), $\varepsilon_r = 1.006$(空気), $\varepsilon_r = 2$(テフロン), $\varepsilon_r = 8$(ガラス), $\varepsilon_r = 80$(水)の場合に現れる分極電荷密度は真電荷密度の何倍か。



【解答】前問の結果より、分極電荷密度は

$$-\sigma_b = \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \quad [\mathrm{C/m^2}]$$

大きさは

$$|\sigma_b| = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \quad [\mathrm{C/m^2}] \qquad (1)$$

$\varepsilon_r = 1$(真空)のとき、

$$|\sigma_b^{\mathrm{Air}}| = \sigma\left(1 - \frac{1}{1}\right) = 0$$

真空の0倍(分極電荷なし)

$\varepsilon_r = 1.006$(空気)のとき、 (2)

$$|\sigma_b^{\mathrm{Air}}| = \sigma\left(1 - \frac{1}{1.006}\right) = \frac{0.006}{1.006}\sigma$$

真空の0.00596倍

$\varepsilon_r = 2$(テフロン)のとき、

$$|\sigma_b^{\mathrm{Teflon}}| = \sigma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sigma \qquad (3)$$

真空の0.5倍

$\varepsilon_r = 8$(ガラス)のとき、

$$|\sigma_b^{\mathrm{Glass}}| = \sigma\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}\sigma \qquad (4)$$

真空の0.875倍

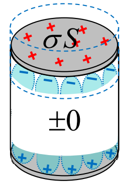
$\varepsilon_r = 80$(水)のとき、

$$|\sigma_b^{\mathrm{Water}}| = \sigma\left(1 - \frac{1}{80}\right) = \frac{79}{80}\sigma \qquad (5)$$

真空の0.9875倍

誘電体を含むガウスの法則

【例題】比誘電率ε_rの誘電体を面積 S [m²] の平板電極で挟んだ平板コンデンサがある。片側電極に電荷 σ [C/m²] を与えたとき、誘電体中の電界と電極表面に現れる分極電荷の面電荷密度を求めよ。



【解答】誘電体を含むガウスの法則より

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q \qquad (1)$$

$$\oint_S Dds\cos 0^\circ = Q$$

$$D\oint_S ds = \sigma S$$

従って、電束密度は

$$D = \sigma \quad [\mathrm{C/m^2}] \qquad (2)$$

電界は、D=εEより

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{S} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad [\mathrm{V/m}] \qquad (3)$$

即ち、真空中(ε_r=1のとき)の電界σ/ε_0に比べて誘電体中の電界は$1/\varepsilon_r$倍に小さくなる。

分極電荷密度は

$$\begin{aligned}\sigma_b &= P \qquad (4)\\ &= D - \varepsilon_0 E\\ &= \varepsilon E - \varepsilon_0 E\\ &= \varepsilon_0\varepsilon_r E - \varepsilon_0 E\\ &= \varepsilon_0 E(\varepsilon_r - 1)\end{aligned}$$

(3)で求めた電界を代入して

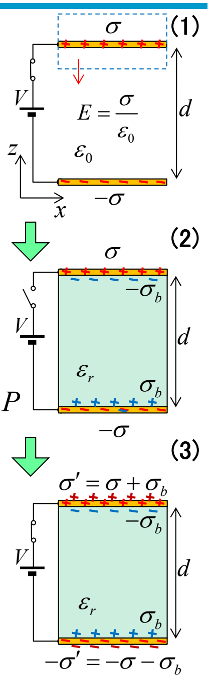
$$\sigma_b = \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}(\varepsilon_r - 1)$$

従って、

$$\sigma_b = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \quad [\mathrm{C/m^2}] \qquad (5)$$

電源有無による電界の変化

【例題】次の各場合に対する電極内の電界を求めよ。(1) 初めに空気コンデンサを電圧Vで充電させた。(2) 次に、SWを切って比誘電率ε_rの誘電体を挿入した。(3) 最後に、誘電体を挿入したままSWを再びONにした。



【解答】(1) 真空中のガウスの法則より

$$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_S Eds\cos 0^\circ = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow E\oint_S ds = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \ \therefore E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

(2) 誘電体を含むガウスの法則より

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q$$

電極上にある電荷は保存されるので、Q=σS

$$\oint_S Dds = Q \quad \Rightarrow \quad D\oint_S ds = \sigma S$$

$$\Rightarrow DS = \sigma S \ \therefore D_2 = \sigma$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{1}{\varepsilon_r}E_1$$

最初の$1/\varepsilon_r$倍になる。

(3) 誘電体を含むガウスの法則より、

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \sigma' S$$

$$\Rightarrow D\oint_S ds = \sigma' S$$

$$\Rightarrow DS = \sigma' S$$

$$\therefore D_3 = \sigma' = \sigma + \sigma_b = \varepsilon_0 E_3 + P$$

$$\varepsilon_0 E_3 = D_3 - P$$

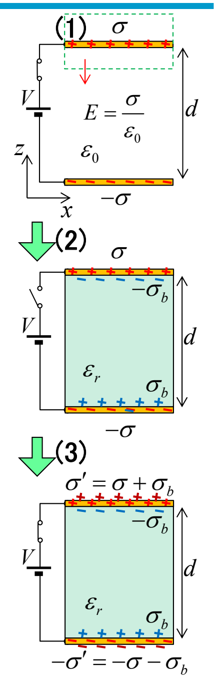
$$E_3 = \frac{D_3 - P}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma + \sigma_b - \sigma_b}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_3 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_1$$

最初の電界(電位)に等しい。

電源有無による分極電荷の変化

【例題】次の各場合に対する分極電荷を求めよ。(1) 初めに空気コンデンサを電圧Vで充電させた。(2) 次に、SWを切って比誘電率ε_rの誘電体を挿入した。(3) 最後に、誘電体を挿入したままSWを再びONにした。



【解答】(1) 前問の結果より

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$D_1 = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \sigma$$

$$\sigma_b = 0$$

(2) 前問の結果より

$$D_2 = \sigma$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\sigma_b = P = \varepsilon_0\chi_e E = \varepsilon_0\chi_e\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\sigma_b = (\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma}{\varepsilon_r} = \sigma\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

(3) 前問の結果より

$$D_3 = \sigma'$$

$$E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\left.\begin{aligned}\therefore \sigma' &= \varepsilon_r\sigma \quad ①\\ \sigma' &= \sigma + \sigma_b \quad ②\end{aligned}\right\} \varepsilon_r\sigma = \sigma + \sigma_b$$

従って、

$$\sigma_b = \varepsilon_r\sigma - \sigma = \sigma(\varepsilon_r - 1)$$

①を使うと、

$$\sigma_b = \frac{\sigma'}{\varepsilon_r}(\varepsilon_r - 1) = \sigma'\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

http://www15.wind.ne.jp/~Glauben_leben/Buturi/Denjiki/Denjikibase2.htm

等方性と異方性

等方性誘電体	異方性誘電体
スカラー誘電率 ↓ $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$	テンソル誘電率 ↓ $\vec{D}=[\varepsilon]\vec{E}$
$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}=\varepsilon\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$
成分表示 $\begin{cases} D_x=\varepsilon E_x \\ D_y=\varepsilon E_y \\ D_z=\varepsilon E_z \end{cases}$	成分表示 $\begin{cases} D_x=\varepsilon_{11}E_x+\varepsilon_{12}E_y+\varepsilon_{13}E_z \\ D_y=\varepsilon_{21}E_x+\varepsilon_{22}E_y+\varepsilon_{23}E_z \\ D_z=\varepsilon_{31}E_x+\varepsilon_{32}E_y+\varepsilon_{33}E_z \end{cases}$
電界と電束密度の方向が一致する	**電界と電束密度の方向が<u>一致しない</u>**

小柴 ``基礎からの電磁気学'' p.105

用語定義1

誘電体 dielectric, dielectric substance
誘電体は伝導電子を持たず、導体のように自由な電荷移動を許さない。電場を印加すると、誘電分極が起きるが、中には零電場のもとでも分極(自発分極)し、その分極の向きが外部電場によって反転するものがある。これを強誘電体という。誘電分極の機構は電子分極、イオン分極、配向分極からなり、交流電場を印加すると周波数の増加に伴い、配向分極、イオン分極、電子分極の順に電場の変化に追随できなくなり、電場に対し位相の遅れδを生じる。一般に、交流に対する動的誘電率は複素誘電率ε*=ε'−jε"で表す。熱損失が起こるとε'は減少する。熱損失は誘電損、誘電率の減少は誘電分散と呼ばれる。またδは誘電損角、tanδを誘電正接という。ε"はε'tanδで表され誘電損率とも呼ばれ、誘電分極の起こる周波数でピークをつくる。この現象を誘電吸収といい、ピークの大きさから損失の大小を判定する。誘電分散はその分極の発生機構により緩和型分散と共鳴型分散に分けられる。

誘電率 dielectric constant
電場Eと電束密度Dとの線形関係D=εEを与えるεを誘電率といい誘電体の特徴を示す。電媒定数ともいう。このεはε= $\varepsilon_0\varepsilon_r$で表され、$\varepsilon_0$は真空の誘電率でMSK単位系では8.854×$10^{-12}$ F/m、esu単位系では1であるため比誘電率ε_rと絶対誘電率εの値は一致する。単に誘電率といえば、普通この比誘電率の値を指す。等方性物質ではスカラー量であるが、異方性物質では2階のテンソル量である。交流に対する誘電率は周波数に依存し、複素誘電率で表される。

p.1476 東京理科大学理工学辞典編集委員会編, 理工学辞典, 日刊工業新聞社

用語定義2

誘電緩和 dielectric relaxation
誘電体に電場を印加すると分極が発生するが、分極が定常値に達するまでにある程度の時間をかけて変化する。この変化の様子を誘電緩和と言う。このときの緩和関数が簡単な指数関数で表されるとき、その緩和をデバイ型という。誘電体に交流電場を印加するとき、誘電分極が電場の周波数とともに変化する現象を誘電分散というが、誘電分散は緩和関数を使って厳密に解析される。

誘電力率 dielectric power factor, 誘電正接 dielectric loss tangent, 複素誘電率
誘電位相角θの余弦cosθを誘電力率という。誘電体に交流電圧を掛けると変位電流∂D/∂tが流れるが、これは電界E=D/εより90° 位相が進んでいる。実際には誘電体を通して微小な伝導電流も流れるため、電圧と電流の位相差θは90° より少し小さい。この90° からのずれをδとおくとθ=90−δとなる。このθを誘電位相角といい、δを誘電損角という。誘電力率cosθ=sinδであり、δは一般にきわめて小さくδ≒tanδ≒cosθと近似できる。tanδを誘電正接といい、誘電体中での電気エネルギーの損失(誘電損失)の目安となる。共振回路の作成にはtanδが小さいことが望ましいが、高周波加熱ではtanδが大きいものを利用する。
p.1476 東京理科大学理工学辞典編集委員会編, 理工学辞典, 日刊工業新聞社

p.1476 東京理科大学理工学辞典編集委員会編, 理工学辞典, 日刊工業新聞社

用語定義3

誘電率テンソル dielectric constant tensor
電束密度D, 電気分極Pはいずれもベクトルである。等方性物質ではこれらがすべて平行であるから、それらの大きさや符号だけを問題にして誘電率を考えればよい。しかし、結晶のような異方性物質ではD, Pは一般にEに平行ではなく、DとEの関係式はD= $\varepsilon_0\varepsilon$ Eとなる。ここにεは2階の対称テンソルであり、

$$\varepsilon=\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

と書かれる。これを誘電率テンソルという。上式を成分で表すと

$$D_i=\varepsilon_0\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ij}E_j \quad (i=1,2,3)$$

p.1476 東京理科大学理工学辞典編集委員会編, 理工学辞典, 日刊工業新聞社