誘電体の境界条件

v1.1 May.2014　　＿＿＿＿＿ 科 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 番　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 電界の境界条件

図 1 において，領域 1 の電界を $\vec{E}_1$，領域 2 の電界を $\vec{E}_2$ とする。境界面では次の保存場の性質*1が成立する。

$$\lim_{h\to 0}\oint_C \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\int_S \vec{M}\bullet d\vec{s} \tag{1}$$

式 (1) 左辺において，法線成分 E_{1n}, E_{2n} に関する線積分は $h\to 0$ の極限を取るのでゼロになる。一方，式 (1) 右辺の面積分は $h\to 0$ の極限より $S\to 0$ となって磁束はゼロとなるが，境界表面上の厚みを持たない面磁流 M_S[V/m] を仮定すると式 (1) 右辺第 1 項だけが残る。したがって，式 (1) は

$$\vec{E}_2\bullet\hat{t}\Delta l + \vec{E}_1\bullet(-\hat{t})\Delta l = -\vec{M}_S\bullet\hat{s}\Delta l \tag{2}$$

となる。式 (2) から Δl を消去すると

$$\vec{E}_2\bullet\hat{t} + \vec{E}_1\bullet(-\hat{t}) = -\vec{M}_S\bullet\hat{s} \tag{3}$$

となる。式 (3) を整理すると

$$(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\bullet\hat{t} = -\vec{M}_S\bullet\hat{s} \tag{4}$$

が得られる。式 (4) 右辺は $\hat{s}=\hat{t}\times\hat{n}$ であることと，内積の順序は入れ替えてもよいことを使うと

$$\hat{t}\bullet(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = -(\hat{t}\times\hat{n})\bullet\vec{M}_S \tag{5}$$

ここで右辺 () 内にスカラー三重積の公式を使うと

$$\hat{t}\bullet(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = -\hat{t}\bullet(\hat{n}\times\vec{M}_S) \tag{6}$$

となる。両辺から $\hat{t}\bullet$ を消去すると

$$\vec{E}_2-\vec{E}_1 = -\hat{n}\times\vec{M}_S \tag{7}$$

が得られる。式 (7) 両辺に $\hat{n}\times$ を掛けると

$$\hat{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = -\hat{n}\times\hat{n}\times\vec{M}_S \tag{8}$$

したがって，最終的に

$$(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\times\hat{n} = \vec{M}_S \tag{9}$$

が得られる。式 (9) を**ベクトル形の電界接線境界条件**と呼ぶ。式 (9) について具体的な二つのケースについて考えてみる。まず図 2(a) ような $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ のケースに式 (9) を適用すると次になる。

$$\vec{E}_1\times\hat{n} - \vec{E}_2\times\hat{n} = \vec{M}_S \tag{10}$$

式 (10) 左辺を外積公式で展開し，右辺を $\vec{M}_S = M_S\hat{s}$ で置くと

$$|\vec{E}_1||\hat{n}|\sin\theta_1(-\hat{s}) - |\vec{E}_2||\hat{n}|\sin\theta_2(-\hat{s}) = M_S\hat{s} \tag{11}$$

となる。ここで左辺を $E_1\sin\theta_1 = E_{1t}$, $E_2\sin\theta_2 = E_{2t}$ で置くと

$$-E_{1t}\hat{s} + E_{2t}\hat{s} = M_S\hat{s} \tag{12}$$

となる。式 (12) から $\hat{s}$ を消去すると次式 (13) が得られる。

$$E_{2t} - E_{1t} = M_S \tag{13}$$

一方，図 2(b) のようなケースに式 (9) を適用すると次式になる。

$$\vec{E}_1\times\hat{n} - \vec{E}_2\times\hat{n} = \vec{M}_S \tag{14}$$

式 (14) 左辺を外積公式で展開し，右辺を $\vec{M}_S = M_S\hat{s}$ で置くと

$$|\vec{E}_1||\hat{n}|\sin\theta_1\hat{s} - |\vec{E}_2||\hat{n}|\sin\theta_2\hat{s} = M_S\hat{s} \tag{15}$$

となる。ここで左辺を $E_1\sin\theta_1 = E_{1t}$, $E_2\sin\theta_2 = E_{2t}$ で置くと

$$E_{1t}\hat{s} - E_{2t}\hat{s} = M_S\hat{s} \tag{16}$$

となる。式 (16) から $\hat{s}$ を消去すると次式が得られる。

$$E_{1t} - E_{2t} = M_S \tag{17}$$

式 (13) 式 (17) を**スカラー形の電界接線境界条件**と呼ぶ。スカラー形では $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ の取り方によって E_{1t}, E_{2t} の符号が逆になる。

2. 電束密度の境界条件

同様に図 3 に示すように電束密度については，境界上に真電荷が存在する場合を考慮すると次のガウスの法則が成り立つ。

$$\lim_{h\to 0}\oint_S \vec{D}\bullet d\vec{s} = Q \tag{18}$$

式 (18) 左辺で接線成分 D_{1t}, D_{2t} に関する面積分は $h\to 0$ の極限を取ると 0 になり，法線成分 D_{1n}, D_{2n} の面積分だけが残る。即ち

$$\vec{D}_1\bullet\hat{n}\Delta S - \vec{D}_2\bullet\hat{n}\Delta S = \rho\Delta S \tag{19}$$

となるから，両辺から ΔS を消去すると

$$\vec{D}_1\bullet\hat{n} - \vec{D}_2\bullet\hat{n} = \rho \tag{20}$$

*1 電流密度 $\vec{J}$ に対して方程式の対称性を考慮して磁流密度 $\vec{M}$ を仮定している。

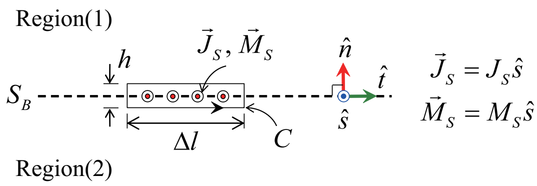

図 1　境界面 S_B を挟んで上側を領域 1，下側を領域 2 とした場合において境界面に沿った薄い長方形の積分路 C を考える。積分路で囲まれた面積は $S=h\Delta l$ である。境界 S_B 上の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{n},\hat{t},\hat{s}$ とする。面電流密度 $\vec{J}_S$ と面磁流密度 $\vec{M}_S$ の方向は積分路 C に対して右ネジの方向を正にとる。

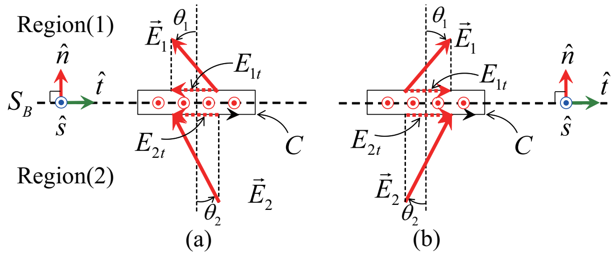

図 2　ケース (a) は E_{1t} が積分路 C の順方向，E_{2t} が逆方向を向いている場合を表し，ケース (b) は E_{1t} が積分路 C の逆方向，E_{2t} が順方向を向いている場合を表す。

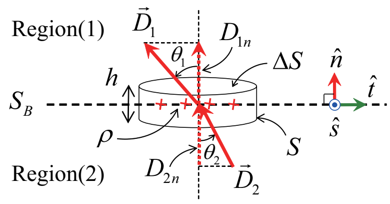

図 3　境界面 S_B を挟んで上側領域 1 の電束密度を $\vec{D}_1$，下側領域 2 電束密度を $\vec{D}_2$ のとした場合において，境界面に沿った薄い円柱状の積分面 (上下面積が ΔS で高さが h) を考える。境界 S_B 上の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{n},\hat{t},\hat{s}$ とする。境界面に真電荷面密度 ρ [C/m^2] を考える。

となる。これを整理すると次式 (21) が得られる。

$$\hat{n}\bullet(\vec{D}_1-\vec{D}_2) = \rho \tag{21}$$

式 (21) を**ベクトル形の電束密度法線成分に関する境界条件**と呼ぶ。式 (21) の内積を計算すると

$$D_1\cos\theta_1 - D_2\cos\theta_2 = \rho \tag{22}$$

となるので，$D_1\cos\theta_1 = D_{1n}$, $D_2\cos\theta_2 = D_{2n}$ の関係を使うと次式 (23) が得られる。

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho \tag{23}$$

式 (23) を**スカラー形の電束密度法線成分に関する境界条件**と呼ぶ。

3. 一般媒質の境界条件

先に導出した接線成分に関する境界条件と法線成分に関する境界条件とを合わせると，導電率 σ が有限で伝導電流が流れる損失性の一般媒質については次の境界条件が成立する。

$$(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\times\hat{n} = \vec{M}_S \tag{24}$$

$$\hat{n}\bullet(\vec{D}_1-\vec{D}_2) = \rho \tag{25}$$

4. 無損失媒質の境界条件

先に導出した接線成分に関する境界条件と法線成分に関する境界条件とを合わせると，損失のない媒質については $\vec{J}_S=0, \vec{M}_S=0, \rho=0$ より次の境界条件が成立する。

$$(\vec{E}_1-\vec{E}_2)\times\hat{n} = 0 \tag{26}$$

$$\hat{n}\bullet(\vec{D}_1-\vec{D}_2) = 0 \tag{27}$$