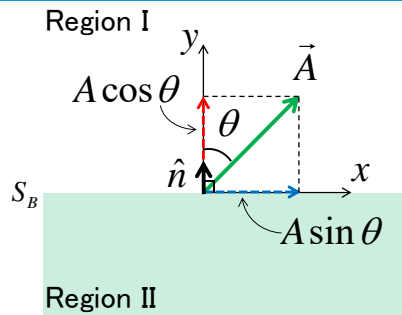


誘電体の境界条件

1st. 2010/02/23

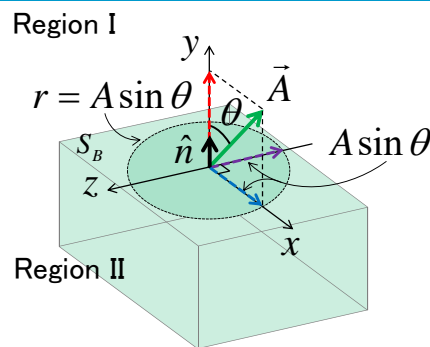
Lst. 2021/02/10

単位ベクトルとの内積, 外積



$$\hat{n} \cdot \vec{A} = |\hat{n}| |\vec{A}| \cos \theta = A \cos \theta$$

面に垂直な単位ベクトルnとベクトルAの内積を取れば、垂直成分が得られる



$$\hat{n} \times \vec{A} = |\hat{n}| |\vec{A}| \sin \theta (-\hat{z}) = A \sin \theta (-\hat{z})$$

面に垂直な単位ベクトルnとベクトルAの外積を取れば、90°回転した接線成分ベクトルが得られる*

* ベクトルAから接線成分ベクトルを直接得るには $(n \times A) \times n$ を計算する必要がある。

境界条件とは？

異なる媒質どうしの境界面で生じる特別な条件
(実際は静電界の基本方程式の境界面限定バージョン)

静磁界の基本方程式	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ アンペアの法則	電磁気 II $(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \hat{n}_{21} = \vec{J}_s$ 磁界の境界条件	$\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$ 磁界の境界条件
静電界の基本方程式	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 保存場の性質	$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \hat{n}_{21} = 0$ 電界の境界条件	$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12} = 0$ 電界の境界条件
静磁界の基本方程式	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ 磁気ガウスの法則	電磁気 II $\hat{n}_{12} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ 磁束密度の境界条件	$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ 磁束密度の境界条件
静電界の基本方程式	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ ガウスの法則	$\hat{n}_{21} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$ 電束密度の境界条件	$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$ 電束密度の境界条件

境界面 S_B に引いた法線ベクトル \hat{n} の取り方が左右で逆になっていることに注意!

法線成分と接線成分の表現方法

(1)
$$\begin{cases} \hat{n}_{21} \cdot \vec{A}_1 = |\hat{n}_{21}| |\vec{A}_1| \cos \theta_1 = A_1 \cos \theta_1 = A_{1n} \\ \hat{n}_{21} \cdot \vec{A}_2 = |\hat{n}_{21}| |\vec{A}_2| \cos \theta_2 = A_2 \cos \theta_2 = A_{2n} \end{cases}$$
 法線ベクトルと内積をとると法線成分の抽出

(2)
$$\begin{cases} |\hat{n}_{21} \times \vec{A}_1| = |\hat{n}_{21}| |\vec{A}_1| \sin \theta_1 = A_1 \sin \theta_1 = A_{1t} \\ |\hat{n}_{21} \times \vec{A}_2| = |\hat{n}_{21}| |\vec{A}_2| \sin \theta_2 = A_2 \sin \theta_2 = A_{2t} \end{cases}$$
 法線ベクトルと外積をとると接線成分の抽出

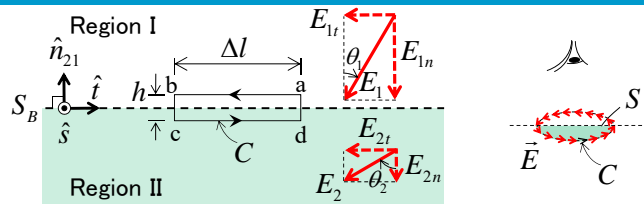
(1)
$$\begin{cases} \hat{n}_{12} \cdot \vec{A}_1 = |\hat{n}_{12}| |\vec{A}_1| \cos(\theta_1 + \pi) = -A_1 \cos \theta_1 = -A_{1n} \\ \hat{n}_{12} \cdot \vec{A}_2 = |\hat{n}_{12}| |\vec{A}_2| \cos(\theta_2 + \pi) = -A_2 \cos \theta_2 = -A_{2n} \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} |\hat{n}_{12} \times \vec{A}_1| = |\hat{n}_{12}| |\vec{A}_1| \sin(\theta_1 + \pi) = -A_1 \sin \theta_1 = -A_{1t} \\ |\hat{n}_{12} \times \vec{A}_2| = |\hat{n}_{12}| |\vec{A}_2| \sin(\theta_2 + \pi) = -A_2 \sin \theta_2 = -A_{2t} \end{cases}$$

$$\hat{n}_{12} = -\hat{n}_{21}$$

電界の境界条件(スカラー形)

5



境界面 S_B ($h \rightarrow 0$) における保存場の性質より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{ただし、} \vec{E} = \vec{E}_n + \vec{E}_t \quad (1)$$

積分経路 $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$ に沿って線積分を実行すると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2)$$

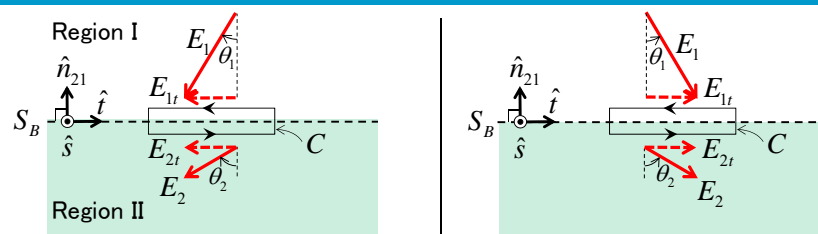
$$= \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_{1t} dl - \int_c^d E_{2t} dl = 0 \quad (3)$$

$$= E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = 0 \quad \therefore \boxed{E_{1t} - E_{2t} = 0} \quad (4)$$

境界面 S_B を挟んだ電界接線成分は連続

電界の境界条件(ベクトル形)

6



スカラー形の電界接線成分に関する境界条件

$$E_{1t} - E_{2t} = 0 \quad (5) \quad \quad \quad -E_{1t} + E_{2t} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{cases} \hat{n}_{21} \times \vec{E}_1 = E_1 \sin \theta_1 \hat{s} = E_{1t} \hat{s} \\ \hat{n}_{21} \times \vec{E}_2 = E_2 \sin \theta_2 \hat{s} = E_{2t} \hat{s} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_1 \times \hat{n}_{21} = E_1 \sin \theta_1 (-\hat{s}) = E_{1t} (-\hat{s}) \\ \vec{E}_2 \times \hat{n}_{21} = E_2 \sin \theta_2 (-\hat{s}) = E_{2t} (-\hat{s}) \end{cases}$$

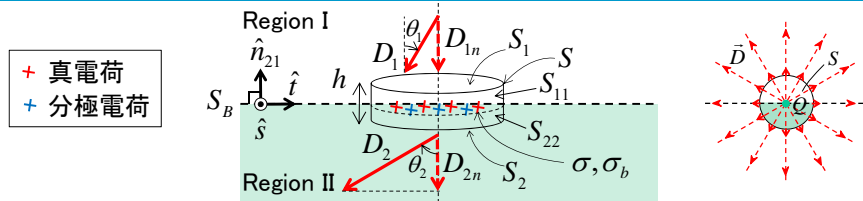
$$\therefore E_{1t} \hat{s} - E_{2t} \hat{s} = \hat{n}_{21} \times \vec{E}_1 - \hat{n}_{21} \times \vec{E}_2 \quad \therefore E_{1t} (-\hat{s}) - E_{2t} (-\hat{s}) = \vec{E}_1 \times \hat{n}_{21} - \vec{E}_2 \times \hat{n}_{21}$$

ベクトル形の電界に関する境界条件

$$\hat{n}_{21} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (6) \quad \quad \quad (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \hat{n}_{21} = 0 \quad (8)$$

電束密度の境界条件(スカラー形)

7



境界面 ($h \rightarrow 0$) におけるガウスの法則より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad \text{ただし、} \vec{D} = \vec{D}_n + \vec{D}_t \quad (1)$$

積分面 S_1, S_{11}, S_2, S_{22} 上で面積分を実行すると

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1+S_{11}} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2+S_{22}} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = Q \quad (2)$$

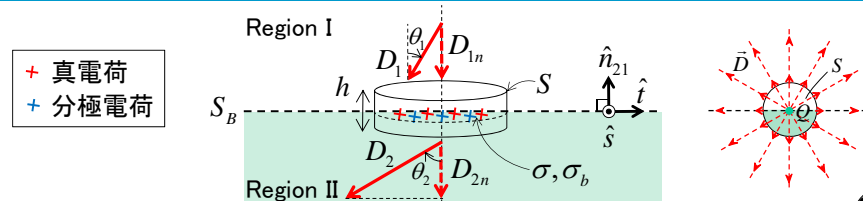
$$= \int_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s} = -\int_{S_1} D_{1n} ds + \int_{S_2} D_{2n} ds \quad (3)$$

$$= -D_{1n} S + D_{2n} S = Q \quad \therefore \boxed{-D_{1n} + D_{2n} = \sigma} \quad (4)$$

境界面 S_B を挟んだ電束密度法線成分の差は境界面の真電荷密度に等しい。

電束密度の境界条件(ベクトル形)

8



境界面 ($h \rightarrow 0$) におけるガウスの法則より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (5)$$

スカラー形の電束密度法線成分に関する境界条件

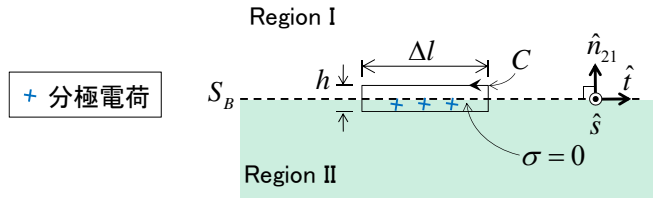
$$-D_{1n} + D_{2n} = \sigma \quad (6)$$

$$\begin{cases} \hat{n}_{21} \cdot \vec{D}_1 = -D_{1n} \\ \hat{n}_{21} \cdot \vec{D}_2 = -D_{2n} \end{cases} \quad \therefore -D_{1n} + D_{2n} = \hat{n}_{21} \cdot \vec{D}_1 - \hat{n}_{21} \cdot \vec{D}_2$$

ベクトル形の電束密度法線成分に関する境界条件

$$\hat{n}_{21} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad [C/m^2] \quad (7)$$

理想的な誘電体の境界条件



スカラー形の境界条件

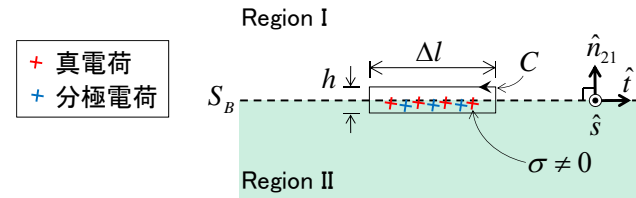
ベクトル形の境界条件

$$\begin{cases} E_{1t} - E_{2t} = 0 \\ -D_{1n} + D_{2n} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \hat{n}_{21} = 0 \\ \hat{n}_{21} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{1n} = D_{2n} \end{cases}$$

※ 境界を挟んだ電界接線成分と電束密度法線成分は常に連続になる。

損失性誘電体の境界条件



スカラー形の境界条件

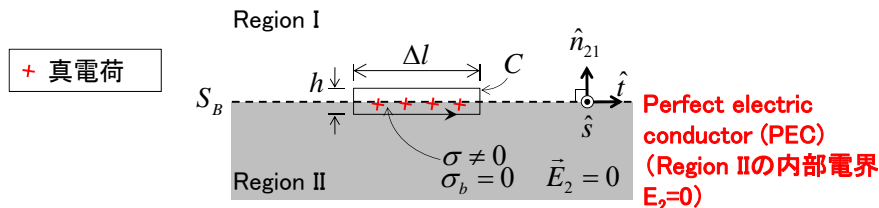
ベクトル形の境界条件

$$\begin{cases} E_{1t} - E_{2t} = 0 \\ -D_{1n} + D_{2n} = \sigma \end{cases} \quad \begin{cases} (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \hat{n}_{21} = 0 \\ \hat{n}_{21} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{1n} \neq D_{2n} \end{cases}$$

※ 境界を挟んだ電界接線成分は常に等しいが、電束密度法線成分は等しくならず、その差は損失性誘電体表面真面電荷密度に等しい。

完全電気導体の境界条件



スカラー形の境界条件

ベクトル形の境界条件

$$\begin{cases} E_{1t} = 0 \\ -D_{1n} = \sigma \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_1 \times \hat{n}_{21} = 0 \\ \hat{n}_{21} \cdot \vec{D}_1 = \sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{1t} = 0 \\ D_{1n} = -\sigma \end{cases}$$

※領域Iの電界接線成分がゼロのため、電界は導体に対して垂直に入る。このとき電束密度の大きさは導体表面の真電荷面密度に等しい。

最もよく使う境界条件

$E_{1t} = E_{2t}$ 境界を挟んだ電界の接線成分は連続 (t: tangential, 接線成分の意味)

$D_{1n} = D_{2n}$ 境界を挟んだ電束密度の法線成分は連続 (n: normal, 法線成分の意味)

※ただし、境界上の真電荷がゼロの場合

$H_{1t} = H_{2t}$ 境界を挟んだ磁界の接線成分は連続 (t: tangential, 接線成分の意味)

$B_{1n} = B_{2n}$ 境界を挟んだ磁束密度の法線成分は連続 (n: normal, 法線成分の意味)

※ただし、境界上の伝導電流がゼロの場合

電気力線の屈折1

【例題】真空中から比誘電率 $\epsilon_r = 3$ の誘電体に入射角 $\theta_1 = 30^\circ$ で入った電気力線の屈折角を求めよ。

【解答】電界接線成分の連続性と電束密度法線成分の連続性より

$$\begin{cases} E_{1t} = E_{2t} \\ D_{1n} = D_{2n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 & (1) \\ D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 & (2) \end{cases}$$

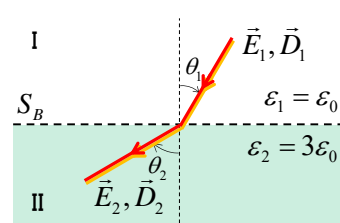
(1)/(2)を計算すると

$$\frac{E_1 \sin \theta_1}{D_1 \cos \theta_1} = \frac{E_2 \sin \theta_2}{D_2 \cos \theta_2} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_1} \tan \theta_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \tan \theta_2 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \tan \theta_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tan \theta_1 \quad (5)$$

$$\therefore \theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \tan \theta_1 \right) \quad (6)$$



(6)式に数値を代入すると

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{3\epsilon_0}{\epsilon_0} \tan 30^\circ \right) \\ &= \tan^{-1} \left(3 \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \tan^{-1}(\sqrt{3}) \\ &= 60^\circ \end{aligned}$$

電気力線の屈折2

【演習】比誘電率 ϵ_r の半無限大誘電体平面が空気と接している。境界面に入射角 θ で真空中から一様な電界 E_0 [V/m] が入射したとき、誘電体中の電界を求めよ。

【解答】電界接線成分の境界条件より

$$E_{1t} = E_{2t} \quad \text{where} \quad E_{1t} = E_0 \sin \theta$$

$$\therefore E_{2t} = E_0 \sin \theta \quad (1)$$

電束密度法線成分の境界条件より

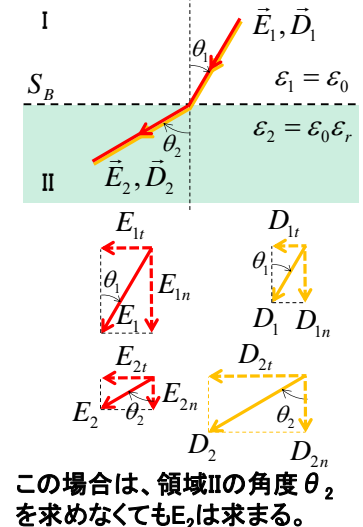
$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

$$\text{where} \quad \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_1 E_0 \cos \theta = \epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

$$\therefore E_{2n} = \frac{\epsilon_1 E_{1n}}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_0 E_0 \cos \theta}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{E_0 \cos \theta}{\epsilon_r} \quad (2)$$

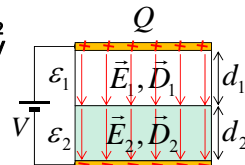
従って、領域IIの電界は三平方の定理より

$$\begin{aligned} E_2 &= \sqrt{(E_{2t})^2 + (E_{2n})^2} \\ &= \sqrt{(E_0 \sin \theta)^2 + (E_0 \cos \theta / \epsilon_r)^2} \\ &= E_0 \sqrt{(\sin \theta)^2 + (\cos \theta / \epsilon_r)^2} \quad (3) \end{aligned}$$



2層誘電体の静電容量

【例題】間隔 $d_1 + d_2$ [m] の平行平板導体間に誘電率が ϵ_1, ϵ_2 [F/m] で、厚さが d_1, d_2 [m] の誘電体を挟み、導体間に電圧 V [V] を加えたとき、各誘電体中の電界 E_1, E_2 を求めよ。また、静電容量 C を求めよ。ただし、導体板面積を S [m²] とする。



【解答】電極に蓄積される真電荷を Q [C] とすると、電束密度法線成分の連続性より

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{S} \quad (1)$$

電束密度と電界の関係より

$$\begin{cases} D_1 = \epsilon_1 E_1 & (2) \\ D_2 = \epsilon_2 E_2 & (3) \end{cases}$$

電界は

$$E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{Q}{\epsilon_1 S} \quad (4)$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{Q}{\epsilon_2 S} \quad (5)$$

電位差は

$$\begin{aligned} V &= E_1 d_1 + E_2 d_2 \\ &= \frac{Q}{\epsilon_1 S} d_1 + \frac{Q}{\epsilon_2 S} d_2 = \frac{Q}{S} \left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \quad (6) \end{aligned}$$

静電容量は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_1 d_2 + \epsilon_2 d_1} \quad (7)$$

所で、(6)より電荷は

$$Q = \frac{SV}{\left(\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 SV}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2}$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\epsilon_2 V}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \\ E_2 &= \frac{\epsilon_1 V}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \end{aligned}$$

(8)を(4)と(5)に代入して、電界は

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\epsilon_2 V}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \\ E_2 &= \frac{\epsilon_1 V}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \end{aligned}$$

3層誘電体

【演習】比誘電率 ϵ_r の誘電体の両面が空気と接している。真空中から一様な電界 E_0 [V/m] が垂直に入射したとき、各層における (1) 電界、(2) 電束密度、(3) 分極の大きさを求めよ。

【解答】+電極から-電極に向かって領域を3領域 I, II, IIIに分けると

①領域IIについて

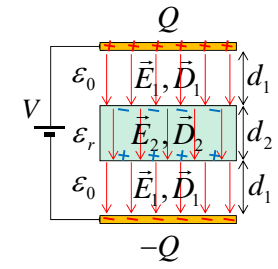
$$\begin{cases} E_1 = E_0 \\ D_1 = \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 E_0 \\ P_1 = D_1 - \epsilon_0 E_1 = \epsilon_0 E_0 - \epsilon_0 E_0 = 0 \end{cases}$$

②領域IIIについて、電束密度の連続性より $D_1 = D_2$ となるので、

$$\begin{cases} D_2 = \epsilon_2 E_2 = D_1 = \epsilon_0 E_0 \\ E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{E_0}{\epsilon_r} \\ P_2 = D_2 - \epsilon_0 E_2 = \epsilon_0 E_0 - \epsilon_0 \frac{E_0}{\epsilon_r} = \epsilon_0 E_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \end{cases}$$

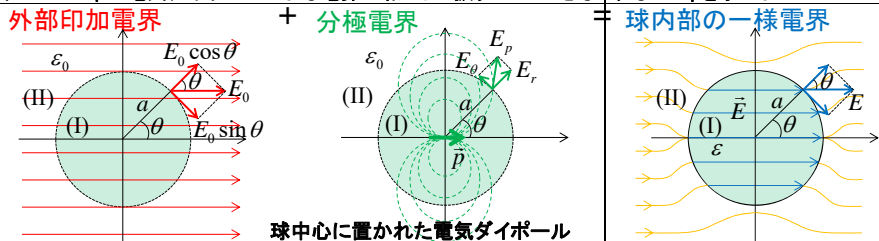
③領域IIIについて

$$\begin{cases} D_3 = \epsilon_0 E_3 = \epsilon_0 E_0 \\ E_3 = \frac{D_3}{\epsilon_3} = \frac{\epsilon_0 E_0}{\epsilon_0} = E_0 \\ P_3 = D_3 - \epsilon_0 E_3 = \epsilon_0 E_0 - \epsilon_0 E_0 = 0 \end{cases}$$



誘電体球の周辺電界

【演習】半径a, 誘電率εの誘電体球が一様な電界E₀の中に置かれている。誘電体球が分極することにより、球内部には一様な電界Eが生じるものとする。また、球外の電界は、外部電界E₀と球の中心にある電気モーメントpの電気双極子による電界の和として扱うことができるとする。Eとpを求めよ。



領域(II)の外部電界E₀を球座標成分に分解すると

$$\begin{cases} E_r = E_0 \cos \theta & (1a) \\ E_\theta = -E_0 \sin \theta & (1b) \end{cases}$$

球中心に置かれた電気双極子モーメントpが領域(II)の球表面に作る電界は

$$\begin{cases} E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 a^3} \cos \theta & (2a) \\ E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \sin \theta & (2b) \end{cases}$$

領域(I)の球内部一様電界Eを球座標成分に分解すると

$$\begin{cases} E_r = E \cos \theta & (3a) \\ E_\theta = -E \sin \theta & (3b) \end{cases}$$

電束密度法線の境界条件ε₀(1a)+ε₀(2a)=ε(3a)より

$$\epsilon_0 E_0 \cos \theta + \frac{\epsilon_0 p}{2\pi\epsilon_0 a^3} \cos \theta = \epsilon E \cos \theta \quad (a)$$
 電界接線の境界条件(1b)+(2b)=(3b)より

$$-E_0 \sin \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \sin \theta = -E \sin \theta \quad (b)$$
 (a)(b)の連立方程式(未知数はEとpのみ)を解けばEとpが求まる。山村, 『電磁気学演習[新訂版],』 p.98, サイエンス社

誘電体球の周辺電界

【続き】

$$-E_0 \sin \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} \sin \theta = -E \sin \theta \quad (b)$$

$$\Rightarrow E_0 - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3} = E \quad (b)'$$

$$\epsilon_0 E_0 \cos \theta + \frac{\epsilon_0 p}{2\pi\epsilon_0 a^3} \cos \theta = \epsilon E \cos \theta \quad (a)$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 E_0 + \frac{\epsilon_0 p}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \epsilon E \Rightarrow E_0 + \frac{p}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \epsilon_r E \quad (a)'$$

(b)' × ε_r - (a)' よりEを消去すると

$$\epsilon_r E_0 - \frac{\epsilon_r p}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \epsilon_r E$$

$$\Rightarrow E_0 + \frac{p}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \epsilon_r E$$

$$(\epsilon_r - 1)E_0 - \frac{(\epsilon_r + 2)p}{4\pi\epsilon_0 a^3} = 0$$

$$\therefore p = 4\pi\epsilon_0 a^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} E_0 \quad [\text{Cm}]$$

(b)' × 2 + (a)' よりpを消去すると

$$2E_0 - \frac{p}{2\pi\epsilon_0 a^3} = 2E$$

$$+ E_0 + \frac{p}{2\pi\epsilon_0 a^3} = \epsilon_r E$$

$$3E_0 = (\epsilon_r + 2)E$$

$$\therefore E = \frac{3}{(\epsilon_r + 2)} E_0 \quad [\text{V/m}]$$

誘電体内部空洞の電界

【演習】電界Eによって一様に分極している誘電体の中に、半径aの球形空洞がある。空洞中心の電界E_iを求めよ。ただし、分極をP、誘電体の比誘電率をε_rとする。

【解答】電極の真電荷σ+σ_bによる電界E₁, 電極の分極電荷σ_bによる反電界E₂, 空洞表面に発生する分極電荷σ_aによる電界E₃の重ね合わせになる。

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma + \sigma_b}{\epsilon_0} (-\hat{z}) = \frac{\epsilon_0 E + P}{\epsilon_0} (-\hat{z}) = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

または

$$= \frac{\sigma'}{\epsilon_0} (-\hat{z}) = \frac{D}{\epsilon_0} (-\hat{z}) = \frac{\epsilon_0 E + P}{\epsilon_0} (-\hat{z})$$

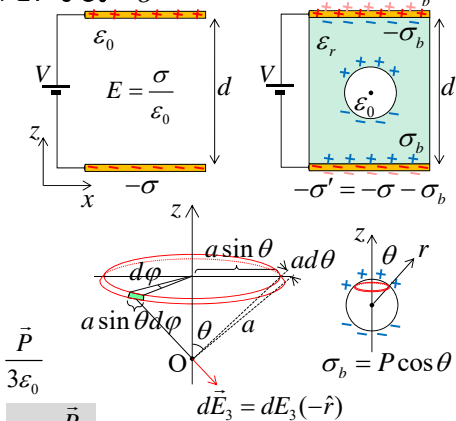
$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} \hat{z} = \frac{P}{\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E}_3 = \int_0^\pi \frac{\sigma_a}{4\pi\epsilon_0 a^2} 2\pi a \sin \theta d\theta (-\hat{r})$$

$$= \int_0^\pi \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 a^2} 2\pi a^2 \sin \theta d\theta \cdot \cos \theta (-\hat{z})$$

$$= \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta (-\hat{z}) = \frac{P}{3\epsilon_0} (-\hat{z}) = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

従って、



$$\vec{E}_i = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} \right) + \frac{-\vec{P}}{\epsilon_0} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$
 これをローレンツの内部電界と呼ぶ。金古, ベクトル電磁気学の基礎と演習, p.111, 学社

クラジウス・モソッティの式

【演習】電界Eによって一様に分極している誘電体の中に、半径aの球形空洞がある。空洞中心の電界E_iを求めよ。ただし、分極をP、誘電体の比誘電率をε_rとする。

$$I = \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

cos θ = tとおくと, dt/dθ = -sin θ より

$$I = \int_{t=1}^{-1} t^2 \sin \theta \frac{dt}{-\sin \theta}$$

$$= \int_{t=1}^{-1} -t^2 dt = -\left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} = -\frac{1}{3}(-2) = \frac{2}{3}$$

$$\vec{E}_i = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad (1)$$

において、分極Pと電気双極子モーメントpを

$$\begin{cases} \vec{p} = \alpha \vec{E}_i \\ \vec{P} = N\vec{p} \end{cases} \quad (2)$$

とおくと、

$$\vec{P} = N\alpha \vec{E}_i \quad (3)$$

これを(1)に代入して

$$\vec{E}_i = \vec{E} + \frac{N\alpha \vec{E}_i}{3\epsilon_0} \Rightarrow 1 - \frac{\vec{E}}{\vec{E}_i} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \quad (4)$$

ここで、

$$\frac{\vec{E}}{\vec{E}_i} = \frac{\vec{E}}{\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}} = \frac{\vec{E}}{\vec{E} + \frac{\epsilon_0 \chi_e \vec{E}}{3\epsilon_0}} = \frac{\vec{E}}{\vec{E} + \frac{\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}}{3\epsilon_0}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_r - 1}{3}} = \frac{3}{3 + \epsilon_r - 1} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \quad (5)$$

これを(4)に戻して

$$1 - \frac{3}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\epsilon_r + 2}{\epsilon_r + 2} - \frac{3}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}$$

$$\therefore \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} \quad \text{これをクラジウス・モソッティの式と呼ぶ。} \quad (6)$$

金古, ベクトル電磁気学の基礎と演習, p.111, 学社