

誘電体のエネルギーと力

1st 2015/10/22

Lst 2021/02/10

電磁気エネルギーのまとめ

| | 電気エネルギー | 磁気エネルギー |
|------------------------------|--|---|
| 回路素子 電極又は導線 | $W_e = \int_0^V Cvdv = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{---} C$ $= \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad [\text{J}] \quad (1)$ | $W_m = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2} LI^2 \quad \text{---} L$ $= \frac{1}{2} \phi I = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L} \quad [\text{J}] \quad (3)$ |
| 誘電体・磁性体 電極又は巻線 内部のコア材料 | $u_e = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad \text{---} \vec{D}$ $= \frac{1}{2} \frac{D}{\epsilon} D = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad [\text{J/m}^3]$ $= [\text{N/m}^2] \quad (2) = [\text{Pa}]$ | $u_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad \text{---} \vec{B}$ $= \frac{1}{2} \frac{B}{\mu} B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad [\text{J/m}^3]$ $= [\text{N/m}^2] \quad (4) = [\text{Pa}]$ |

※ 単位体積あたりのエネルギー [J/m³] は [J] = [N・m] の関係より、
圧力(応力) [N/m²] = [Pa] に等しい。

回路の電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$$I = I_C + I_R \quad (1)$$

ここで,

$$I_C = \frac{dQ}{dt}, \quad I_R = \frac{v}{R} = Gv, \quad Q = Cv \quad (2)$$

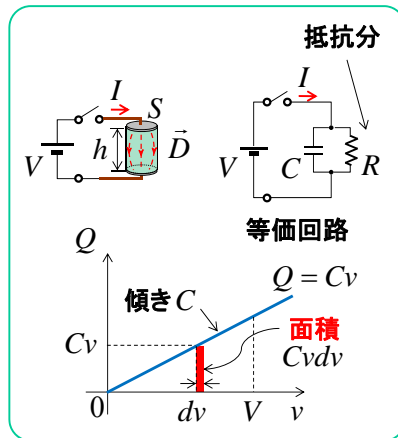
式(2)を式(1)に代入すると

$$I = \frac{dQ}{dt} + Gv = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad (3)$$

両辺に vdt を掛けると

$$vIdt = Cv dv + \frac{v^2}{R} dt \quad (4)$$

電源が dv 上がったことで蓄えられたエネルギー dW_e [J] (面積 Cv dv に等しい) と 抵抗の発熱 (ジュール熱) dW_j [J] の関係を示している。



コンデンサに加える電圧 v を 0 → V に増やしたとき、コンデンサ全体の蓄積エネルギーは

$$W_e = \int_0^V Cvdv = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad [\text{J}] \quad (5)$$

ただし、電池のした仕事は電源が一定値なので

$$W_s = QV \quad [\text{J}] \quad (6)$$

誘電体の電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$$I = \frac{dQ}{dt} + \frac{v}{R} \quad (1)$$

電源が微小時間 dt の間にする仕事は

$$dW_s = vIdt \quad (2)$$

式(1)の両辺に vdt を掛けると

$$vIdt = v dQ + \frac{v^2}{R} dt \quad (3)$$

電源が dQ 増えたこと蓄えられたエネルギー dW_e と 抵抗の発熱 (ジュール熱) dW_j の関係を示している。

ここで、ガウスの法則より

$$\oint_C \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$$

$$DS = Q, \quad E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon S} \quad (4)$$

コンデンサの電位差 v は

$$v = - \int_0^h \vec{E} \cdot d\vec{l} = Eh = \frac{Qh}{\epsilon S} \quad (5)$$

式(3)の右辺第1項目は、(4)と(5)より

$$\Delta W_e = v \Delta Q = \frac{Qh}{\epsilon S} \Delta Q = Eh \Delta DS$$

$$= ShE \Delta D \quad (6)$$

従って、誘電体の全体積 Sh [m³] に対して単位体積あたりの蓄積エネルギーは

$$\Delta w_e = E \Delta D$$

電荷を 0 → Q に増やしたとき、即ち、電束密度が 0 → D に増えたとき

$$w_e = \int_0^D dw_e = \int_0^D E dD \quad (8)$$

通常の誘電体のように ED 特性に線形性がある場合は

$$w_e = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \epsilon E^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{D}{\epsilon} D = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad [\text{J/m}^3] \quad (9)$$

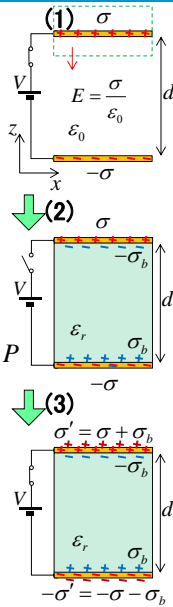
電気エネルギーの変化

【例題】 次の各場合に対する電気エネルギーを求めよ。(1) 初めに空気コンデンサを電圧Vで充電させた。(2) 次に、SWを切つて比誘電率 ϵ_r の誘電体を挿入した。(3) 最後に、誘電体を挿入したままSWを再びONにした。

【解答】 (1) 真空中のガウスの法則より
 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \therefore E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
 $w_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_1^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} \text{ [J/m}^3\text{]}$

(2) 誘電体を含むガウスの法則より
 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ 電極上にある電荷は保存されるので、 $Q = \sigma S$
 $\Rightarrow DS = \sigma S \therefore D_2 = \sigma$
 $E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{\epsilon_r} E_1$
 $w_{e2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_2^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{E_1}{\epsilon_r}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_r \epsilon_0}$

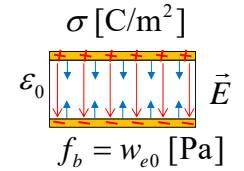
(3) 誘電体を含むガウスの法則より、
 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \sigma' S$
 $\Rightarrow D \oint_S ds = \sigma' S$
 $\Rightarrow DS = \sigma' S$
 $\therefore D_3 = \sigma' = \sigma + \sigma_b = \epsilon_0 E_3 + P$
 $\epsilon_0 E_3 = D_3 - P$
 $E_3 = \frac{D_3 - P}{\epsilon_0} = \frac{\sigma + \sigma_b - \sigma_b}{\epsilon_0}$
 $\therefore E_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = E_1$
 $w_{e3} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_1^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$



誘電体のエネルギーと応力1

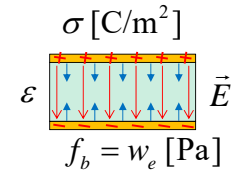
空気コンデンサに働く応力

$$w_{e0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} ED \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (1)$$



誘電体コンデンサに働く応力

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon} = \frac{1}{2} ED \text{ [J/m}^3\text{]} \quad (2)$$



電気力線を短くする方向に縮んで安定しようとする。

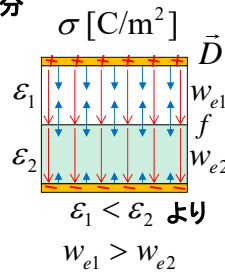
誘電体のエネルギーと応力2

$$\begin{cases} w_{e1} = \frac{1}{2} \frac{D_1^2}{\epsilon_1} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_1} \text{ [J/m}^3\text{]} & (1) \\ w_{e2} = \frac{1}{2} \frac{D_2^2}{\epsilon_2} = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon_2} \text{ [J/m}^3\text{]} & (2) \\ f = w_{e1} - w_{e2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) D^2 \text{ [Pa]} & (3) \end{cases}$$

電束密度接線成分の連続性より

$$D_1 = D_2 = D$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$$



で上向きに引っ張られる。

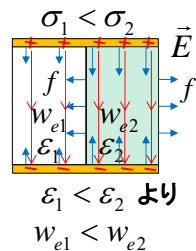
$$\begin{cases} w_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_1 E_1^2 = \frac{1}{2} \epsilon_1 E^2 \text{ [J/m}^3\text{]} & (4) \\ w_{e2} = \frac{1}{2} \epsilon_2 E_2^2 = \frac{1}{2} \epsilon_2 E^2 \text{ [J/m}^3\text{]} & (5) \\ f = w_{e2} - w_{e1} = \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E^2 \text{ [Pa]} & (6) \end{cases}$$

電界接線成分の連続性より

$$E_1 = E_2 = E$$

$$\sigma_1 = D_1 = \epsilon_1 E$$

$$\sigma_2 = D_2 = \epsilon_2 E$$



で左向きに引っ張られる。

誘電体のエネルギーと応力3

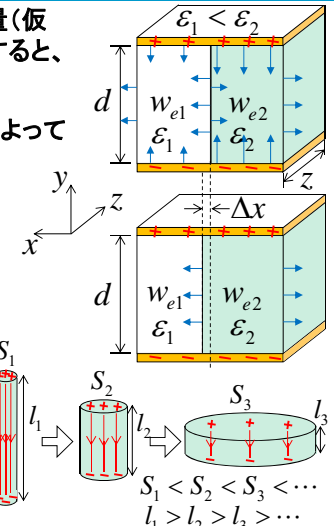
境界面にはたらく応力を f [N/m²]=[Pa]、仮の変位量(仮想変位)を Δx [m]、間隔を d [m]、奥行きを z [m] とすると、
 $\Delta W_f = f \cdot z d \Delta x$ [J] (1)

の仕事は誘電体がしたことになる。この仮想変位によって生じる誘電体の蓄積エネルギーの変化は、

$$\begin{aligned} \Delta W_e &= \frac{1}{2} E_2 D_2 (z d \Delta x) - \frac{1}{2} E_1 D_1 (z d \Delta x) \text{ [J]} \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_2 E^2 (z d \Delta x) - \frac{1}{2} \epsilon_1 E^2 (z d \Delta x) \\ &= \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E^2 (z d \Delta x) \text{ [J]} \quad (2) \end{aligned}$$

エネルギー保存則(電源は接続されていない)より $\Delta W_f = \Delta W_e$ であるから、(1)(2)の結果より

$$f = \frac{1}{2} (\epsilon_2 - \epsilon_1) E^2 \text{ [Pa]} \quad (3)$$



電気力線に対して垂直な方向に押し広がるような応力がはたらく。即ち、電気力線の間隔が離れて密度を薄くしながら拡散して安定しようとする。

仮想変位の仕事

エネルギー保存則より,

$$dW_e + dW_k = dW_s \quad (1)$$

電気エネルギー 機械エネルギー 電源のエネルギー

電気エネルギーは

$$dW_e = \frac{\partial W_e}{\partial x} dx + \frac{\partial W_e}{\partial y} dy + \frac{\partial W_e}{\partial z} dz$$

$$= \left(\frac{\partial W_e}{\partial x} \frac{\partial W_e}{\partial y} \frac{\partial W_e}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \nabla W_e \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

機械エネルギーは

$$dW_k = (F_x F_y F_z) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

(2)+(3)と(1)より,

$$dW_e + dW_k = \nabla W_e \cdot d\vec{l} + \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

$$(\nabla W_e + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = dW_s \quad (4)$$

D. K. Cheng, Field and wave for electromagnetics 2nd ed., p.289, Addison Wesley

仮想変位

電荷が dQ 増えることは、電流の定義より

$$I = dQ / dt \quad dQ = Idt \quad (5)$$

なる電流が流れるので、電源は

$$dW_s = VI dt = VdQ \quad (6)$$

の仕事をする(エネルギーを供給する)。

ここで、電気エネルギーの増分は

$$dW_e = \frac{1}{2} VdQ = \frac{1}{2} dW_s \quad (7)$$

となるので、(4)に(7)を代入して、

$$(\nabla W_e + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = 2dW_e \quad (8)$$

さらに、(8)に(2)を代入して、

$$(\nabla W_e + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = 2\nabla W_e \cdot d\vec{l} \quad (9)$$

従って、働く力は

$$\vec{F} = \nabla W_e \quad (10)$$

一方、電源が仕事をしないときは、(4)より

$$\vec{F} = -\nabla W_e \quad (11)$$

誘電体のエネルギーと力1

【演習】電圧Vが加えられた平行平板コンデンサの空隙中に誘電体板を挿入したとき、この誘電体板に作用する力を求めよ。(演習書, p.37)

【解答】

静電容量は、二つのコンデンサの並列なので

$$C = \frac{\epsilon_0(l-x)w}{d} + \frac{\epsilon xw}{d}$$

このコンデンサーに蓄えられるエネルギーは

$$W_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{V^2 w}{2d} \{ \epsilon_0(l-x) + \epsilon x \}$$

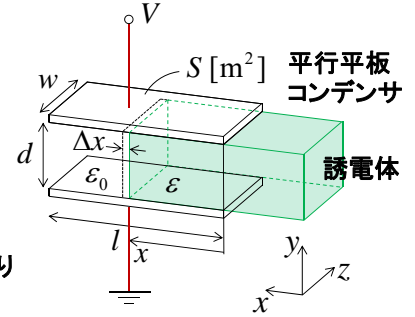
電源が接続されているときの仮想変位の式より

$$\vec{F} = \nabla W_e = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) W_e$$

$$= \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{V^2 w}{2d} \{ \epsilon_0(l-x) + \epsilon x \}$$

$$= \hat{x} \frac{V^2 w}{2d} (\epsilon - \epsilon_0) \text{ [N]}$$

空気側に吸い込まれる力が働く



誘電体のエネルギーと力2

【演習】比誘電率 ϵ_r の均質な反無限大平面が空気と接している。境界面に境界の法線に対して θ_0 の角度で空気中から一様な電界 E_0 [V/m] が入射したとき、境界面に作用する力を求めよ。(演習書, 応用4.12)

【解答】電束密度法線成分の連続性より、

$$D_{1n} = \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_0 E_0 \cos \theta_0 = D_{2n} \quad (1)$$

領域IIには上向きの応力を生じ、その大きさは

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \frac{D_{1n}^2}{\epsilon_1} = \frac{1}{2} \frac{(\epsilon_0 E_0 \cos \theta_0)^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta_0 \quad (2)$$

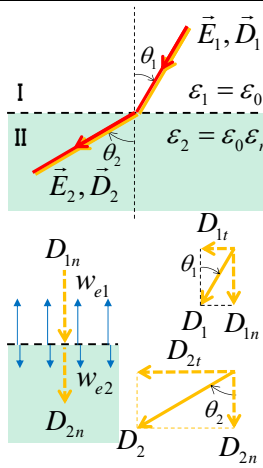
領域IIIには下向きの応力を生じ、その大きさは

$$w_{e2} = \frac{1}{2} \frac{D_{2n}^2}{\epsilon_2} = \frac{1}{2} \frac{(\epsilon_0 E_0 \cos \theta_0)^2}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_0^2 \cos^2 \theta_0 \quad (3)$$

$w_{e1} > w_{e2}$ なので、境界面には上向きの応力を生じ、

$$f = w_{e1} - w_{e2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \text{ [Pa]} \quad (4)$$

となる。



電束密度法線成分の連続性

誘電体のエネルギーと力2

【続き】電界接線成分の連続性より、

$$E_{1t} = E_0 \sin \theta_0 = E_{2t} \quad (5)$$

領域IIには下向きの応力を生じ、その大きさは

$$w_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_1 E_{1t}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E_0 \sin \theta_0)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0^2 E_0^2 \sin^2 \theta_0 \quad (6)$$

領域IIIには上向きの応力を生じ、その大きさは

$$w_{e2} = \frac{1}{2} \epsilon_2 E_{2t}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_2 (E_0 \sin \theta_0)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E_0^2 \sin^2 \theta_0 \quad (7)$$

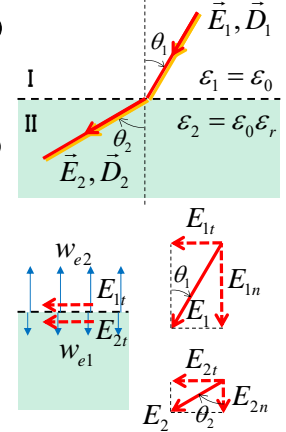
$w_{e1} < w_{e2}$ なので、境界面には上向きの応力を生じ、

$$f = w_{e2} - w_{e1} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \theta_0 (\epsilon_r - 1) \text{ [Pa]} \quad (8)$$

となる。(4)+(8)より

$$f = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \theta_0 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) + \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \theta_0 (\epsilon_r - 1) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_0^2 (\epsilon_r - 1) (\cos^2 \theta_0 + \epsilon_r \sin^2 \theta_0) \text{ [Pa]} \quad (9)$$

の応力が上向きに発生する。



電界接線成分の連続性