v2.4 Aug.2019

電磁気単位系の構築

1st. 2016/04/07
Lst. 2019/08/08

電磁気力

$$F=\frac{q_1q_2}{\alpha r^2} \qquad (1)$$

1785年
電気量に関するクーロンの法則
力は電荷間の距離の2乗に反比例し，
電荷量の積に比例することは分かった。

互いに独立

$$F=\frac{m_1m_2}{\beta r^2} \qquad (2)$$

1785年
磁気量に関するクーロンの法則
磁荷は単独で存在しないが，力は電荷と同様な性質を有することは分かった。

$$q=It$$

互いに独立でない

これらの性質は地球が存在するはるか前から宇宙にあった法則・不変の事実であり，人間は介入できない。

$$\Delta F=\frac{mI\Delta l\sin\theta}{\gamma r^2} \qquad (3)$$

1820年
ビオ-サバールの法則
力は電流素から磁荷までの距離の2乗に反比例し，磁荷と電流素の大きさの積に比例し，角度特性を有することは分かった。

実験則以外の比例定数 α，β，γ はどうやって決めたらよいか？

電磁気力の簡略化

まず，(1)(2)(3)を簡略化して，力の単位次元が等しくなるようにする。

$$F=\frac{q^2}{\alpha r^2} \qquad (1)'$$

$$F=\frac{m^2}{\beta r^2} \qquad (2)'$$

$$\Delta F=\frac{mI}{\gamma r} \qquad (3)'$$

(3)において，Δlとrは同じ長さの次元なので打ち消し，sinθは角度特性を表す係数なので無次元

電気学会大学講座 電気計測器，pp.6-9，電気学会，1966
電磁気学における単位系 http://j-molsci.jp/archives/AC0003_2.pdf
https://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/files/public/1/14958/20170829115449925924/Refunit43W_7(2).pdf

光速の導入

(1)’×(2)’ = [(3)’]^2 を満たせば両辺の次元は一致するので

$$\frac{q^2}{\alpha r^2}\frac{m^2}{\beta r^2}=\frac{m^2I^2}{\gamma^2r^2}$$

ここで，q=I t より q を消去すると

$$\frac{I^2t^2}{\alpha r^2}\frac{m^2}{\beta r^2}=\frac{m^2I^2}{\gamma^2r^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}=\left(\frac{r}{t}\right)^2 \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma^2}{\alpha\beta}=c_0^{\,2} \qquad (4)'$$

(4)において，距離 r 離れた点に電場又は磁場が作用するのに要する時間は，電磁波の速度c_0に等しいので，$r/t=c_0$ (=3×10^8 m/s)になる

電気定数と磁気定数の導入

ここで,

$$\begin{cases} \alpha = k_1\varepsilon_0 & \text{電気量のみに関する定数} \\ \beta = k_2\mu_0 & \text{磁気量のみに関する定数} \\ \gamma = k_3 K & \text{電気と磁気両方に関係する定数} \end{cases}$$

と仮におくと, (4)' は

$$\frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = c_0^{\ 2} \quad \Rightarrow \frac{k_3^{\ 2}}{k_1 k_2}\frac{K^2}{\varepsilon_0\mu_0} = c_0^{\ 2} \qquad (4)''$$

k_1, k_2, k_3 は人間が勝手に導入した値なので，任意に決められる。
最も簡単なのは　ここでやっと人間が介入できる。

$$\frac{k_3^{\ 2}}{k_1 k_2} = 1 \qquad (5)$$

(5)において, k には次の2つが使われてきた。
- k_1, k_2, k_3 = 1　: 非有理単位系と呼ぶ
- k_1, k_2, k_3 = 4π : 有理単位系と呼ぶ

非有理単位系

の場合であり, (5)を(4)''に代入すると

$$\frac{K^2}{\varepsilon_0\mu_0} = c_0^{\ 2} \quad \Rightarrow K^2 = \varepsilon_0\mu_0 c_0^{\ 2} \qquad (6)$$

なる関係が得られる。(6)は光速 c_0 を含むので, 3つの独立量 ε_0, μ_0, K の関係を示している。これらのうち2つは人間が自由に指定できる。最も簡単なのは, 2つの独立量をともに 1 とすることである。

単位系	ε_0	μ_0	K	$\alpha = k_1\varepsilon_0$	$\beta = k_2\mu_0$	$\gamma = k_3 K$
gauss 1850年	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	c_0	1	1	c_0
cgs-esu 1856年	$\boxed{1}$	$1/c_0^{\ 2}$	$\boxed{1}$	1	$1/c_0^{\ 2}$	1
cgs-emu 1856年	$1/c_0^{\ 2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	$1/c_0^{\ 2}$	1	1
mks-nonrational 1901年	$1/\left(c_0^{\ 2}\mu_0\right)$	μ_0	$\boxed{1}$	$1/\left(c_0^{\ 2}\mu_0\right)$	μ_0	1

最後のmks-nonrationalだけは, Kのみ1として μ_0 はそのまま残している。

有理単位系

また, (5)において, k_1, k_2, k_3に4πを選択した場合を考えると,

単位系	ε_0	μ_0	K	$\alpha = k_1\varepsilon_0$	$\beta = k_2\mu_0$	$\gamma = k_3 K$
mks-rational	$1/\left(c_0^{\ 2}\mu_0\right)$	μ_0	$\boxed{1}$	$4\pi/\left(c_0^{\ 2}\mu_0\right) = 4\pi/\varepsilon_0$	$4\pi\mu_0$	4π

となる。以上より, mks-rational単位系では(1)(2)(3)は次のようになる。

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$F = \frac{m_1 m_2}{4\pi\mu_0 r^2}$$

$$\Delta F = \frac{mI\Delta l\sin\theta}{4\pi r^2}$$

まとめ

1850年に初めて制定されたgauss単位系に始まり, わずか50年足らずでmks単位系に変更された経緯がある。実際に、古い教科書ではcgs単位系が使われているものも多い。今後、電磁波と重力場の相互作用が解明されるにつれて、新たな単位系が用いられる可能性もある。

中国から伝わった古い学問に易学というものがあります。「易学」=「占い」のイメージ がありますが、実際はかなり違うそうです。「易」という漢字は「かわる」「変化する」の 意味があり、古くは「とかげ」の象形文字に起源があるそうです。私はまっさきに爬虫類 のカメレオンを想像して納得することができました。「変わること」や「変わったこと」が本当に分かるためには、その正反対の「絶対に変わらない」部分をよく把握しておかなければならないそうです。つまり、「変化」に対応してゆくことは、変わることのない大切な「ベース」を把握しておくことが必要であるということではないでしょうか。

人間が誕生する前から変わっていないのは、電磁気力が電荷または磁荷の積に比例し、両者の距離の二乗に反比例するという事実だけ。