

1章 電磁気学

1.1 電磁気学とは？

137 億年前にビッグバンから始まったとされるこの3次元宇宙空間には、重力、電磁気力、原子核レベルで働く弱い力と強い力の4つの力がある。量子力学ではこれら4つの力はもとと同じものだったものが宇宙の成長過程で枝分かれしたとして理解しようとする試みがなされている(図1.1参照)。現在の科学では、重力を記述した一般相対性理論、電磁気力と弱い力をまとめた電弱理論、強い力を記述した量子色力学がそれぞれ個別に確立されている。そして、将来これらを一つの学問として統一的に記述できる究極の理論は超ひも理論と考えられているが、2010年現在の地球の科学レベルでは解明されていない領域である。電磁気学とは、このような4つの力の1つである電磁気力に限定した学問(1684年ニュートンの万有引力の法則発見から100年後に始まった2番目の学問)であるが、その応用は電気回路、電子回路、情報通信、コンピュータなど現在のエレクトロニクス技術を学ぶためのスタートラインとなる学問である。本章では電気力を扱う静電気、磁気力を扱う静磁気に加え、時間変動する磁場を扱う電磁誘導について学習する。



図1.1 3次元宇宙に存在する4つの力と対応理論体系(ニュートンムック“真空とインフレーション宇宙論” p.139, Newton Press, 2007. より引用補足)

1.2 静電気

1.2.1 電荷と帯電

我々が目にする静電気現象は電荷によって引き起こされている。電荷の正体は(電磁気学の範囲では)電子のことである。電子は、陽子や中性子の材料であるクォークのような極微素粒子の一つで、その形態は図1.2の酸素原子の例のように、複数の電子が原子核の周囲を雲状に覆っていると考えられている。考えられているというのは、現在の地球の科学レベルでは電子を直接観察できていないからである。したがって本当の形すら分かっていないというのが現状である。便宜上、原子核の大きさを仮に1mの球とすれば、最外殻の電子は国際線の高度を周回するほどスカスカの状態である。この最外殻の電子に摩擦や光などの外部エネルギーが与えられると、電子は本来所属する原子核を離れて他の原子や分子に移動することがある。我々が地球を離れて他の太陽系の別の惑星に移動するのに光やエネルギーが必要なのと似ている。

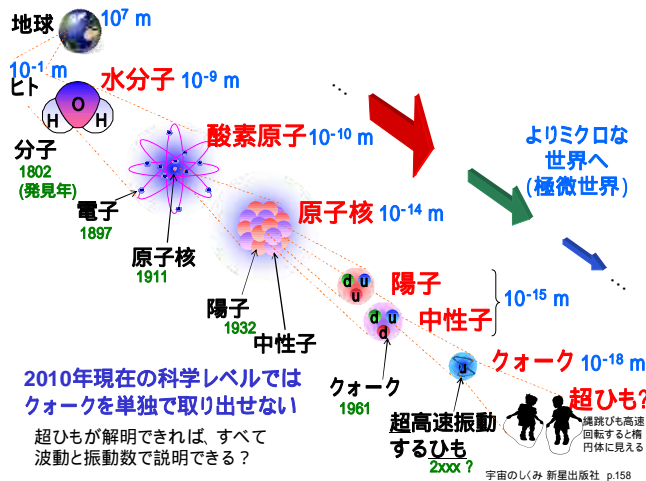


図1.2 素粒子の階層構造。電子を粒子として見る場合、その大きさはほぼクォークの大きさと考えて良い。(宇宙のしくみ新星出版社 p.156を引用補足)ミクロ世界を解明することは、この三次元宇宙の成り立ち(究極の理論)を解明することに等しい。

さて、材質の異なる二つの物質同士を擦り合わせるとき、電子がどちらの物質に移るかはおよそ図1.3の順序で決まることが過去の実験から分かっている。この順序で左の物質ほど相対的に電子を放出しやすく、右の物質ほど電子を獲得しやすい

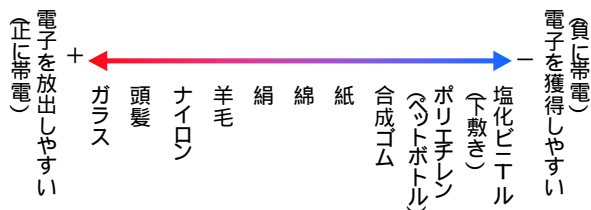


図1.3 帯電序列。(親子で遊べる実験と工作ふしぎを体験！”, ニュートンプレス, 2006)

い。電子の電荷は歴史的な背景から負（電子1つの電荷量は $-1.60217733 \times 10^{-19}$ C）と定義されているので、電子を放出した物質は正に帯電したといい、電子を余剰に獲得した物質は負に帯電したという。帯電列上で遠い物質同士を擦り合わせるとより大きな帯電が得られる。

1.2.2 クーロンの法則と電界

1785年クーロンは、図1.4 左に示すような銀糸を使ったねじり秤による実験から、電荷間に働く力Fについて次の3つの性質を明らかにした。

- 【1】 力の大きさは固定球と可動球に与えた電荷の大きさQとqに比例した。 $(F \propto Qq)$

- 【2】 力の大きさは電荷間の距離rの逆2乗に比例した。 $(F \propto 1/r^2)$

- 【3】 力の方向は電荷間を結んだ直線方向であった。

- 【4】 同種の電荷間では斥力、異種の電荷間では引力であった。

実験【1】と実験【2】をまとめると式(1.1)が得られる。これをクーロンの法則と呼ぶ。ただし、係数 $k=1/4\pi\epsilon_0$ はSI 単位系で決められた定数（ $\epsilon_0=8.856 \times 10^{-12}$ を真空の誘電率と呼ぶ）である。

$$F = k \frac{Qq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \tag{1.1}$$

この式は「電気力は二つの電荷の積に比例し、距離の2乗に反比例する。そのときの比例定数は $1/4\pi\epsilon_0$ である。」という電荷と電気力に関する法則を示している。1684年に発見されたニュートンの万有引力の法則と式の形が同じであるから覚えやすい。図1.4右上で可動球（力の観察点）に与える電荷を $q=+1$ C（単位電

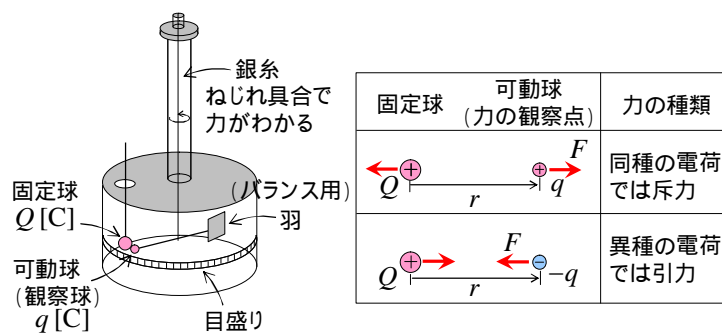


図1.4 クーロンのねじりばかり(左)と帯電球に働く力(右)。固定球と可動球を接触させた状態で帯電(Qとq)させると両球には斥力が働く。また、両者を離して異種電荷(Qと-q)を与えると引力が働く。力の大きさは銀糸のねじれ具合から求められる。

荷という)にしたときのクーロンの法則は次式になる。

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \tag{1.2}$$

式(1.2)は固定点に $Q[C]$ 、力の観察点に $+1\text{ C}$ の電荷を置いたときに働く力 F に等しく、これを特別に E と表現し電界と呼ぶ。また、式(1.1)に式(1.2)を代入すれば、力の観察点における電気力 F と電界 E の関係を次式のように表現できる。

$$F = qE \tag{1.3}$$

1.2.3 電位

固定電荷 $+Q[C]$ の近傍で力の観察点を順番に変えながら式(1.2)を観察すると、図1.5 左のような放射状のベクトル場になる。外向きの矢印で書いたのは、中心の固定電荷 $+Q[C]$ に対して、力の観察点の電荷が $+1\text{C}$ なので、常に斥力(外向きの力)が働くためである。ここで、図1.5 右のよ

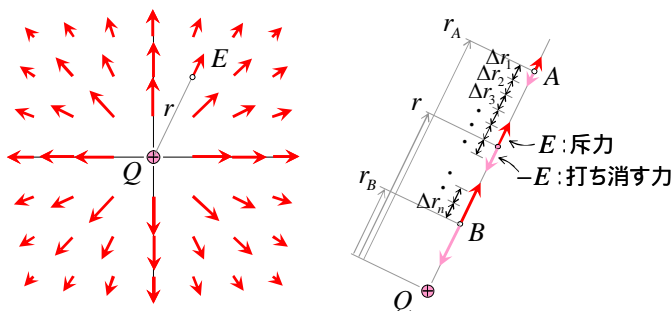


図1.5 固定球に $+Q[C]$ を与えたとき、クーロンの法則に従えばその周囲に放射状の電界ベクトル場が作られる(左)。固定電荷の周囲で単位電荷を自由に移動させるには、電界 E と等しい反対の力 $-E$ を作用させる必要がある(右)。

うに、力の観察点 r に置いた単位電荷を r だけ動かす際の仕事を考える。単位電荷には既に電界 E が外向きに働いているので、自在に動かすにはこれを打ち消す反対の力 $-E$ を作用させ続ければよい。微小仕事 W は、加えた力 $-E$ と微小移動距離 r の積であるから次式で与えられる。

$$\Delta W = -E\Delta r \tag{1.4}$$

これをA点からB点まで続けたときの仕事 W は、次式(1.5)で与えられる。

$$W = \sum_{i=1}^n -E\Delta r_i \tag{1.5}$$

AB間の分割数 n を増やして r を極限まで小さくすれば \int は積分記号に置き換えることができる。さらに、式(1.2)の E を代入すれば、

$$W = \sum_{i=1}^n -E\Delta r_i \approx \int_{r_A}^{r_B} -E dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = V_{BA} \quad (1.6)$$

となる。これをA点を基準にしたB点の電位もしくはBA間の電位差と呼び、単位電荷あたりの電気力FをEで表現したのと同様に、WのかわりにV(単位を[V]で表しボルトと読む)で表現する習慣がある。電位を求める際の基準点Aはどこでも良いが、式(1.6)で $r_A \rightarrow \infty$ として無限遠を基準としたときのB点の電位は次式となる。

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} \quad (1.7)$$

式(1.7)は、図1.5左のように3次元空間に孤立した固定電荷+Q[C]が作る電界の中のある一点Bに、+1Cの単位電荷を置くのに必要な電気的な位置エネルギーを示している。高いところに物を移動させる際、重力に逆らって仕事をすると位置エネルギーが大きくなるのと似ている。

1.2.4 ガウスの法則

図1.6左に示すように点電荷Qを含む球面S(ガウス閉面と呼ぶ)を考える。ここで、半径rの球面Sを図1.6右のように複数の微小面積 Δs に分割し、球面S上にある電界Eと微小面積 Δs の積 $E\Delta s_i$ ($i=1,2,3,\dots,n$)を球面S全体で総和する。電界と面積の積は流束と呼ばれる物理量であるが、その意味は

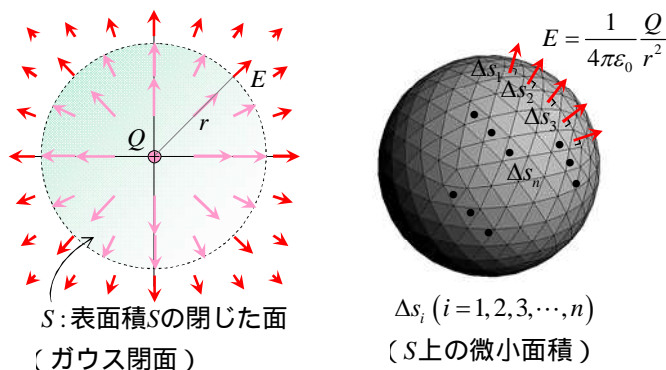


図1.6 固定電荷Qを内部に含む球面S(左)と球面Sを複数の微小面積 Δs に分割し、電界Eと微小面積 Δs の積を球面S全体で総和する。

あまり重要でなく単にそのような数式操作をすればよい。球面Sの分割数nを増やして Δs を極限まで小さくすれば、式(1.8)左辺の \sum は積分記号に置き換えることができる。さらに式(1.2)のEを代入して整理すると、

$$\sum_{i=1}^n E\Delta s_i \approx \int_0^{4\pi r^2} E ds = \int_0^{4\pi r^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \int_0^{4\pi r^2} ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

となる。ここで、半径 r は積分変数 s と無関係な一定の値を考えているから、定数と同じように扱うことが可能で積分記号の外に出せる。式(1.8)の結果だけを抽出すると、

$$\oint_S E ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{1.9}$$

となる。ただし、 \oint_S はガウス閉面 S が完全に閉じている（穴が開いていない）

ことを示す記号で $\int_0^{4\pi r^2}$ と同じである。証明が煩雑になるため省略するが、実際

には球面 S の形は完全な球でなくても、電荷を内部に含んでいて閉じてさえいれば楕円でもそら豆形でも何でもよい。式(1.9)をガウスの法則と呼ぶ。ただし、 Q はガウス閉面 S の内側に含まれる総電荷を表し、ガウス閉面 S の外側にある電荷は含まない。この式は、「 S 上において、電界 E と S を構成する微小面積 ds の積を一面総和すると、 S 内部に含まれる電荷 Q を $1/\epsilon_0$ 倍した値になる。」という電荷と電界に関する法則を示している。式(1.9)のガウスの法則と式(1.2)のクーロンの法則は式の変形をただで中身は全く同じである。

ガウスの法則の適用例

何故ガウスの法則をわざわざ使う必要があるのだろうか。そこで、ガウスの法則の具体例として、図1.7左のような電極面積 A 、電極間距離 d の平行金属平板内部の電界の大きさを式(1.9)から求めてみる。上下の電極に $\pm Q$ の電荷を与えたと想定し、 $+Q$ だけを完全に包むような

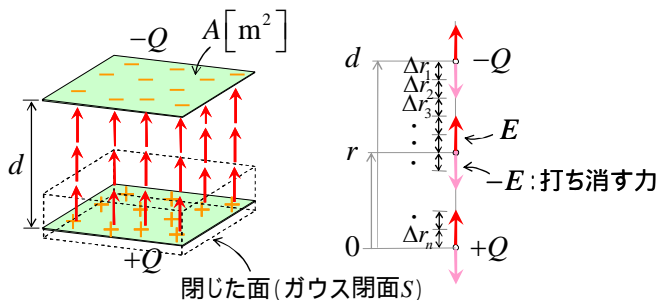


図1.7 平行金属平板に $\pm Q[C]$ を与えたとき、発生する電界の様子(左)。ガウス面は $+Q[C]$ を含むような直方体を考える。単位電荷を電極内で自由に移動させるには、電界 E と等しい反対の力 $-E$ を作用させる必要がある(右)。

直方体形状のガウス閉面 S を考える。電極内部の電界の様子を頭の中で想像すると、図1.7左のようにガウス閉面 S の上部 ($A[m^2]$) だけを電界が貫き、その E の大

2010/03/15

きさは一定になっているはずである。何故ならば電荷はお互いにクーロン力で反発し合って電極内で均等に分布しているためである。また、電界は+の電荷から出て-の電荷で吸収される性質があるから、ガウス閉面 S の上部以外には電界は存在しないと考えると差し支えない。すると、式(1.9)の E は面積 $A[\text{m}^2]$ 上で一定の大きさ(定数)とみなせるので、積分記号の外に出すことができる。即ち、

$$E \int_A ds = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (1.10)$$

となる。次に電極間の電位差を求める。電位差の式(1.5)に式(1.10)を代入すると、

$$V = \sum_{i=1}^n -E \Delta r_i \approx \int_d^0 -E dr = \int_d^0 -\frac{Q}{\epsilon_0 A} dr = -\frac{Q}{\epsilon_0 A} \int_d^0 dr = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d \quad (1.11)$$

さらに式(1.11)の結果を変形すると、

$$V = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d \Rightarrow \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{A}{d} = C \quad (1.12)$$

となる。式(1.12)の C をキャパシタンスと呼び、単位電圧を加えたときに電極に蓄えることができる電荷量を示す指標となる。平行金属平板のキャパシタンスは、電極の面積に比例し、電極間の距離に反比例し、その比例定数は ϵ_0 であることが分かる。式(1.12)を導出するのにガウスの法則を使うとわずか3行の計算で済んだが、クーロンの法則では計算過程が極めて煩雑になる欠点がある。

1.3 静磁気

1.3.1 磁石とループ電流

電気力には2種類が存在し、同種の電荷では引力、異種の電荷では斥力が働いた

(図1.4右参照)。磁気力にも2種類が存在し、同方向の電流には引力、逆方向の電流には斥力が働く。この様子を図1.8左に示す。導線の中には多数の自由電子(負電荷)があるので、実際には電気力も働く。しかし、自由電子を放出した原子核

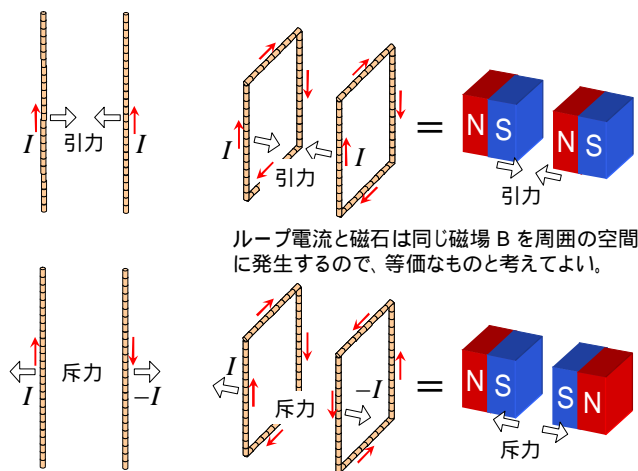


図1.8 2本の直線電流に働く引力と斥力の関係(左)。直線電流からループ電流を作ると磁石と等価になる(右)。磁極の吸引や反発は電流に働く磁気力で説明される。

(正電荷)も等量存在するので、導線全体では電気的に中性で電気力は観察されない。

磁気力と言うと最初に思い浮かぶのは磁石であるが、図1.8左の直線電流をループ状に加工したループ電流(図1.8中央)と磁石(図1.8右)は、その周囲空間に同じ磁場を作るため互いに等価である。実際に磁石の中は原子レベルで方向が揃ったループ電流が流れていることが理論的に知られている(図1.9参照)。磁石内部は電流が打ち消しあうので、磁石の外周表面だけに電流が流れているように見える。したがって、磁石とループ電流は互いに等価なのである。

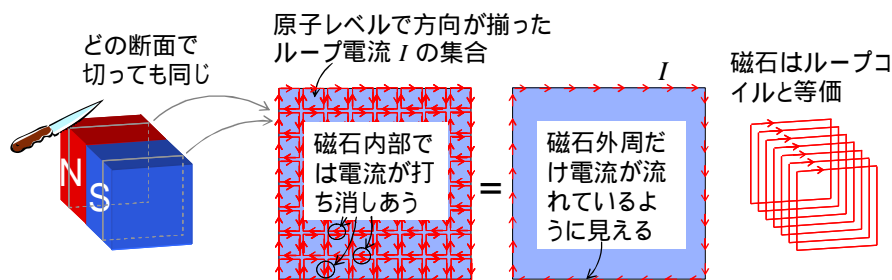


図1.9 磁石の断面を流れる原子レベルのループ電流のイメージ(左)とその等価ループ電流の様子(右)。金太郎飴のように磁石のどの断面で切っても同じである。この電流は導線を通る電流のように取り出すことはできない。

1.3.2 磁場(磁束密度)

電気力が式(1.3)で与えられたように、磁気力についても定式化を試みる。電界(または電場) E とは、式(1.2)のように力の観察点に置かれた単位電荷に作用する電気力 F_e で定義された。考え方が難解であるが、同様にして力の観察点に置かれた

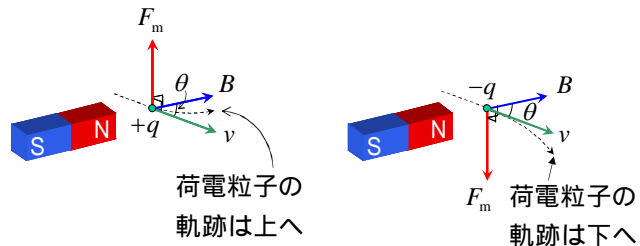


図1.10 速度 v で運動する荷電粒子 q に働く磁気力 F_m の方向。速度 v と磁場 B から成る平面を考えると力 F_m はその面の法線方向に働く。電荷の符号が負だと力も逆向きになる(右)。

テスト物体に作用する磁気力 F_m から、その点における磁場(磁束密度) B を定義することができる。電気現象の根源が電荷であったように、磁気現象の根源は電流であるので、このテスト物体として「運動する荷電粒子=電流」を考える。図1.10に示すように固定磁石によって作られた磁場 B となす角度 θ で速度 v の荷電粒子 q を打ち込み、その軌跡を観察して粒子に働く力 F_m を求める。この荷電粒子の観察実験では次のことが明らかになっている。

- 【1】 電荷の大きさと速さに比例した。($F_m \propto qv$)
 - 【2】 磁場の強さに比例した。($F_m \propto B$)
 - 【3】 $\sin \theta$ に比例した。($F_m \propto \sin \theta$) $\theta=90^\circ$ で最大、 $\theta=0^\circ$ でゼロ。
 - 【4】 方向は v と B がつくる面に垂直であり、正電荷と負電荷では方向が逆。
- 実験【1】から実験【3】より力の大きさに関する式(1.13)が得られる。

$$F_m = qvB \sin \theta \tag{1.13}$$

電気力と磁気力は表1.1のような類似性があるが、次に示す重要な違いがある。

- 【1】 電気力 F_e は電界 E の方向と同じであるが、磁気力 F_m は磁場 B の方向と垂直方向に作用する。
- 【2】 電気力 F_e は荷電粒子の速度 v と無関係に作用するが、磁気力 F_m は荷電粒子が運動しているときのみ作用する。
- 【3】 電気力 F_e は荷電粒子を動かすときに仕事をするが、磁気力 F_m は荷電粒子を動かしても仕事をしない。これは荷電粒子の変位 (v の方向) と力 F_m

が常に垂直なためである。

表 1.1 電気力と磁気力の類似性と違い。

	電気現象	磁気現象
正体	電荷[C]	電流[A] (磁荷の存在が現科学では確認されていないため)
力の種類	同種の電荷では斥力 異種の電荷では引力	同方向の電流では引力 逆方向の電流では斥力
媒体	電界(電場) E	磁束密度(磁場) B
力と媒体と電荷の関係	電気力 $F_e = qE$	磁気力 $F_m = qvB \sin \theta$ q: 荷電粒子の電荷 v: 荷電粒子の速度 θ: 磁場と荷電粒子のなす角

1.3.3 フレミング左手の法則

磁気力は式(1.13)のように単独の荷電粒子 q に対する表現方法の他に、電流 I に対する表現方法がある。そこで、図1.11のような磁場 B の中で静止した導線に電流 I を流したとき、導線に働く磁気力 F を求め。導線の断面積を $S[m^2]$ 、導線内の自由電子濃度を $N[個/m^3]$ 、電子の速度を $v[m/s]$ とすると、1秒間あたりに右端へ押し出される(図1.11 導線右端の点線で囲まれた領域の)自由電子の数は NSv 個であるから、電流(定義は単位時間にある断面を通過する電荷量)の大きさはこれに電子の電荷量 e を掛けて、

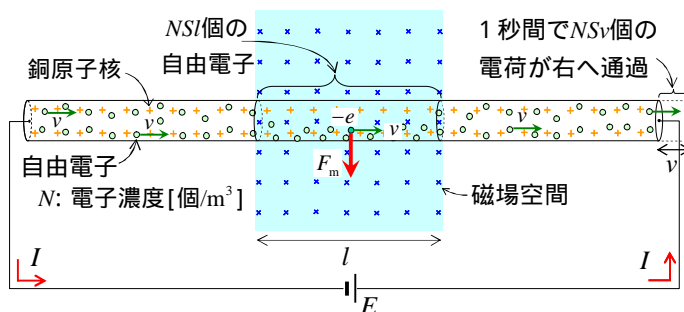


図1.11 磁場の中で静止した導線を通る電流 I に働く力。電流に働く磁気力は、速度 v で移動する個々の自由電子が、導線を内側から外に押し出すために生じている。

$I = eNSv$ (1.14)

で与えられる。ここで、図1.11 中央にある自由電子1つに働く磁気力 F_m を求める。式(1.13)に式(1.14)を代入すると、次式のように電流 I を使って磁気力 F_m を表現できる。

$$F_m = qvB \sin \theta = evB \sin \theta = \frac{I}{NS} B \sin \theta \tag{1.15}$$

ここで、 θ は図1.10に示すように磁場と電子のなす角度であり、図1.11の例ではちょうど $\theta = 90^\circ$ である。所で、図1.11 で考えている磁場空間の大きさは $l[m]$ であるから、全く同じように磁場の影響を受ける自由電子の数は全部で NSl 個ある。即ち、自由電子1つあたりの磁気力の式(1.15)を NSl 倍したものが磁場空間の中にある導線 $l[m]$ 全体に働く力である。これを F とすれば、

$$F = IBl \sin \theta \tag{1.16}$$

フレミングが左手の3本指(中指 = I 、人差し指 = B 、親指 = F)に対応させたため、これをフレミングの左手則と呼ぶ。繰り返しになるが、 θ は磁場と電流のなす角度である。実際に図1.11において細くて曲がりやすい導線なら下向きに変形する。

1.3.4 ビオ-サバールの法則

図1.12 に示すように、任意の形状をした定常電流 I を複数の微小電流素 dl に分割し、塗りつぶされた電流素に着目する。この電流素から観測点までの距離を r 、電流素に流れる電流の接線方向と観測点に向かう直線との開き角度を θ としたとき、観測点で測定される磁束密度 B について次のことが分かった。

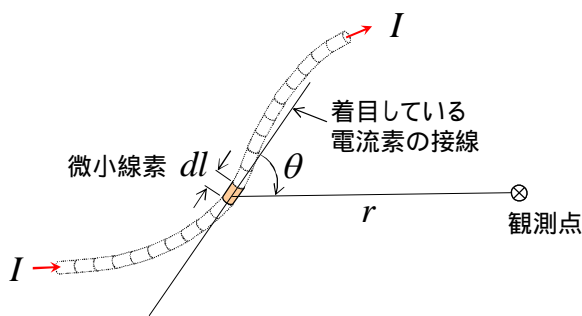


図1.12 電流 I を複数の微小区間に分割し、着目する電流素から観測点までの距離を r 、開き角度を θ とする。

- 【1】 磁場は電流の大きさに比例した。 ($B \propto I$)
- 【2】 磁場は電流素の長さに比例した。 ($B \propto dl$)
- 【3】 磁場は電流素と観測点の間の距離の逆2乗に比例した。 ($B \propto 1/r^2$)
- 【4】 磁場は $\sin \theta$ に比例した。 ($B \propto \sin \theta$) $\theta = 90^\circ$ で最大、 $\theta = 0^\circ$ でゼロ。

【5】 磁場の方向は紙面表から裏に向かう方向であった。 ($B \propto \otimes$)

実験【1】から実験【4】をまとめると式(1.17)が得られる。ただし、係数 $\mu_0/4\pi$ は SI 単位系で定義された定数であり、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ を真空の透磁率と呼ぶ。

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \tag{1.17}$$

これをビオ-サバールの法則と呼ぶ。この式の意味は、「微小電流素 Idl から r 離れた位置に生じる微小磁場 dB の大きさは式(1.17)になり、その方向は dl に引いた接線から直線 r に向かっ

て右ネジを回したときのネジの進行方向になる」という電流と磁場に関する法則を示している。

一例として、直線電流の周囲に発生する磁場 B をビオ-サバールの法則(1.17)を使って求めると、図1.13上のような渦状の磁場となる。このときの電流の方向と磁場の方向の関係は、図1.13下に示すように右ネジの関係になっている。

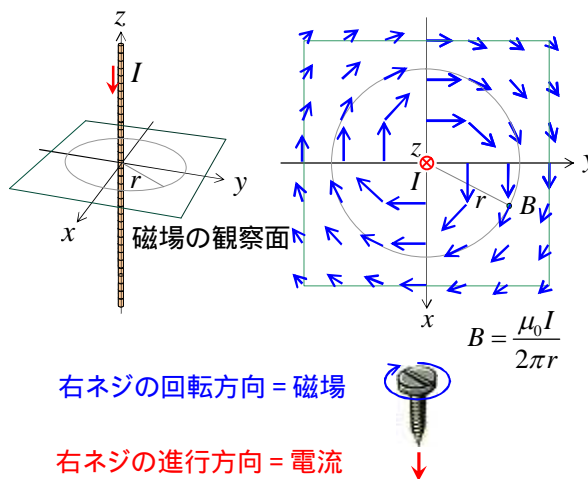


図1.13 z 軸上を流れる無限長電流 I が周囲に作る磁場 B を真上から見た様子(上)。磁場 B の大きさは $1/r$ に比例して小さくなる。電流と磁場の方向は、右ネジの関係になっている(下)。

1.3.5 アンペアの法則

図1.14に示すような z 軸上を流れる無限長電流 I を囲む半径 r の円周 C を考える。電流周囲に発生する磁場 B は図1.13のように、電流 I を中心とした右ネジの渦状ベクトル場になっており、その大きさはビオ-サバールの法則より式(1.18)で与えられる。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{1.18}$$

ここで、半径 r の円周 C を複数の微小区間 Δl に分割し、円周 C 上にある磁場 B と微小長さ Δl の積 $B\Delta l_i$ ($i=1,2,3,\dots,n$) を円周 C 全体で総和する。磁場と長さの積が有する物理的な意味は重要ではないので、単に数式操作と考えればよい。分割数 n を増やして Δl を極限まで小さくすれば、式(1.19)左辺の Σ は積分記号に置き換え

ることができる。さらに式(1.18)の B を代入して整理すると、

$$\sum_{i=1}^n B\Delta l_i \approx \int_0^{2\pi r} B dl = \int_0^{2\pi r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \int_0^{2\pi r} dl = \mu_0 I \tag{1.19}$$

となる。ここで、半径 r は積分変数 l と無関係な一定の値を考えているから、定数と同じように扱うことが可能で積分記号の外に出せる。式(1.19)の結果だけを抽出すると、

$$\oint_C B dl = \mu_0 I \tag{1.20}$$

となる。ただし、 \oint_C は円周 C が閉じている(途中で切れていない)ことを示す

記号で $\int_0^{2\pi r}$ と同じである。証明が煩雑になるため省略するが、実際には円周 C

の形は完全な円でなくても、電流を内部に含んでいて1周で閉じてさえいれば楕円でもそら豆形でも何でもよい。式(1.20)をアンペアの法則と呼ぶ。ただし、 I は

C の内側に含まれる総電流を表し、 C の外側にある電流は含まない。この式は「 C 上において、磁場 B と C を構成する微小長さ dl の積を一周総和すると、 C 内部に含まれる電流 I を μ_0 倍した値になる」という電流と磁場に関する法則を示している。静磁気(磁場が定常で変化しない)問題に関しては、式(1.20)のアンペアの法則と式(1.17)のビオ-サバルの法則は式の変形をただで中身は全く同じである。

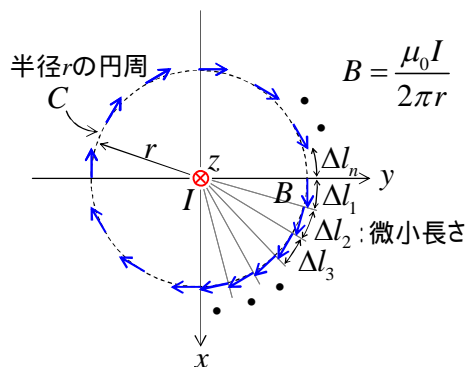


図1.14 半径 r の円周 C を複数の微小区間に分割し、磁場 B と微小長さ dl の積を円周 C 全体で総和する。

アンペアの法則の適用例

クーロンの法則(式(1.2))からガウスの法則(式(1.9))を導出したように、何故アンペアの法則をわざわざ使う必要があるのだろうか。そこで、アンペアの法則の具体例として、無限長直線電流の周囲の磁場の大きさを式(1.20)から求

めてみる。まず、無限長直線電流の周囲の磁場の様子を頭の中で想像すると、図1.14のように半径 r の円周上で B は一定の大きさになっているはずである。何故ならば一般的に電流とは極細の円筒であるから、円筒に垂直な面内なら発生する磁場は360度どの方位にも対称性を有しているはずである。すると、式(1.20)の B は半径 r の円周上で一定の大きさ(定数)とみなせるので、積分記号の外に出すことができる。即ち、

$$B \oint_C dl = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{1.21}$$

となり、式(1.18)の結果がたった1行の計算で導出できた。本書では省略するが、式(1.18)の結果をビオ-サバルの法則から導出しようとする、この数十倍の計算が必要になる。

さて、直線電流がその周囲につくる磁場は式(1.21)で与えられることが分かったので、式(1.16)のフレミング左手則を利用して図1.15のような2本の平行直線電流に働く力を具体的に求め

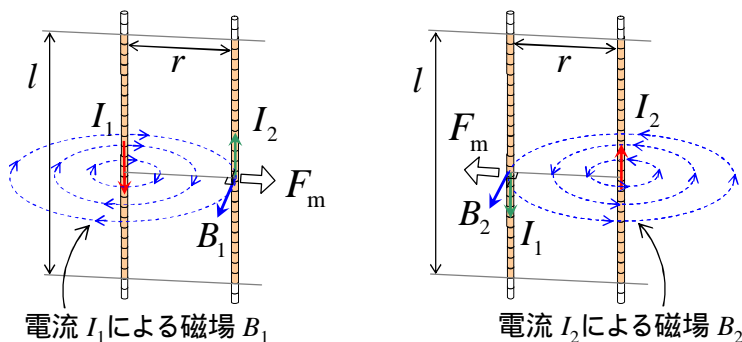


図1.15 半径 r の円周 C を複数の微小区間 l に分割し、磁場 B と微小長さ l の積を円周 C 全体で総和する。

てみる。平行電流の間隔は r 、着目する電流の長さは l とし、それぞれに I_1, I_2 の電流が互いに逆方向に流れているとする。まず、図1.15左のように電流 I_1 の周囲には右ネジの関係から時計回りの磁場 B_1 が発生する。この B_1 は電流 I_2 と直交しており、働く力の大きさは式(1.16)と式(1.21)より、

$$F_m = I_2 B_1 l = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} l \tag{1.22}$$

である。方向は図1.10左のように正電荷の流れ = 電流 I_2 と考えて斥力になる。同様に図1.15右のように電流 I_2 の周囲に発生する反時計回りの磁場 B_2 と I_1 から式(1.22)と同じ斥力が求まる。

1.4 電磁誘導

1.4.1 ファラデーの法則

電流を流した導線周囲には右ネジの関係によって図1.13のような磁場が発生するため、方位磁石を置けば磁針が振れる。これを電流の磁気作用と呼ぶ。ファラデーはこの逆の現象、即ち磁場から電流が作れるのではないかと考えた。この現象を電磁誘導と呼ぶ。そして図1.16 に示すように、磁場とコイルを用いた3つの実験から次のことが分かった。この実験でコイルに電流が流れたかどうかは、コイル導線の下に置いた方位磁石の振れで確認できる。

- 【1】 磁場（磁石）を固定してコイルを引き抜くと、コイルに電流が流れた。
- 【2】 コイルを固定して磁場（磁石）を左に動かしてもコイル電流が流れた。
- 【3】 磁場の大きさを変化させる（磁石のかわりに電磁石を使う）とコイルに電流が流れた。

この3つの実験に共通していることは、コイルのループ面積 S を貫く磁場 B が時間と共に変化していることである。そこで、ループ面 S を貫く磁場 B を定量化するために、磁場 B と面積 S の積を求める。即ち、コイルのループ面 S における磁場の流束（これを磁束と呼ぶ）は次式(1.23)になる。

$$\Phi = BS \tag{1.23}$$

3つの実験すべて電源に接続されていないコイルに電流が流れたということは、コイル導線内部の自由電子を動かす力が発生したことを意味する。以下この力がどのように発生したかについて考える。

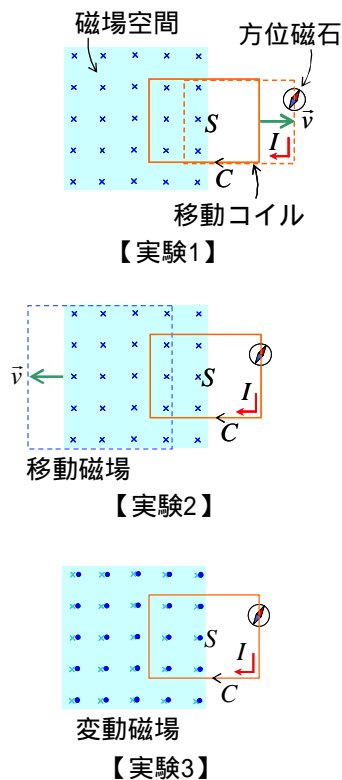


図1.16 ファラデーが行った3つの実験。

実験【1】の考察

まず実験【1】のように静止磁石の上でコイルが運動する場合に発生する力について考える。

図1.17 左に示すように磁場の中で運動する電荷には式(1.13)の磁気力 F_m が働く。この力によって自由電子は容易に移動できるために電流が流れる。一方、自由電子に働く磁気力 F_m を、

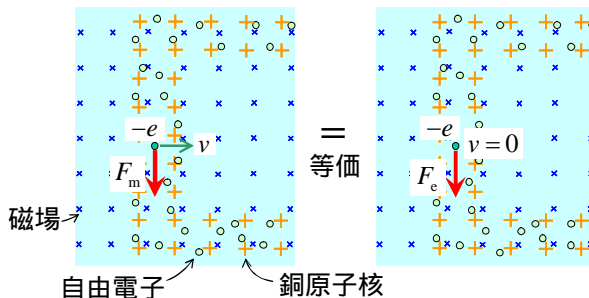


図1.17 実験【1】の拡大図(左)。自由電子に働く磁気力 F_m をコイル導体の銅原子核の立場から見ると電気力 F_e に見える(右)。

図1.17右のようにコイル導体の銅原子核(自由電子と同じ速度 v で右に移動している)の立場から見ると、自由電子の相対速度はゼロであるから磁気力 F_m には見えず電気力 F_e に見える。電気力は式(1.3)より $F_e = qE$ であるから、この場合 $E = F_e/e$ なる電界が F_e と反対向きに働いていることと同じである。導線内部に発生したこの電界 E をループ C に沿って一回り総和すると式(1.24)になる。これを起電力(electromotive force 略してemf)と呼ぶ。電池は別のメカニズム(化学作用)によって起電力を発生している。起電力の単位は電界(力)と距離の積なのでエネルギーと同じ単位[J]である。この起電力が発生したためにコイルに電流が流れたのである。

$$emf = \sum_{i=1}^n E \Delta l_i \approx \oint_C E dl \tag{1.24}$$

実験【2】と実験【3】の考察

次に実験【2】コイルが静止していて磁場が移動する場合と実験【3】コイルも磁場も静止していて磁場の大きさが変動する場合に発生する力について考える。図1.18に示すように、空間のある場所で磁場の大きさが突然変化すると、その変化を妨げるように(変化を打ち消すほど強くはない)同心円状の電界が空間に誘導される。この電界の中に導体ループを配置すれば、ループ C 上にある電界成分が導体内部の自由電子を移動させる。電界 E をループ C 上に沿って一回り積分すれば式(1.24)と同じ起電力が得られる。式(1.24)の起電力の方向と大きさについては、後に次のことが分かっている。

- 【1】 方向はコイルと鎖交する（ループ面 S を貫く）磁束の変化を妨げるような向きに生ずる。即ち、磁束が減少したときは増やす向き、磁束が増加したときは減らす向きに起電力を生じる。（ $e \propto -$: 逆らうことを表す符号）
 - 【2】 大きさはコイルと鎖交する磁束の時間変化率に等しい。（ $e \propto d\Phi/dt$ ）
- この2つの性質から次式が得られる。

$$emf = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{1.25}$$

- 符号は起電力の方向（電流を流す方向）が磁束変化 $d\Phi$ を打ち消すことを強調するものであり、起電力の大きさだけを問題にするときは符号を無視して良い。また、式(1.25)に式(1.23)と式(1.24)を代入すると次式が得られる。

$$\oint_C E dl = -\frac{dB}{dt} S \tag{1.26}$$

式(1.26)はファラデーの法則と呼ばれている。この式は「ループ C 上において、電界 E と C を構成する微小長さ dl の積を一周総和すると、 C の断面積 S を貫く磁場 B の時間変化率を S 倍した値になる」という電界と磁場に関する法則を示している。

実は図1.18 下の実験【3】には続きがある。磁場 B につられて周囲の空間の電界 E も変動するので、その電界を電流と考えれば（電界の中にたまたま導体を置いたら電流として検出できるのであるから、電界も電流も元の性質は同じと考えて差し支えない）、式(1.20)のアンペアの法則よりその電界（電流）の周囲に

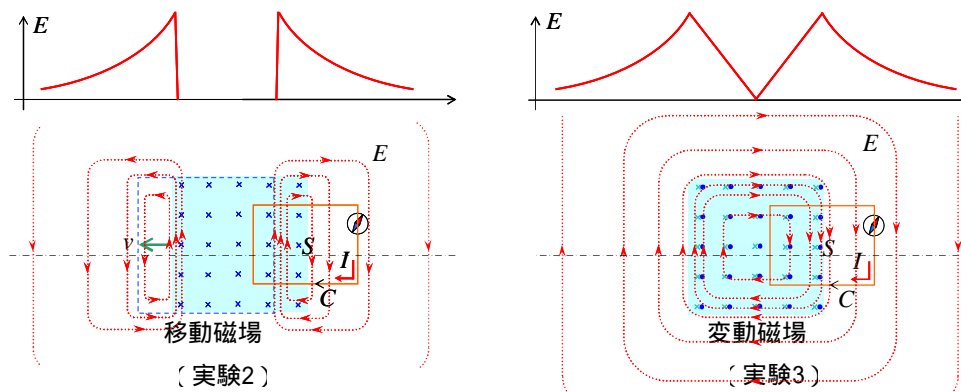


図1.18 実験【2】コイルが静止して磁場が移動する場合(上)と実験【3】コイルが静止して磁場が変動する場合(下)において、空間に誘導される電界の様子。グラフは中央の鎖線上で電界の大きさを表示したもの。

はまた新たな磁場 B が作られる。さらにその磁場 B も変動するので・・・という具合に、磁場 B と電界 E が数珠つなぎで遠くまで伝わる(図1.18 参照)。このようにして伝わる波を電磁波と呼ぶ。この場合は磁場 B を出発点(波源と呼ぶ)にしているが、電界 E や電流 I を出発点にしても順序が変わるだけで同じである。電磁波は図1.19 に示すように、電界が存在する面と磁場が存在する面が互いに直交していることが特徴である。電界 E の存在する面が地面に対して平行な場合を水平偏波、垂直な場合を垂直偏波と呼んで区別する。

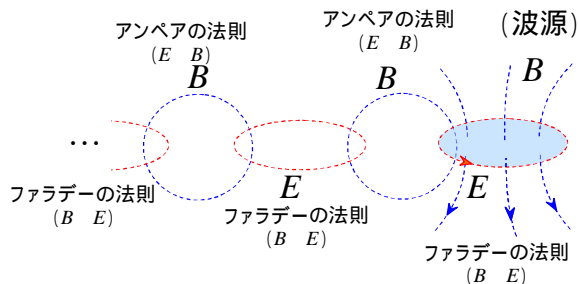


図1.19 電磁波が伝わるイメージ。ファラデーの法則とアンペアの法則が交互に繰り返されている。また、電界が存在する面と磁場が存在する面は直交している。

1.4.2 フレミング右手則

図1.16上および図1.17 の実験【1】において、磁場 B と運動する導体内部に生じた電界 E の関係を整理しておく。繰り返しになるが、磁場 B の中を速度 v で導体が運動するとき、導体内部の自由電子に働く磁気力は式(1.13)より $F_m = -evB \sin \theta$ であった。この力を同じ速度 v で運動している原子核の立場から見ると $F_e = -eE$

なる電気力に見える。導体が運動するのを外から眺めている観察者から見ても、導体内部の原子核から見ても、自由電子に働く力 F には変わらないので $F_m = F_e$ である。即ち、

$$E = vB \sin \theta \tag{1.27}$$

が成り立つ。導体を磁場の中で移動させると式(1.27)を満たす電界が導体内部に

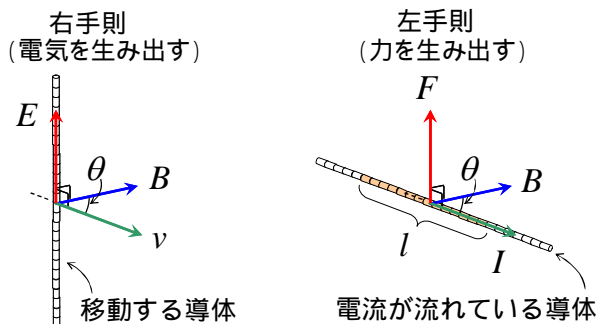


図1.20 フレミングの右手則(左)と左手則(右)。右手と左手合わせて計6つの対応関係を指にあてはめても混乱するので、実際は磁気力の式(1.13)だけを覚えればよい。

2010/03/15

発生する。フレミングが右手の3本指を中指 = E 、人差し指 = B 、親指 = v に対応させたため、これをフレミングの右手則と呼ぶ。は荷電粒子と磁場のなす角度である。結局、式(1.27)のフレミングの右手則と式(1.16)の左手則は、もと磁気力(ローレンツ力)であったものを電気として利用するか(図1.20 右)、物理的な力として利用するか(図1.20 左)の違いである。前者の利用方法は発電の原理であり、後者の利用方法はモーターの原理として使われている。

1.5 演習問題

- 【1】 頭髪とペットボトル、羊毛と下敷きをそれぞれ擦り合わせた後、頭髪と羊毛を近づけた。頭髪と羊毛はどうか。
- 【2】 -1 C の電荷を電子の個数で表すと幾らか。
- 【3】 1 eV は何J か。
- 【4】 半径 r の透明な球の中に、値が異なる3つの電荷 Q_1, Q_2, Q_3 がお互いに離れて存在している。ガウスの法則を使って、球の表面上の電界を求めよ。
- 【5】 アンペアの法則を用いて、無限長直線電流から半径 r の位置の磁場を求めよ。
- 【6】 オール電化のキーワードであるIH (Induction Heating) の加熱原理をファラデーの法則から説明せよ。
- 【7】 電磁波とは何か説明せよ。