

目次

第 1 章	電磁気学	3
1.1	静電気	4
1.1.1	電荷	4
1.1.2	クーロンの法則、電界	6
1.1.3	電位	8
1.1.4	ガウスの法則	10
1.2	静磁気	13
1.2.1	磁束密度と磁場	13
1.2.2	ビオ-サバールの法則	15
1.2.3	アンペアの法則	18
1.3	電磁誘導	20
1.3.1	ファラデーの法則	20
1.3.2	フレミングの右手則	23
1.4	演習問題	25
	参考文献	27

第 1 章

電磁気学

137 億年前にビッグバンから始まったとされるこの 3 次元宇宙空間には、重力、電磁気力、原子核レベルで働く弱い力と強い力の 4 つの力がある [1, pp.166-167]。現在の科学では、重力を記述した一般相対性理論、電磁気力と弱い力をまとめた電弱理論、強い力を記述した量子色力学がそれぞれ個別に確立されている [2, p.139]。もとは 1 つであったと推測されているこれらの力を、将来統一して記述できる究極の理論は超ひも理論 [3, p.18] と考えられている。電磁気学とは、このような 4 つの力の 1 つである電磁気力に限定した学問であるが、その応用は電気回路、電子回路、情報通信、コンピュータなど現在のエレクトロニクス技術の基盤となる学問である。本章では電気力を扱う静電気、磁気力を扱う静磁気に加え、時間変動する磁場を扱う電磁誘導について学習する。

1.1 静電気

1.1.1 電荷

主に 17~18 世紀に行われた実験^{*1}より、物体を擦り合わせることで発生する摩擦電気の性質について次のことが分かった。

1. 電気には正負 2 種類がある^{*2}。
2. 異なる物質を擦り合わせると一方に正、他方に負の電気が生じる。
3. 異種の電気には引力、同種の電気には斥力が生じる。

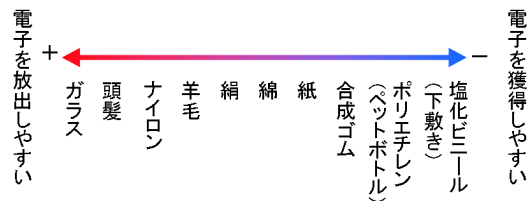


図 1.1 帯電列の一例。左の物質ほど相対的に正に帯電しやすく、右の物質ほど負に帯電しやすい。帯電列上で遠い物質同士を擦り合わせるとより大きな帯電が得られる。

【性質 1】は 2 種類の電気が（水と油のように）互いに相容れないものではなく、電子の過（-）不足（+）によるものとして説明できる。しかし、電子が発見されていなかった当時としては電気の本質を見抜いた優れた命名である。【性質 2】は物質を構成する原子に摩擦エネルギーが与えられ、最外殻の電子が相手の物質に移ることとして説明できる [6, pp.2-4]。このとき電子がどちらの物質に移るかはおよそ図 1.1 の順序で決まる [7, p.82][8, pp.44-45]。【性質 3】の力は後に説明するクーロンの法則（式 (1.2)）として定式化されている。

これらの現象を科学的に評価するには、物質が帯びる電気の量（電子の過不足）を定量化する必要がある。ここで使うのが電荷（単位を [C] で表しクーロンと読む）である。電荷については 19~20 世紀前半に行われた実験より次のことが分かった。

1. 電子の電荷と質量の比は $e/m = 1.75882 \times 10^{11}$ C/kg である^{*3}。
2. 電荷の最小単位（電気素量と呼ぶ）は $e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ C であり、その整数倍の値しか取り得ない^{*4}。

【実験 1】は図 1.2 左に示すような陰極線を観察すると、その曲がり方は陰極線を構成する電荷 e に比例し、質量 m に反比例する。穴の開いた陽極の後段で加える磁界または

^{*1} 「電磁気学の年表」や「粒子発見の年表」でインターネット検索すると、歴史的背景が時系列で分かる [4]。

^{*2} 当時ガラス電気と樹脂電気として知られていた 2 種類の電気を、1750 年 Franklin がそれぞれ正電気と負電気と名付けた。もしもこのとき、ガラス電気を負電気、樹脂電気を正電気と決めていたら、後に発見された電子の電荷は正と定義されていた [5, pp.6-7]。

^{*3} 1897 年 Thomson によって発表された。トムソンの実験として知られている。

^{*4} 1912 年 Millikan によって発表された。ミリカンの油滴実験として知られている。現在では電荷の最小単位はクォーク $e/3$ であることが理論的に分かっている [1, p.167]。ただし、現科学でクォークを単独で取り出すことには成功していないため、 e が電磁気学で扱う電荷の最小単位であることに変わりはない。

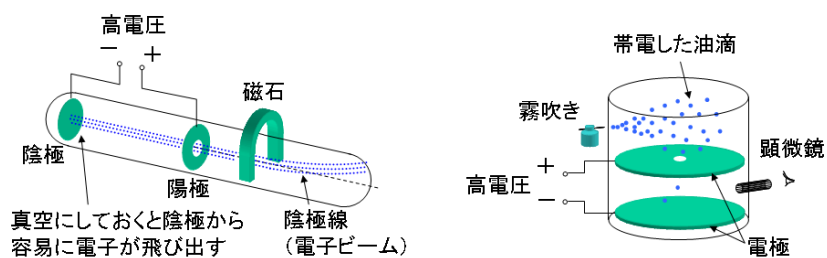


図 1.2 トムソンの実験(左)とミリカンの油滴実験(右)。左図で陰極線に磁界または電界を与えると陰極線は曲げられる。また、右図でイオン化された油滴に電界を加えると重力とのつり合いから油滴は電極の中で静止したり等速運動したりする。

電界の大きさを変えて陰極線の曲がり方を観察することで e/m の比率を求められる [9, pp.42-47]。【実験 2】は図 1.2 右に示すように、霧吹きで生成される油滴が摩擦によってイオン化する性質を利用する。電極の中でイオン化された油滴にはたらく重力と電気力とのつり合いにより、等速運動する油滴の速度を観察することで油滴の電荷を求められる [10, pp.716-717][11, pp.408-409]。

1.1.2 クーロンの法則、電界

図 1.3 左に示すような、ねじりばかりによる実験から電荷間に働く力 F について次のことが分かった*5。

1. 電荷の大きさに比例した。 ($F \propto Qq$)
2. 電荷間の距離の逆 2 乗に比例した。 ($F \propto 1/r^2$)
3. 方向は電荷間を結んだ直線の方であった。
4. 同種の電荷間 ($\oplus\oplus$ または $\ominus\ominus$) では斥力、異種の電荷間 ($\oplus\ominus$ または $\ominus\oplus$) では引力であった。

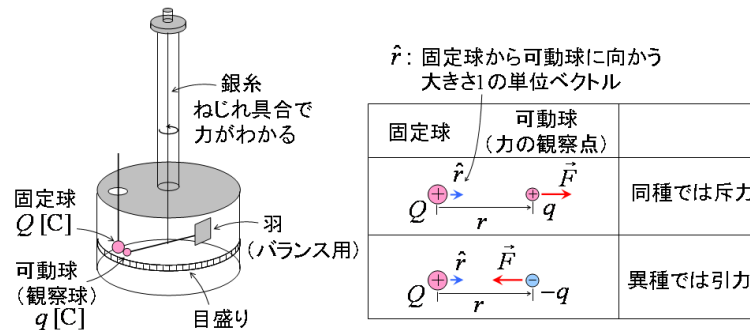


図 1.3 クーロンのねじりばかり (左) と帯電球に働く力 (右)。固定球と可動球を接触させた状態で帯電 (Q と q) をさせると両球には斥力が働く。また、両者を離して異種電荷 (Q と $-q$) を与えると引力が働く。力の大きさは銀系のねじれ具合から求められる。

【性質 1】と【性質 2】をまとめると式 (1.1) が得られる。ただし、係数 $1/4\pi\epsilon_0$ は SI 単位系*6で定義された定数である。ニュートンの万有引力の法則*7と式の形が同じである。

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \quad (1.1)$$

しかし、このままでは力の方向を数式で表現できない。そこで図 1.3 右上に示す \hat{r} (大きさが 1 で固定球から可動球に向かう単位ベクトル) を導入し、可動球に働く力を方向を含めて表現すると次式となる。

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r} \quad (1.2)$$

式 (1.2) は【性質 3】と【性質 4】をうまく表現している。例えば、図 1.3 右下のように可動球の電荷が $-q$ [C] なら \vec{F} の方向は $-\hat{r}$ になる。式 (1.2) をクーロンの法則と呼ぶ。また、図 1.3 右で可動球 (力の観察点) に与える電荷を $q = +1$ C にしたときのクーロンの法則は次式になる。

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \quad (1.3)$$

*5 1785 年 Coulomb によって発表された。この実験で力の大きさは銀系のねじれ具合から求められる [12, pp.4-10]。

*6 現在の mksA 単位系のこと。1 cm, 1 g, 1 s を基本単位としていた昔の gauss 単位系と cgs 静電単位系ではこの係数が 1 になる [13, pp.6-7]。

*7 1684 年 Newton によって発表された。

式 (1.3) は固定点に $Q[\text{C}]$ 、力の観察点に $+1 \text{ C}$ の電荷を置いたときに働く力 \vec{F} に等しく、これを特別に \vec{E} と表現し電界*⁸と呼ぶ。また、式 (1.2) に式 (1.3) を代入すれば、電気力 \vec{F} と電界 \vec{E} の関係を次式のように表すことができる。

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (1.4)$$

*⁸ 単位質量 $m = 1 \text{ kg}$ を置いたときに働く重力 $F = g$ が及ぶ空間全体を重力場と呼ぶように、 \vec{E} を電場とも呼ぶ。

1.1.3 電位

Q [C] の固定電荷近傍で力の観察点を順番に変えながら式 (1.3) を観察すると、図 1.4 左のような放射状のベクトル場になる。ここで、図 1.4 右のように力の観察点に置いた単位電荷を $d\vec{l}$ だけ動かす際の仕事を考える。単位電荷には既に電界の作用力 \vec{E} が働いて

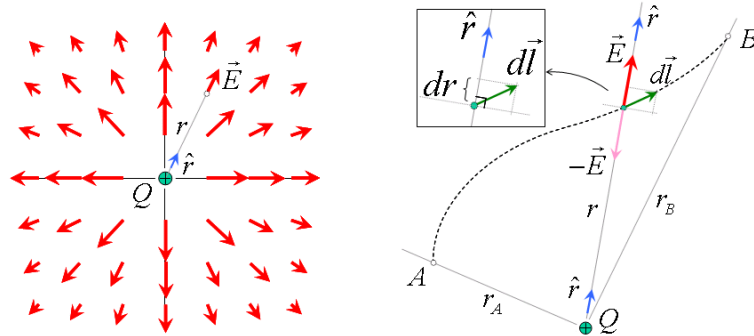


図 1.4 固定球に $+Q$ [C] を与えたとき、クーロンの法則に従えばその周囲に放射状の電界ベクトル場が作られる。固定電荷の周囲で単位電荷を自由に移動させるには、電界の作用力 \vec{E} と等しい反対の力 $-\vec{E}$ を作用させる必要がある。

いるので、自在に動かすにはこれを打ち消す反対の力 $-\vec{E}$ を作用させ続ければよい [14, pp.51-52]。従って微小仕事 (= 加えた力と微小移動距離の内積) は次式で与えられる。

$$dW = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.5)$$

この作業を A 点から B 点まで破線の経路に沿って行くと、全仕事 W は式 (1.3) の \vec{E} を代入して、

$$W = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\hat{r} \cdot d\vec{l}}{r^2} \quad (1.6)$$

となる。ここで、積分記号内の $\hat{r} \cdot d\vec{l}$ は図 1.4 右のベクトル図に示すように $d\vec{l}$ の \hat{r} 成分であるから dr となる。すると積分は r に関するただの積分となるから、積分経路 $A \rightarrow B$ は積分範囲 $r_A \rightarrow r_B$ に置き換えられる [10, p.705][15, p.23]。即ち、

$$W = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = V_{BA} \quad (1.7)$$

これを A 点を基準にした B 点の電位^{*9}もしくは BA 間の電位差と呼び、単位電荷あたりの力 F を E で表現したのと同様に、 W のかわりに V (単位を [V] で表しボルトと読む) で表現する習慣がある。電位を求める際の基準点 A はどこでも良いが、式 (1.7) で $r_A \rightarrow \infty$ として無限遠を基準^{*10}としたときの B 点の電位は次式となる。

$$V_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_B} \quad (1.8)$$

^{*9} electric potential または potential と呼ぶ。

^{*10} 標高が海面 (海拔ゼロ) を基準に取るように、電位も電位ゼロの基準点を約束している。電位ゼロの点とは無限遠と大地面である。大地面とは十分に広い (無限遠とみなせる) 導体面を指す。無限遠の電位はゼロなので、無限遠までつながっている導体面の電位はすべて同電位のゼロである。地球も大地面の 1 つである [16, pp.8-9]。ただし、大地面を考慮した点電荷 Q は電気ダイポール (電気双極子) と呼ばれ、その周囲の電位は式 (1.8) のように単純な式にはならない。

式 (1.8) は、図 1.4 左のように 3 次元空間に孤立した固定電荷 Q が作る電界の中のある一点 B に、 $+1\text{ C}$ の単位電荷を置くのに必要な電気的な位置エネルギーを示している。

1.1.4 ガウスの法則

図 1.5 左に示すように点電荷 Q を含む任意形状の閉じた面 S (ガウス面と呼ぶ) を考える。そしてガウス面上の位置 r の微小面積 ds において、 \vec{E} と $d\vec{s}$ (大きさ ds で面に垂直な外向き方向 \hat{n} を有するベクトル) の内積^{*11}を求める。このために図 1.5 右のように点

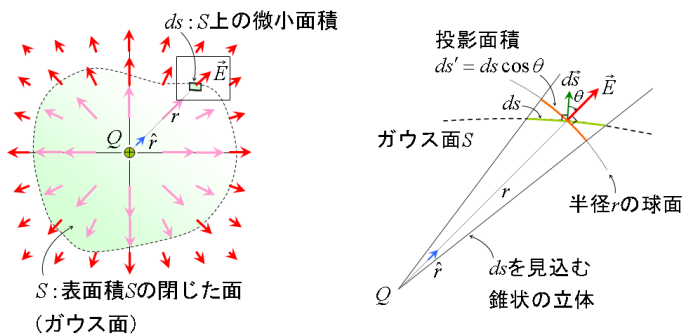


図 1.5 点電荷 Q を内部に含む任意形状の閉面 S (左) と閉面 S 上の微小面積 ds を貫く電界 E を真横から見た様子 (右)

電荷 Q から ds を切り取るような錐状の立体を考える [17, p.8]。この立体の中で、点電荷 Q を中心とした半径 r の球面に微小面積 ds を投影すると、投影面積は $ds' = ds \cos \theta$ になる。また、点電荷 Q の作る電界 \vec{E} が式 (1.3) で与えられたことを使うと、

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds \cos \theta = E ds' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds'}{r^2} \tag{1.9}$$

となる。ここで平面角度と立体角の定義を整理しておく [18, p.23]。図 1.6 左に示すよ

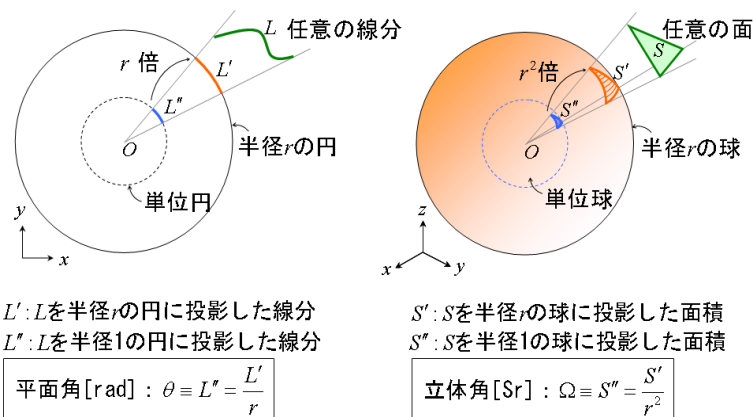


図 1.6 平面角度の定義 (左) と立体角の定義 (右)。平面角度は単位円に射影した弧の長さに等しく、立体角は単位球に射影した球面上の面積に等しい [18, p.23]。

うな任意の線分 L を単位円に射影したときの弧の長さ L'' が平面角度 θ [rad] の定義であるから、半径 r の円に射影された弧の長さは $L' = rL'' = r\theta$ となる。同様に、図 1.6

^{*11} 「 \vec{E} の垂直成分 $E \cos \theta$ と ds の積」のこと。面に垂直なベクトル成分と面積の積は流束 (またはフラックス) と呼ばれる。この場合は \vec{E} の流束を求めている。例えば流束の 1 つとして、太陽光の実質的な強さ (日射量) は、手のひら (面) と太陽光線 (ベクトル) の角度が 90 度のとき最大となる。

右のような任意の面 S を単位球に射影したときの球面上の面積 S'' が立体角 Ω (単位を [sr] で表しステラジアンと読む) の定義であるから、半径 r の球に射影された面積は $S' = r^2 S'' = r^2 \Omega$ となる。即ち、半径 r の球面上の面積 S' の立体角は $\Omega = S'/r^2$ となるから、 $d\Omega = dS'/r^2$ である。式 (1.9) を立体角 $d\Omega$ を使って表現すると次式となる。

$$\vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{ds'}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (1.10)$$

式 (1.10) の値はガウス面上のどの場所でも、電界の大きさ E や距離 r には依存せず、立体角 $d\Omega$ だけで決まることが重要である。閉じた面 S の立体角は 4π である^{*12}ことを利用して、式 (1.10) をガウス面 S 全体で総和すると次式が得られる。

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.11)$$

今度は図 1.7 左のようにガウス面が点電荷 Q を含まない任意形状の閉じた面 S の場合を考える。図 1.5 右と同じように、点電荷 Q から微小面積 ds を切り取る錐状の立体に着

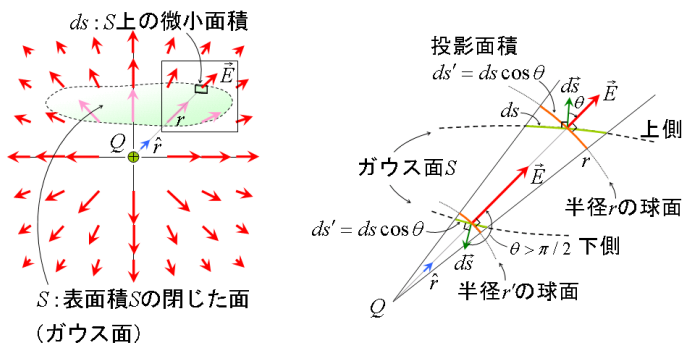


図 1.7 点電荷 Q を内部に含まない任意形状の閉面 S (左) と閉面 S 上の微小面積 ds を貫く電界 E を真横から見た様子 (右)。 ds の法線と \vec{E} のなす角度を θ とする。

目するが、今度は図 1.7 右のようにガウス面の「上側」(電界が出てゆく面) と「下側」(電界が入ってゆく面) の微小面積をセットにして考える。 $d\vec{s}$ は閉じた面 S に対して常に外向きを取る約束があるので、下側では \vec{E} と $d\vec{s}$ のなす角度が $\theta > \pi/2$ となり、点電荷 Q を中心とした球面 r' への射影面積が $ds' = ds \cos \theta < 0$ となる [19, p.18]。即ち、式 (1.10) において上面と下側では立体角の大きさが等しく符号が正負逆になるので、

$$\left(\vec{E} \cdot d\vec{s} \right)_{\text{上面}} + \left(\vec{E} \cdot d\vec{s} \right)_{\text{下側}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} (d\Omega - d\Omega) = 0 \quad (1.12)$$

となる。式 (1.12) をガウス面 S 全体で総和してもゼロになることは明らかである。以上電荷 Q がガウス面に含まれる場合と含まれない場合をまとめると次式が得られる。

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} \quad (1.13)$$

これをガウスの法則と呼ぶ。ただし、 Q_{in} はガウス面に含まれる総電荷を表し、ガウス面の外にある電荷はカウントされない。式 (1.13) のガウスの法則は、もとは式 (1.3) のクー

^{*12} 図 1.6 右において、任意の面 S が原点 O を包むように閉じていれば、内部の単位球への射影面積は全表面積 4π に等しい。

ロンの法則に数式操作を施しただけなので、ガウスの法則とクーロンの法則は等価である [20, pp.41-42]*¹³。

*¹³ クーロンの法則を別名称の法則で敢えて表現する理由は、空間上で対称性（線対称、円筒対称、球対称）がある電荷分布が周囲に作る電界を求めたいとき、ガウスの法則を使うと計算が極めて楽になるためである。これを実感するには演習問題に触れる必要がある。

1.2 静磁気

1.2.1 磁束密度と磁場

電界（または電場） \vec{E} とは、式(1.3)のように力の観察点に置かれた単位電荷に作用する電気力 \vec{F}_e で定義された。同様に力の観察点に置かれた適当なテスト物体に作用する磁気力 \vec{F}_m から、その点における磁場 \vec{B} を定義することができる^{*14}。磁気の根源が電流である^{*15}ことを現代科学は既に知っているので、このテスト物体として「運動する荷電粒子=電流」を考える。図1.8に示すように磁場 \vec{B} となす角度 θ で速度 \vec{v} の荷電粒子 q を打ち込み、その軌跡を観察して粒子に働く力 \vec{F}_m を求める。この実験では次のことが明らかになっている [10, pp.830-831]。

1. 電荷の大きさと速さに比例した。 $(F_m \propto qv)$
2. 磁場の強さに比例した。 $(F_m \propto B)$
3. $\sin \theta$ に比例した。 $(F_m \propto \sin \theta)$ ($\theta = 90^\circ$ で最大、 $\theta = 0^\circ$ で最小ということ)
4. 方向は \vec{v} と \vec{B} がつくる面に垂直であり、正電荷と負電荷では方向が逆であった。

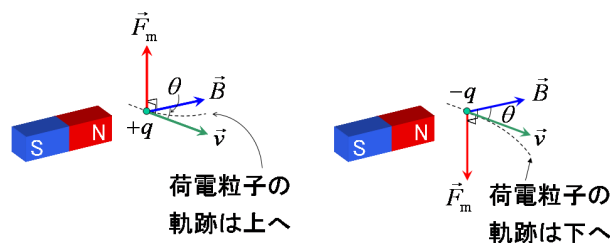


図 1.8 速度 \vec{v} で運動する荷電粒子 q に働く磁気力 \vec{F}_m の方向。速度 \vec{v} と磁場 \vec{B} から成る平面を考えると力 \vec{F}_m はその面の法線方向に働く。電荷の符号が負だと力も逆向きになる(右)。電界 \vec{E} は固定電荷 Q によって生じた(図1.4左)ように、磁場 \vec{B} は磁石によって発生しているとす。

【性質1】～【性質3】より、力の大きさに関する式(1.14)が得られる。

$$F_m = qvB \sin \theta \quad (1.14)$$

さらに【性質4】の力の方向(図1.8左右)を考慮すると、磁気力 \vec{F}_m を次式で表現できる。

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1.15)$$

これに対応する電気力 $\vec{F}_e = q\vec{E}$ (式(1.4))が電界の定義を表していたように、式(1.15)が磁束密度(磁場)の定義である^{*16}。もしも図1.8の空間に電界 \vec{E} が同時に存在していれば、荷電粒子 q に働く合計の電磁気力 \vec{F} は電気力 \vec{F}_e と磁気力 \vec{F}_m の和となり次式で表

^{*14} 単位磁荷に作用する磁気力を使って磁界 \vec{H} を定義することもできるが、単独磁荷は現科学で見つからないことがこの方法の難点である [21, pp.96-97]。したがって別の方法を考えなければならない。

^{*15} 身近にある磁石も原子レベルで考えると、方向がうまく揃った沢山の電子の自転/公転運動(=電流)によって磁場を発生している。

^{*16} 電気力をクーロン力と呼ぶのに対して、この磁気力のことをローレンツ力と呼ぶ。磁気力と磁場は直交しているため、電気力と電界の関係のように直感的に表せないのがこの方法の難点である。

される。

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.16)$$

電気力と磁気力は似ているところがあるが、次のような重要な違いがある [10, p.832]。

1. 電気力は電界の方向と同じであるが、磁気力は磁場の方向と垂直な方向に作用する。
2. 電気力は荷電粒子の速度と無関係に作用するが、磁気力は荷電粒子が運動しているときのみ作用する。
3. 電気力は荷電粒子を動かすときに仕事をするが、磁気力は荷電粒子を動かしても仕事をしない。これは荷電粒子の変位 (\vec{v} の方向) と力が常に垂直なためである^{*17}。

^{*17} 磁石の N 極どうしを強引に引っ付けようとしたり、N 極と S 極を引き離そうとするときは当然仕事をしている。ただし、これは電荷が仕事をしたのではなく、運動する電荷の塊 (磁石) を持っている人間が磁気力 \vec{F}_m の方向に仕事をしたのである。

1.2.2 ビオ-サバールの法則

図 1.9 に示すように、任意の定常電流 I を複数の微小電流素 dl に分割し、塗りつぶされた電流素に着目する。この電流素から観測点までの距離を r 、電流素に流れる電流の接線方向と観測点に向かう直線との開き角度を θ としたとき、観測点で測定される磁束密度 B について次のことが分かった*18。

1. 電流の大きさに比例した。 ($B \propto I$)
2. 電流素の長さに比例した。 ($B \propto dl$)
3. 電流素と観測点の間の距離の逆 2 乗に比例した。 ($B \propto 1/r^2$)
4. $\sin \theta$ に比例した。 ($B \propto \sin \theta$) ($\theta = 90^\circ$ で最大、 $\theta = 0^\circ$ で最小ということ)
5. 方向は紙面表から裏に向かう方向であった。 ($B \propto \otimes$)

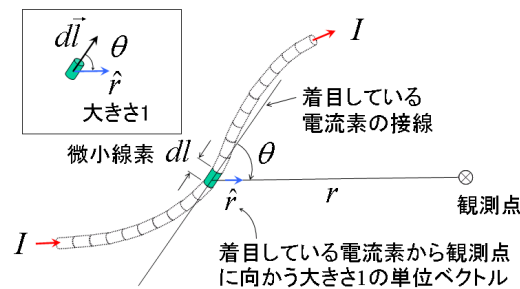


図 1.9 電流 I を複数の微小区間に分割し、着目する電流素から観測点までの距離を r 、開き角度を θ とする。

【性質 1】～【性質 4】をまとめると式 (1.17) が得られる。ただし、係数 $\mu_0/4\pi$ は SI 単位系*19で定義された定数である。

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} \quad (1.17)$$

しかし、このままでは [性質 5] 磁束密度 B の方向 \otimes を数式で表現できない。そこで、図 1.9 左上に示す $d\vec{l}$ (大きさ dl で電流が流れる方向を持つベクトル) と \hat{r} (大きさ 1 で電流素から観測点に向かうベクトル) を使って式 (1.17) の $dl \sin \theta$ を書き換えると次式となる。

$$dl \sin \theta = dl \cdot 1 \cdot \sin \theta = |d\vec{l}| |\hat{r}| \sin \theta = |d\vec{l} \times \hat{r}| \quad (1.18)$$

式 (1.18) の $d\vec{l} \times \hat{r}$ の方向は【性質 5】の磁束密度 B の方向 \otimes とちょうど一致している。以上をまとめると次式が得られる。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \quad (1.19)$$

これをビオ-サバールの法則と呼ぶ。

*18 1820 年 Biot と Savart によって発表された。実際は後述の理論式 (1.19) が先行して考案され、後から実験によってその正しさが証明された [22, p.101]。

*19 現在の mksA 単位系のこと。1 cm, 1 g, 1 s を基本単位としていた昔の gauss 単位系と cgs 単位系ではこの係数の値は異なる [13, pp.6-7]。

ビオ-サバルの法則の適用例

ここで、図 1.10 左のように x 軸上の区間 $-l_2 \sim l_1$ を流れる有限長の直線電流が、 y 軸上の距離 a の位置に設けた観測点 P に作る磁束密度を式 (1.19) のビオ-サバルの法則から求める。式 (1.19) において $d\vec{l} = d\vec{x}$ であり、 $d\vec{x} \times \hat{r} = |d\vec{x}| |\hat{r}| \sin \theta \hat{z} = dx \sin \theta \hat{z}$ (\hat{z} は

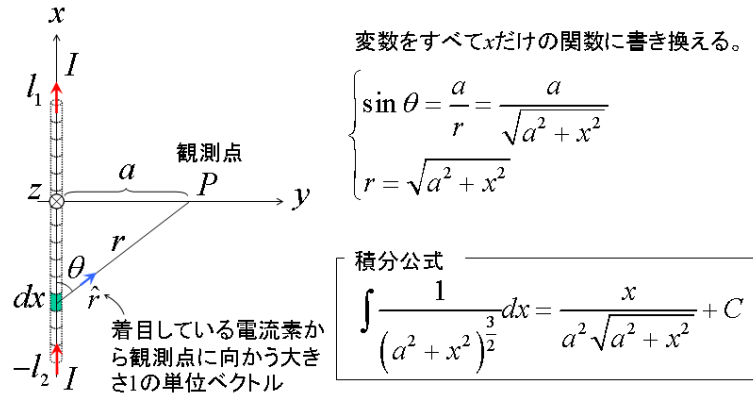


図 1.10 x 軸上の区間電流 I 。着目する電流素から観測点 P までの距離を r 、開き角度を θ とする。

z 方向の単位ベクトル) であるから、塗りつぶされた電流素に着目すると、

$$d\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I d\vec{x} \times \hat{r}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dx \sin \theta \hat{z}}{4\pi r^2} \quad (1.20)$$

全磁束密度 \vec{B}_P はこれを区間 $-l_2 \sim l_1$ で x について積分して

$$\vec{B}_P = \int_{-l_2}^{l_1} \frac{\mu_0 I dx \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{z} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{\sin \theta}{r^2} dx \quad (1.21)$$

式 (1.21) の積分変数 θ, r はともに x の関数になっているのでこのままでは積分しにくい。そこで、図 1.10 右上のように被積分関数を x だけの関数に書き換える。さらに図 1.10 右下の積分公式 [23] を使うと \vec{B}_P は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \vec{B}_P &= \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left(\frac{l_1}{a^2 \sqrt{a^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{a^2 \sqrt{a^2 + l_2^2}} \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{l_1}{\sqrt{a^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{a^2 + l_2^2}} \right) \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{1}{\sqrt{(a/l_1)^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(a/l_2)^2 + 1}} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (1.22)$$

もしも区間電流が無限長電流ならば、式 (1.22) に $l_1 \rightarrow \infty, l_2 \rightarrow \infty$ を代入して

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{z} \quad (1.23)$$

となる。式 (1.23) より、直線電流の周囲には電流軸を中心にして同心円状の磁束密度 (図 1.11 参照) が発生しており、その大きさは電流から離れるほど小さく、方向は右ネジの方

向^{*20}であることが分かる。

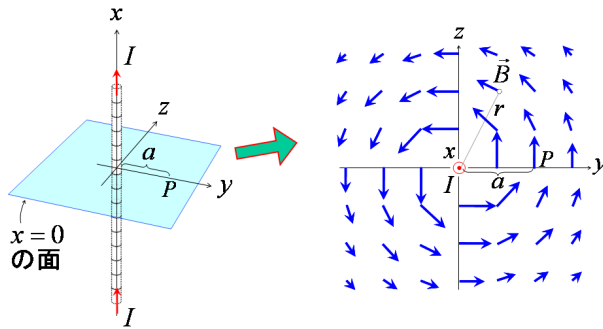


図 1.11 x 軸上を流れる無限長電流 I (左) が周囲に作る磁場 \vec{B} を真上から見た様子 (右)。磁場 \vec{B} の方向は右ネジであり、大きさは $1/r$ に比例して小さくなってゆく。

^{*20} ネジを回す方向を磁場に例えると、ネジの進行方向が電流になる。または右手の親指を電流に例えると、他の指の曲がる方向が磁場になる。

1.2.3 アンペアの法則

図 1.12 左に示すように z 軸上を流れる無限長電流 I を囲む閉曲線 C を考える [24, pp.221-222]。式 (1.23) で求めた電流周囲に発生する磁束密度 \vec{B} と閉曲線 C を構成する微小線素ベクトル $d\vec{l}$ を、図 1.12 中央のような円筒座標 (r, ϕ, z) ^{*21} で表すと次式となる。

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}, \quad d\vec{l} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z} \quad (1.24)$$

ここで、閉曲線 C 上で \vec{B} と $d\vec{l}$ の内積を取って 1 周分総和してみる^{*22}。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot (dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\phi \quad (1.25)$$

式 (1.25) の最後に出てきた積分は、図 1.12 右に示すように積分路 C を真上から見たと

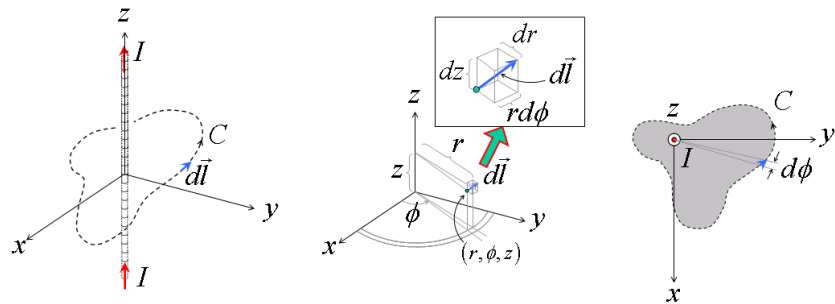


図 1.12 z 軸上の無限長電流 I を囲む任意の閉曲線 C を考える (左)。円筒座標 (r, ϕ, z) 上で考えた微小線素ベクトル $d\vec{l}$ (中央)。閉曲線 C を真上から見た様子 (右)。

き、 $d\phi$ を 1 周総和することと同じなので、

$$\oint_C d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \quad (1.26)$$

となり、次式が得られる。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (1.27)$$

次に、図 1.13 左のように積分路 C が電流 I を囲まない場合を考える。電流周囲に発生する磁束密度 \vec{B} と閉曲線 C を構成する微小線素ベクトル $d\vec{l}$ は式 (1.24) と同じであり、式 (1.25) と全く同じように閉曲線 C 上で \vec{B} と $d\vec{l}$ の内積を取って 1 周分総和してみる。式 (1.25) と同じように式 (1.28) の積分が現れるが、今度の場合は図 1.13 中央に示すように積分路 C を真上から見たとき、 $d\phi$ を $\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \phi_1$ で総和することと同じなので、

$$\oint_C d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_1} d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi - \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = 0 \quad (1.28)$$

^{*21} 3次元空間座標は 3つの直交した基本ベクトルがあれば表現できる。最もよく使う座標 (x, y, z) はデカルト座標または直角座標と呼ばれる。他にも球座標 (r, θ, ϕ) で表現することもある [27, pp.39-51]。例えば、式 (1.2) と式 (1.3) のクーロンの法則は球座標で表されている。どの座標系を用いても結果は同じであるが、着目しているベクトル場 (\vec{E} or \vec{B}) の方向と座標系の単位ベクトルのどれか 1成分が一致したとき、数式の扱いが最も簡単になる。従って状況に応じて座標系を使い分けている。

^{*22} \oint_C は積分路 C が閉じた 1 周ループになっていることを強調する記号である。

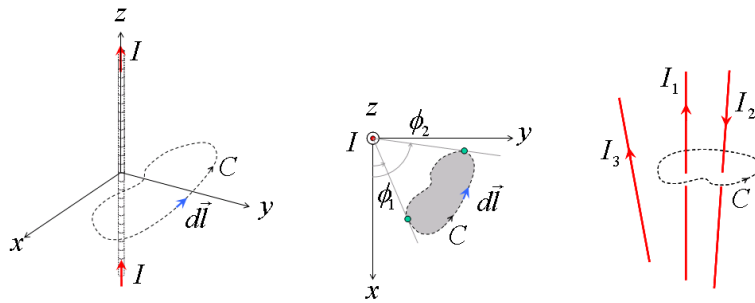


図 1.13 z 軸上の無限長電流 I を含まない任意の閉曲線 C [24, pp.221-222] (左)、閉曲線 C を真上から見た様子 (中央)、円筒座標 (r, ϕ, z) 上で考えた微小線素ベクトル $d\vec{l}$ (右)

となるから、次式が得られる。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (1.29)$$

電流を積分路 C の内部に含む場合の式 (1.27) と含まない場合の式 (1.29) より、図 1.13 右のような積分路 C に囲まれた 2 本の電流 (方向が異なる) と積分路の外にある 1 本の電流について考えると、

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2) \quad (1.30)$$

となる^{*23}。以上の内容をまとめて記述すると次式が得られる。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (1.31)$$

これをアンペアの法則と呼ぶ。静磁気 (磁場が定常で変化しない) 問題に関して、アンペアの法則とビオ-サバルの法則は同じである^{*24}。

^{*23} 電流が逆向きの場合、 \vec{B} の方向が逆向きになるため I_2 には $-$ がつく。

^{*24} クーロンの法則を等価なガウスの法則で表現したように、空間で対称性のある電流分布が周囲に作る磁場を求めたいとき、アンペアの法則を使うと計算が極めて楽になるメリットがある。例えば、式 (1.23) を導出するのにビオ-サバルの法則ではかなり面倒な計算をしたが、アンペアの法則を使えばたったの 3 行の計算で済む (演習問題で明らかになる)。

1.3 電磁誘導

1.3.1 ファラデーの法則

電流を流した導線の近くに方位磁石を置くと磁針が振れる（図 1.11 右参照）。これを電流の磁気作用と呼ぶ^{*25}。ファラデーはこの逆の現象、即ち磁場から電流が作れるのではないかと考えた。この現象を電磁誘導と呼ぶ。そして図 1.14 に示すように、磁場とコイルを用いた 3 つの実験から次のことが分かった [24, p.301]^{*26}。この実験でコイルに電流が流れたかどうかは、コイル導線の下に置いた方位磁石の振れで確認できる。

1. 磁場（磁石）を固定してコイルを引き抜くと、コイルに電流が流れた。【実験 1】
2. コイルを固定して磁場（磁石）を左に動かしてもコイル電流が流れた。【実験 2】
3. 磁場の大きさを変化させる（磁石のかわりに電磁石^{*27}を使う）と、コイルに電流が流れた。【実験 3】

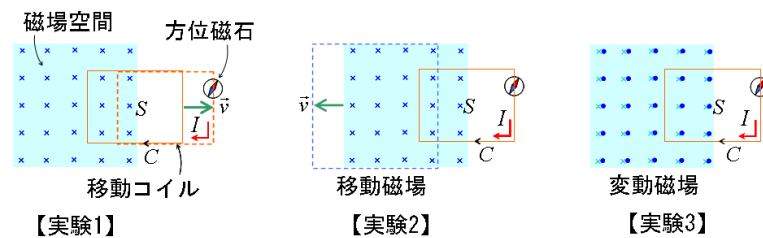


図 1.14 ファラデーの 3 つの実験。ループ経路 C 、ループ面積 S のコイルに電流が流れる現象は次の 3 つの実験に要約される。【実験 1】静止磁石の上でコイルを動かす。【実験 2】静止コイルの下で磁石を動かす。【実験 3】磁場の大きさだけを変える。

3 つの実験に共通していることは、コイルのループ面積 S を貫く磁場 \vec{B} が時間と共に変化していることである。そこで、ループ面 S を貫く磁場 \vec{B} を定量化するために、式 (1.9) で導入したフラックス（面に垂直なベクトル成分と面積の積）を求める。即ち、コイルのループ面 S における磁場の流束（これを磁束と呼ぶ^{*28}）は次式になる。

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1.32)$$

所で、電源に接続されていないコイルに電流が流れたということは、コイル導線内部の自由電子を動かす力が発生したことを意味する。まず、【実験 1】のように静止磁石の上でコイルが運動する場合に発生する力について考える。図 1.15 に示すように磁場の中で運動する電荷には式 (1.15) の磁気力 \vec{F}_m が働く。この力によって自由電子は容易に移動で

^{*25} 1820 年 Oersted によって最初に発見された。この現象発見が直ちに、ビオ-サバールの法則やアンペールの法則の発見につながる。ビオ-サバールの法則（式 (1.19) や式 (1.23)）は、エルステッドが発見した電流の磁気作用を数式で表現したものである。

^{*26} 1831 年 Faraday によって発表された。

^{*27} 鉄心にコイルを何重にも巻いて電流を流すと強い磁石（電磁石）になる。電流の大きさを変えると磁場の強さや極性を変えることができる。

^{*28} 式 (1.9) で計算した電場の流束は電束とは呼ばない。このことは誘電体（本書では扱わない）について学習すると明らかになる。

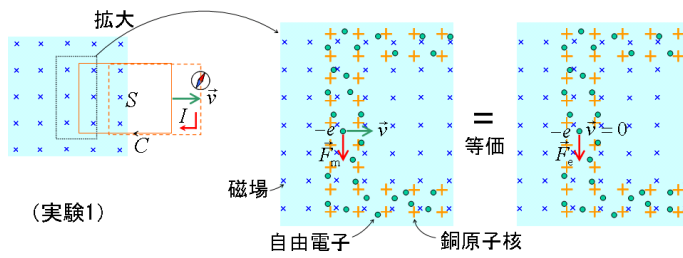


図 1.15 【実験 1】静止磁石の上でコイルが運動する場合（左）の点線部分の拡大図（右）。自由電子に働く磁気力 \vec{F}_m を、コイル導体の銅原子核（自由電子と同じ速度 \vec{v} で右に移動している）の立場から見ると、自由電子の相対速度はゼロであるから磁気力 \vec{F}_m には見えず、右図のように電気力 \vec{F}_e に見える。

きる^{*29}。自由電子に働く磁気力 \vec{F}_m を、コイル導体の銅原子核（自由電子と同じ速度 \vec{v} で右に移動している）の立場から見ると、自由電子の相対速度はゼロであるから磁気力 \vec{F}_m には見えず電気力 \vec{F}_e に見える [25, p.171][26, p.184]。電気力は式 (1.4) より $\vec{F}_e = q\vec{E}$ であるから、この場合 $\vec{E} = -\vec{F}_e/e$ なる電界が \vec{F}_e と反対向きに働いていることと同じである^{*30}。導線内部に発生したこの電界 \vec{E} をループ C に沿って一回り積分すると、

$$\text{emf} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.33)$$

となる。これを起電力 (electromotive force 略して emf) と呼ぶ。次に、【実験 2】コイルが静止していて磁場が移動する場合と【実験 3】コイルも磁場も静止していて磁場の大きさが変動する場合に発生する力について考える。図 1.16 に示すように、空間のある場所で磁場の大きさが突然変化すると、その変化を妨げるように（変化を打ち消すほど強くはない）同心円状の電界が空間に誘導される [20, pp.191-192]。この電界の中に導体ループを配置すれば、ループ C の接線上にある電界成分が導体内部の自由電子を移動させる。電界 \vec{E} をループ C 上に沿って一回り積分すれば式 (1.33) と同じ起電力が得られる^{*31}。さて、式 (1.33) の起電力の方向と大きさについては、次のことが分かった。

1. 方向は、コイルと鎖交する（ループ面 S を貫く）磁束の変化を妨げるような向きに生ずる。即ち、磁束が減少したときは増やす向き、磁束が増加したときは減らす向きに起電力を生じる^{*32}。（ $e \propto -$ ：逆らうことを表す符号）
2. 大きさは、コイルと鎖交する磁束の時間変化率に等しい^{*33}。（ $e \propto d\Phi/dt$ ）

この 2 つの性質から次式が得られる。

$$\text{emf} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.34)$$

負符号は起電力の方向（電流を流す方向）が磁束変化 $d\Phi$ を打ち消すことを強調するものであり、起電力の大きさだけを問題にするときは符号は無視して良い。また、式 (1.34) に

^{*29} コイル導体を構成する銅原子（自由電子を 1 つ放出したので + に帯電）にも磁気力は働くが、隣接する原子の結びつきがとて強く動くことはできない。

^{*30} 1.1.1 節より自由電子 1 つの電荷は $q = -e$ である。

^{*31} 【実験 2 or 3】は、数式上は【実験 1】と同じ (1.33) の起電力を生じるが、電界が導体上に限定されないことが決定的な違いである。導体ループは電界の存在を電流として検出するための手段に過ぎない。

^{*32} 1834 年 Lenz によって発表された。レンツの法則と呼ぶ。

^{*33} 1845 年 Neumann によって発表された。ノイマンの法則と呼ばれる。

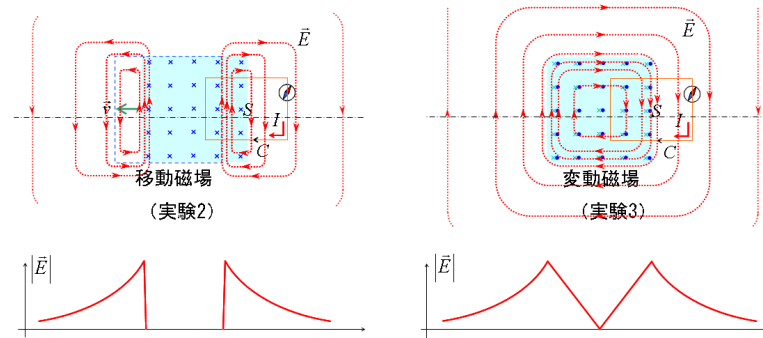


図 1.16 【実験 2】コイルが静止していて磁場が移動する場合（左）と【実験 3】コイルが静止していて磁場が変動する場合（右）において、空間に誘導される電界の様子。中央の鎖線上で電界の大きさを表示すると下図のようになる。

式 (1.32) と式 (1.33) を代入すると次式が得られる。

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (1.35)$$

式 (1.34) と式 (1.35) は、実際はレンツとノイマンによって定式化されたが、現象発見の功績からファラデーの法則と呼ばれている^{*34}。以上、コイルが 1 巻きの場合を説明してきたが、 N 巻きのコイルに発生する起電力は 1 巻きに発生する起電力の総和となる。即ち、

$$\text{emf} = -N \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.36)$$

となる。

実は図 1.16 右の【実験 3】磁場 \vec{B} が変動する場合には続きがある。磁場 \vec{B} につられて周囲の空間の電界 \vec{E} も変動するので、その電界を電流と考えれば^{*35}、式 (1.27) や式 (1.31) のアンペアの法則より、その電界（電流）の周囲にはまた新たな磁場 \vec{B} が作られる。さらにその磁場 \vec{B} も変動するので…という具合に、磁場 \vec{B} と電界 \vec{E} が数珠つなぎで遠くまで伝わる（図 1.17 参照）。このようにして伝わる波を電磁波と呼ぶ。この場合は磁場 \vec{B} を出発点（波源と呼ぶ）にしているが、電界 \vec{E} や電流 I を出発点にしても順序が変わるだけで同じである。電磁波は図 1.17 に示すように、電界が存在する面と磁場が存在する面が互いに直交していることが特徴である。電界 \vec{E} の存在する面が地面に対して平行な場合を水平偏波、垂直な場合を垂直偏波と呼んで区別する。

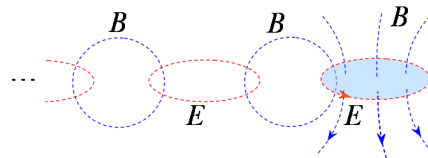


図 1.17 電磁波が伝わるイメージ。電界が存在する面と磁場が存在する面は直交していることが特徴である。

^{*34} 文献によっては式 (1.34) をレンツの法則またはノイマンの法則と呼ぶ場合がある。

^{*35} 電界の中に導体を置いたら電流として検出できるのであるから、もとの性質は同じと考えて良い。

1.3.2 フレミングの右手則

図 1.15 の【実験 1】において、磁場 \vec{B} と運動する導体内部に生じた電界 \vec{E} の関係を整理しておく。繰り返しになるが、磁場 \vec{B} の中を速度 \vec{v} で導体が運動するとき、導体内部の自由電子に働く磁気力は式 (1.15) より $\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B}$ であった。この力を同じ速度 \vec{v} で運動している原子核の立場から見ると $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ (式 (1.4)) なる電気力に見える [25, p.171]。導体が運動するのを外から眺めている観察者から見ても、導体内部の原子核から見ても、自由電子に働く力 \vec{F} には変わらないので $\vec{F}_m = \vec{F}_e$ である。即ち、

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (1.37)$$

が成り立つ。導体を磁場の中で移動させると式 (1.37) を満たす電界が導体内部に発生する。これをフレミングの右手則と呼ぶ^{*36}。

一方、電磁誘導現象ではないが、図 1.18 のように磁場 \vec{B} の中で静止した導線に電流 \vec{I} を流したとき、導線に働く力 \vec{F} の関係も整理しておく。導線の断面積を $S[\text{m}^2]$ 、導線内

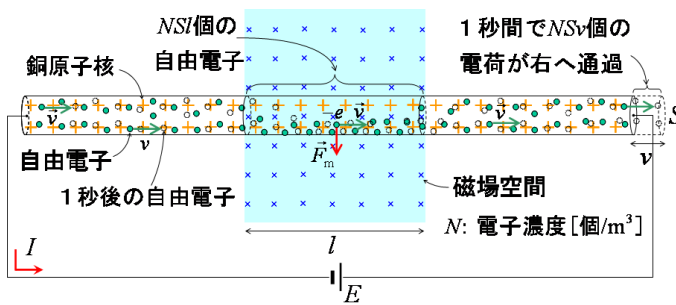


図 1.18 磁場の中で静止した導線に流れる電流 I に働く力。導線の断面積を $S[\text{m}^2]$ 、導線内の自由電子の濃度を $N[\text{個}/\text{m}^3]$ 、電子の移動速度を $\vec{v}[\text{m}/\text{s}]$ とすると、流れる電流は $I = eNSv[\text{A}]$ で与えられる。

の自由電子濃度を $N[\text{個}/\text{m}^3]$ 、電子の速度を $\vec{v}[\text{m}/\text{s}]$ とすると、1秒間あたりに押し出される (図 1.18 導線右端の点線で囲まれた領域の) 自由電子の数は NSv 個であるから、電流^{*37}の大きさはこれに電子の電荷量 e を掛けて $I = eNSv[\text{A}]$ で与えられる。電流の流れる方向は電子の移動方向と逆^{*38}であるから、ベクトルで書くと次式 (1.38) になる。

$$\vec{I} = -eNS\vec{v} \quad (1.38)$$

ここで、図 1.18 中央にある自由電子 1 つに働く磁気力 \vec{F}_m を求める。式 (1.15) に式 (1.38) を代入すると、次式のように電流 \vec{I} を使って磁気力 \vec{F}_m を表現できる。

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\vec{I}}{NS} \times \vec{B} \quad (1.39)$$

所で、図 1.18 で考えている磁場空間の大きさは $l[\text{m}]$ であるから、全く同じように磁場の影響を受ける自由電子の数は全部で NSl 個ある。即ち、自由電子 1 つあたりの磁気力の

^{*36} フレミングが式 (1.37) を右手の 3 本指に対応させたため。 \vec{E} : 中指、 \vec{B} : 人差し指、 \vec{v} : 親指。

^{*37} 電流の定義は、単位時間あたりに通過した電荷量である。単位は $[\text{C}/\text{s}] \equiv [\text{A}]$ 。

^{*38} 1.1.1 節の電子の電荷が定義された経緯を参照。

式 (1.39) を NSl 倍したものが導線 l [m] 全体に働く力である。これを \vec{F} とすれば、

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}l \quad (1.40)$$

これをフレミングの左手則と呼ぶ^{*39}。実際に細くて曲がりやすい導線なら下向きに変形する。

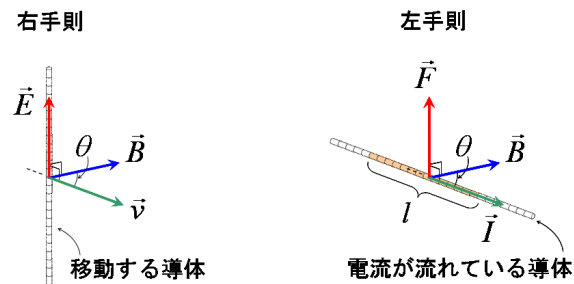


図 1.19 フレミングの右手則（左）と左手則（右）。右手と左手合わせて計 6 つの対応関係を指にあてはめても、かえって混乱するだけである。実際は磁気力（ローレンツ力）の式 (1.15) だけをしっかりと覚えていればよい。

結局、式 (1.37) のフレミングの右手則と式 (1.40) の左手則は、もと磁気力（ローレンツ力）であったものを電気として利用するか（図 1.19 右）、物理的な力として利用するか（図 1.19 左）の違いである。前者の利用方法は発電の原理であり、後者の利用方法はモーターの原理として使われている。

^{*39} フレミングが左手の 3 本指に対応させたため。I: 中指、B: 人差し指、F: 親指。

1.4 演習問題

1. 頭髪とペットボトル、羊毛と下敷きをそれぞれ擦り合わせた後、頭髪と羊毛を近づけた。頭髪と羊毛はどうなるか。
2. -1 C の電荷を電子の個数で表すと幾らか。
3. 1 eV は何 J か。
4. 半径 r の透明な球の中に、値が異なる 3 つの電荷 Q_1, Q_2, Q_3 がお互いに離れて存在している。ガウスの法則を使って、球の表面上の電界を求めよ。
5. アンペアの法則を用いて、無限長直線電流から半径 r の位置の磁場を求めよ。
6. オール電化のキーワードである IH (Induction Heating) の加熱原理を説明せよ。
7. 電磁波とは何か説明せよ。

参考文献

- [1] 渡部潤一, 坂元志歩: “宇宙のしくみ” 新星出版社, 2005.
- [2] 佐藤勝彦, 他: “真空とインフレーション宇宙論” ニュートンプレス, 2007.
- [3] 河合光: “はじめての〈超ひも理論〉” 講談社現代新書, 2005.
- [4] ウィキペディア フリー百科事典
- [5] 溝口正: “電磁気学 -SI UNITS-” 裳華房, 2001.
- [6] 奥澤清吉: “学校では教えないエレクトロニクス” 誠文堂新光社, 1987.
- [7] 佐伯平二: “親子で遊べる実験と工作 ふしぎを体験!” , ニュートンプレス, 2006
- [8] 後藤尚久: “なっとくする電磁気学の疑問 55” , 講談社サイエンティフィック, 2007.
- [9] 高木相: “自然の中の電気と磁気” コロナ社, 1989.
- [10] R. A. Serway: “科学者と技術者のための物理学 III” 学術図書出版社, 1992.
- [11] 服部嗣雄: “難問題の系統とその解き方 物理 I・II” ニュートンプレス, 2004.
- [12] 竹内淳: “今日から使える電磁気学” 講談社, 2006.
- [13] 西野治, 他: “電気計測器” 電気学会, 1966.
- [14] 石井望: “要点がわかる電磁気学” コロナ社, 2009.
- [15] 中川恭彦: “電磁気学” 科学技術出版, 2000.
- [16] 河野: “電気磁気学” 丸善, 1997.
- [17] 河本修: “身近に学ぶ電気磁気学” 共立出版, 2000.
- [18] 伊藤彰義: “図でわかる電磁気学” 講談社サイエンティフィック, 1996.
- [19] 沢新之輔, 他: “エース 電磁気学” 朝倉書店, 2004.
- [20] D. Halliday, 他: “物理学の基礎 [3] 電磁気学” 培風館, 2002.
- [21] 前田三男: “電磁気学の基礎” 昭晃堂, 1991.
- [22] 福田務, 他: “図解板電気学ポケットブック” オーム社, 2003.
- [23] <http://www.dt.takuma-ct.ac.jp/~kusama/lecture/magnetic/magnetic.html>
- [24] D. J. Griffiths: “Introduction to electrodynamics, 3rd ed.” Prentice-Hall, 1999.
- [25] 竹内薫: “ゼロから学ぶ物理の 1、2、3” 講談社, 2003.
- [26] 狩野覚, 市村宗武: “大学生のための基礎シリーズ 5 物理学入門 II” 東京化学同人, 2005.
- [27] 安部實: “電気数学 ベクトルと複素数” 共立出版, 2006.