ベクトル解析の基礎

v1.7 May.2019　　　番号:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. ベクトルとスカラー

大きさと方向を有するものをベクトル (vector) [*1] と呼び

$$\vec{A},\quad \bar{A},\quad \mathbf{A} \tag{1}$$

などとと表記する。一方，**大きさのみで方向がないものをスカラー** (scalar) [*2] と呼び、次のようにすべて絶対値記号をつけるか単純なイタリック体のアルファベットで表記する。

$$|\vec{A}|=A,\quad |\bar{A}|=A,\quad |\mathbf{A}|=A \tag{2}$$

例えば図 1 のような 2 次元空間の任意ベクトル $\vec{A}$ を考えてみる。$\vec{A}$ の表し方には，式 (3) のように成分だけを ( ) 内にカンマで区切って並べて表記する**成分表記** (component notation) と，式 (4) のように**単位ベクトル** (unit vector) [*3] を使って表記する**ベクトル表記** (vector notation) の 2 つがある。

$$\vec{A}=(A_x, A_y) \tag{3}$$

$$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y} \tag{4}$$

このベクトル $\vec{A}$ の大きさは三平方の定理から次式となる。

$$|\vec{A}|=A=\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2} \tag{5}$$

2. 和と差

少し具体的なベクトルの計算例として図 2 左に示す 2 次元空間の 2 つの任意ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の和と差を考える。

$$\vec{A}=(A_x, A_y)=A_x\hat{x}+A_y\hat{y} \tag{6}$$

$$\vec{B}=(B_x, B_y)=B_x\hat{x}+B_y\hat{y} \tag{7}$$

とおいて，式 (3) の表記方法を使えば

$$\vec{A}\pm\vec{B}=(A_x\pm B_x, A_y\pm B_y) \tag{8}$$

式 (4) の表記方法を使えば

$$\vec{A}\pm\vec{B}=(A_x\pm B_x)\hat{x}+(A_y\pm B_y)\hat{y} \tag{9}$$

となる。このベクトルの大きさは三平方の定理から次式となる。

$$|\vec{A}\pm\vec{B}|=\sqrt{(A_x\pm B_x)^2+(A_y\pm B_y)^2} \tag{10}$$

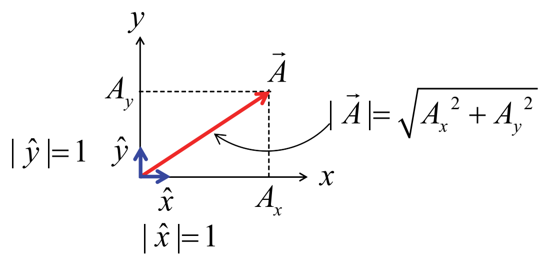

図 1　2 次元 x,y 平面上の任意ベクトル $\vec{A}$ の様子。ここで、A_x は $\vec{A}$ の x 成分 (x 方向の大きさ) を表し A_y は $\vec{A}$ の y 成分 (y 方向の大きさ) を表す。さらに $\hat{x}$ は x 方向の単位ベクトルを表し $\hat{y}$ は y 方向の単位ベクトルを表す。

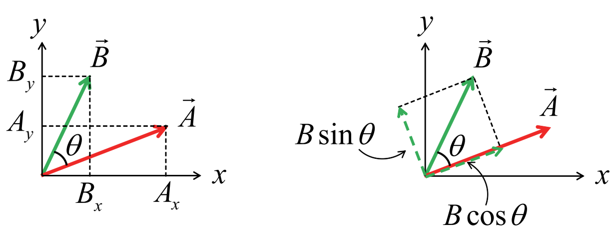

図 2　2 次元 x,y 平面上の任意ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の様子。$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}, \vec{B}=B_x\hat{x}+B_y\hat{y}$ であり，両者のなす角は θ である。

3. 内積と外積

同様にして図 2 左および式 (6) と式 (7) に示す 2 次元空間の 2 つの任意ベクトル $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の積を考える。2 つのベクトルのなす角度は θ である。ベクトル積には**内積** (inner product) と**外積** (cross product, vector product) があり，内積は $\bullet$ または $\circ$，外積は $\times$ の記号で表す。内積の結果はスカラーになるが，外積の結果はベクトルになる。

$$\vec{A}\circ\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=AB\cos\theta \tag{11}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\odot=AB\sin\theta\odot \tag{12}$$

$$\vec{B}\times\vec{A}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\otimes=AB\sin\theta\otimes \tag{13}$$

ここで，$|\vec{A}|=A=\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2}$, $|\vec{B}|=B=\sqrt{{B_x}^2+{B_y}^2}$ であり，$\odot$ は紙面裏から表への単位ベクトルを表し $\otimes$ は紙面表から裏への単位ベクトルを表す[*4]。外積の方向の決め方は**右ネジの法則** (right-hand screw law) [*5] になっていて $\vec{A}\times\vec{B}$ なら 2 つのベクトルの交点 (図 2 の場合は原点) を回転軸として，なす角 θ に沿って $\vec{A}$ を $\vec{B}$ に重ねるように右ネジを回転させたときのネジの進行方向が外積の方向となる。同様にして，$\vec{B}\times\vec{A}$ なら 2 つのベクトルの交点を回転軸として $\vec{B}$ を $\vec{A}$ に重ねるように右ネジを回転させたときのネジの進行方向が外積の方向となる。次に内積と外積の大きさが表す意味を考えてみる。まず内積の式 (11) の大きさは

$$|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta=AB\cos\theta \tag{14}$$

であり，このうち $B\cos\theta$ は図 2 右に示すように $\vec{B}$ の $\vec{A}$ への投影成分を表している。即ち**内積**は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の**同方向成分 (類似成分) の積**をとっていることになる。一方，外積の式 (12) と式 (13) の大きさは

$$|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta=AB\sin\theta \tag{15}$$

であり，このうち $B\sin\theta$ は図 2 右に示すように $\vec{B}$ の $\vec{A}$ に対する直交成分を表している。即ち**外積**は $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の**直交方向成分 (非類似成分) の積**をとっていることになる。以上まとめると，内積は 2 つのベクトルの同方向成分の積で方向を持たず，外積は 2 つのベクトルの直交方向成分の積で方向を持つということが分かる。最後に 3 次元 x,y,z 空間の単位ベクトル $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ の内積および外積の関係をまとめる。また，一例として図 3 は式 (21) の外積のイメージを示す。

$$\hat{x}\circ\hat{y}=|\hat{x}||\hat{y}|\cos 90^\circ=1\cdot 1\cos 90^\circ=0 \tag{16}$$

$$\hat{y}\circ\hat{z}=|\hat{y}||\hat{z}|\cos 90^\circ=1\cdot 1\cos 90^\circ=0 \tag{17}$$

$$\hat{z}\circ\hat{x}=|\hat{z}||\hat{x}|\cos 90^\circ=1\cdot 1\cos 90^\circ=0 \tag{18}$$

$$\hat{x}\times\hat{y}=|\hat{x}||\hat{y}|\sin 90^\circ\hat{z}=1\cdot 1\sin 90^\circ\hat{z}=\hat{z} \tag{19}$$

$$\hat{y}\times\hat{z}=|\hat{y}||\hat{z}|\sin 90^\circ\hat{x}=1\cdot 1\sin 90^\circ\hat{x}=\hat{x} \tag{20}$$

$$\hat{z}\times\hat{x}=|\hat{z}||\hat{x}|\sin 90^\circ\hat{y}=1\cdot 1\sin 90^\circ\hat{y}=\hat{y} \tag{21}$$

例えば，$\vec{A}=A\hat{x}, \vec{B}=B\hat{z}$ のとき，$\vec{A}\circ\vec{B}, \vec{B}\circ\vec{A}, \vec{A}\times\vec{B}, \vec{B}\times\vec{A}$ はそれぞれ次式となる。

$$\vec{A}\circ\vec{B}=A\hat{x}\circ B\hat{z}=AB\hat{x}\circ\hat{z}=0 \tag{22}$$

$$\vec{B}\circ\vec{A}=B\hat{z}\circ A\hat{x}=BA\hat{z}\circ\hat{x}=0 \tag{23}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=A\hat{x}\times B\hat{z}=AB\hat{x}\times\hat{z}=AB(-\hat{y}) \tag{24}$$

$$\vec{B}\times\vec{A}=B\hat{z}\times A\hat{x}=AB\hat{z}\times\hat{x}=AB\hat{y} \tag{25}$$

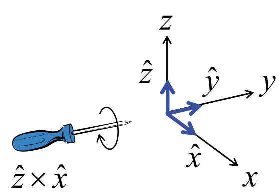

図 3　3 次元 x,y,z 空間の単位ベクトル $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$。一例として $\hat{z}\times\hat{x}$ は右ねじの法則から $\hat{y}$ になる。

[*1] 例えば，電磁気学で扱う電界 $\vec{E}$，磁界 $\vec{H}$，電流 $\vec{I}$ は大きさと方向を有しているのでベクトルに相当する。

[*2] 例えば，電磁気学で扱う電位 (電気的な位置エネルギー：potential) V は大きさだけなのでスカラーに相当する。

[*3] 単位ベクトルは大きさが 1 の方向ベクトルで，3 次元 x,y,z 空間では $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$, $(\mathbf{i_x},\mathbf{i_y},\mathbf{i_z})$ および $(\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z)$ といった表記方法がよく使われるが，電磁気学では電流 i や電圧 e と混同することがあるので $(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ を使うことが多い。例えば $\hat{x}$ はエックスハットと読む。

[*4] この記号が使われる理由は弓矢をベクトルに例えた場合，矢尻 (尻と言っても尖った先端の方のこと) から見た形は $\odot$ のように見え，後方の羽部分から見た形は $\otimes$ の形を表しているためである。

[*5] ネジは右回しで木材の奥に進み，左回しで木材から抜けるようになっている。