ベクトル解析の基礎 (演習問題)

v3.3 Sep.2021 　　　＿＿＿＿科＿＿年＿＿番　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. 平面上に 2 つのベクトル $\vec{A}, \vec{B}$ がある。両者なす角度が θ のとき，それぞれのベクトルを図示した上で次の各値を計算せよ。[*1]
(1) $\vec{A} \bullet \vec{B}$ (2) $\vec{A} \times \vec{B}$

2. $\vec{A} = A\hat{x}$，$\vec{B} = B\hat{z}$ とするとき，次の各値を計算せよ。ただし外積は方向も示すこと。[*2]
(1) $\vec{A} \bullet \vec{B}$ (2) $\vec{B} \bullet \vec{A}$ (3) $\vec{A} \times \vec{B}$ (4) $\vec{B} \times \vec{A}$

3. $\vec{A} = A\hat{x}$, $\vec{B} = B\hat{y}$, $\vec{C} = C\hat{z}$, $\vec{D} = \vec{B} - \vec{C}$ とするとき，次の各値を計算せよ。ただし外積は方向も示すこと。[*3]
(1) $\vec{A} \bullet \vec{D}$ (2) $\vec{A} \times \vec{D}$ (3) $\vec{D} \times \vec{B}$

4. 次の各値を計算せよ。ただし $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ は直角座標における単位ベクトルである。[*4]
(1) $\hat{x} \bullet \hat{y}$ (2) $\hat{x} \times \hat{y}$ (3) $\hat{z} \bullet \hat{z}$ (4) $\hat{z} \times \hat{y}$

5. xy 平面上で，x 軸から角度 θ だけ回転した r 方向の単位ベクトル $\hat{r}$ を $\hat{x}$ と $\hat{y}$ で表せ。[*5]

6. 次の計算をせよ。[*6] ただし，∇, $\vec{A}$, $\vec{B}$, φ を次のように定義する。
$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$
$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$
$\vec{B} = \left(x+y, xz, yz^2\right) = (x+y)\hat{x} + (xz)\hat{y} + (yz^2)\hat{z}$
$\varphi = x + y + xz + yz^2$
(1) ∇^2 (2) $\nabla \bullet \vec{A}$ (3) $\nabla \times \vec{A}$ (4) $\nabla \bullet \vec{B}$ (5) $\nabla \times \vec{B}$ (6) $\nabla\varphi$

7. $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, $|\vec{r}| = r$ とし，曲面 S の境界線を C とする。体積 V の領域の表面を S とする。ストークスの定理またはガウスの発散定理を利用して次の計算をせよ。[*7]
（1） $\int_C \vec{r} \bullet d\vec{r}$
（2） $\int_S \vec{r} \bullet d\vec{s}$

8. ♠ 次の各値を計算せよ。ただし $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ は球座標（極座標）における単位ベクトルである。[*8]
(1) $\frac{\partial \hat{r}}{\partial r}$, $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi}$ (2) $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial r}$, $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi}$ (3) $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial r}$, $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta}$, $\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi}$

9. ♠ 球座標におけるラプラシアンを計算せよ。[*9]

[*1] 答え：(1) $AB\cos\theta$ (2) $AB\sin\theta\odot$ or $AB\sin\theta\otimes$，ベクトル図は略

[*2] 答え：(1) 0 (2) 0 (3) $AB(-\hat{y})$ (4) $AB\hat{y}$

[*3] 答え：(1) 0 (2) $AC\hat{y} + AB\hat{z}$ (3) $BC\hat{x}$
ベクトル演算でも四則演算（加減乗除）の分配則は成立する。交換則は内積のみ成立し，外積はアルファベットの循環則に注意。

[*4] 答え：(1) 0 (2) $\hat{z}$ (3) 1 (4) $-\hat{x}$

[*5] 答え：$\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta$

[*6] 答え：(1) $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (2) $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ (3) $(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{x} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{y} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{z}$ (4) $1 + 2yz$ (5) $(z^2 - x)\hat{x} + (z-1)\hat{z}$ (6) $(1+z)\hat{x} + (1+z^2)\hat{y} + (x+2yz)\hat{z}$

[*7] 答え：(1) 0, (2) $3V$

[*8] 答え：(1) $0,\ \theta,\ 0$ (2) $0,\ -\hat{r},\ \cos\theta\hat{\varphi}$ (3) $0,\ 0,\ -\sin\theta\hat{r} - \cos\theta\hat{\theta}$

[*9] 答え：$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$