ベクトル解析の基礎

－ 内積と外積、勾配と発散と回転、
－ 線積分と面積分 －

1st 2011/04/01
Lst 2023/09/25

ベクトル解析が必要な理由

1. 電磁場（電界と磁界）がベクトル量（大きさだけでなく方向を有する物理量）であるため。
2. 電磁界は自然法則＝マクスウェルの方程式で記述され、方程式を解くための過程で、重ね合わせ（和と差）や微分積分が出てくる。これをベクトル量のまま扱うのがベクトルの和（差）、ベクトルの積（商）、ベクトルの微分（積分）である。（）内は逆操作という意味で同じことである。
3. ベクトルの積には、内積と外積がある。
4. ベクトルを使った微分には、勾配、発散と回転がある。
5. ベクトルの積分には、線積分と面積分がある。

ベクトルとは？

スカラー	速さ	温度	質量	エネルギー	電荷
ベクトル	速度	力	電界（電場）	磁界（磁場）	
テンソル	誘電率	透磁率			

スカラーとは，大きさによって特徴づけられる物理量の数学的な表現

ベクトルとは，大きさと向きによって特徴づけられる物理量の数学的な表現

テンソルとは，大きさと複数の向きによって特徴づけられる物理量の数学的な表現

ダニエル・フライシュ，河辺哲次 訳，物理のためのベクトルとテンソル，p.1，岩波書店，2013

スカラー・ベクトル・テンソル

スカラー	A 大きさ（あるいは，強さ）によって特徴づけられる物理量の数学的表現	0階のテンソル場 （ランク0のテンソル） （例）速さ，質量・・・
ベクトル	$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$ $\vec{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ $\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_y \end{pmatrix}$ 成分表記	1階のテンソル場 （ランク1のテンソル） 大きさ（あるいは，強さ）と向きによって特徴づけられる物理量の数学的な表現　（例）速度
テンソル （大学院レベル）	$\overleftrightarrow{A} = A_{xx}\hat{x}\hat{x} + A_{xy}\hat{x}\hat{y} + A_{xz}\hat{x}\hat{z} + A_{yx}\hat{y}\hat{x} + A_{yy}\hat{y}\hat{y} + A_{yz}\hat{y}\hat{z} + A_{zx}\hat{z}\hat{x} + A_{zy}\hat{z}\hat{y} + A_{zz}\hat{z}\hat{z}$ $\overleftrightarrow{A} = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}$ 成分表記	2階のテンソル場 （ランク2のテンソル） 大きさと複数の向きによって特徴づけられる物理量の数学的表現 （例）誘電率・透磁率　$\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon}\vec{E}$　$\vec{B} = \overleftrightarrow{\mu}\vec{H}$ ダニエル・フライシュ，河辺哲次 訳，物理のためのベクトルとテンソル，p.1，岩波書店，2013

本間，五十嵐，川口， 数値電磁力学 －基礎と応用－，p.49，森北出版，2002

単位ベクトルの表記方法

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$

$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$

$\hat{x},\hat{y},\hat{z}$

$\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$

$\mathbf{e}_x,\mathbf{e}_y,\mathbf{e}_z$

$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$

$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$

単位ベクトルとは，大きさ1で方向だけを有するベクトル

電磁気学で最もよく使われるタイプ
xハット，yハット，zハットと読む

電気系では、交流の電流・電圧および虚数単位jと混同して間違う可能性があるため使用を避ける傾向がある。（リスクは避ける）

ベクトルの表記方法（2次元）

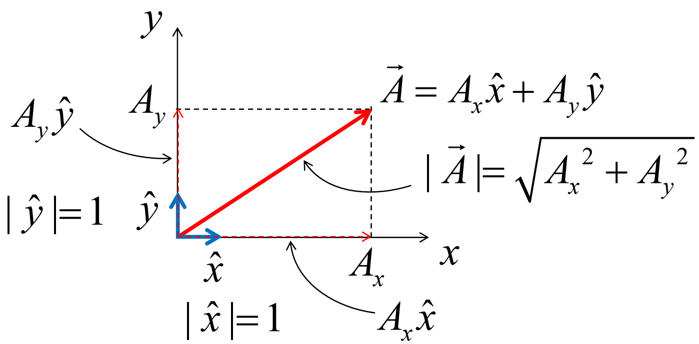
$\vec{A},\ \bar{A},\ \mathbf{A}$ ベクトルAの記号

$\vec{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}$ ベクトル表記

$\vec{A}=(A_x,A_y)$ 成分表記

$|\vec{A}|=A=\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2}$ ベクトルAの大きさ

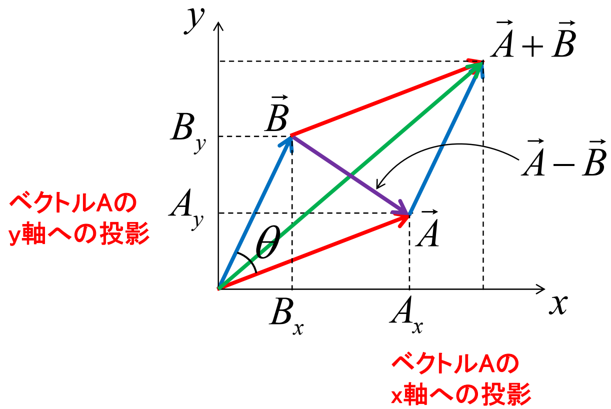
ベクトルと大きさ（2次元）



2次元x,y平面上の任意ベクトルAの様子

Axはベクトルのx成分(x方向の大きさ)を表し，Ayはベクトル Aのy成分(y方向の大きさ)を表す。さらに，xハットはx方向の単位ベクトルを表しyハットはy方向の単位ベクトルを表す。

ベクトルの和と差（2次元）

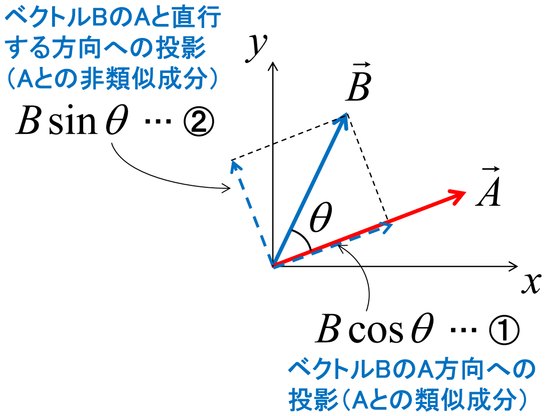


2次元x,y平面上の任意ベクトルAとベクトルBの和と差

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{x}+(A_y+B_y)\hat{y}$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{x}+(A_y-B_y)\hat{y}$$

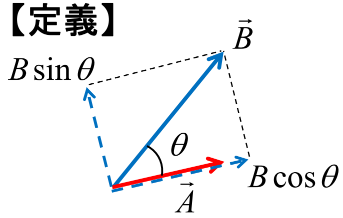
ベクトルの投影（射影）



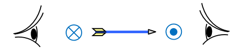
① ベクトルBのベクトルAへの投影（射影）
② ベクトルBのベクトルAの垂直方向への投影

内積と外積の定義

【定義】



$$\vec{A}\bullet\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta=AB\cos\theta$$
$$\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\odot=AB\sin\theta\odot$$
$$\vec{B}\times\vec{A}=\left|\vec{B}\right|\left|\vec{A}\right|\sin\theta\otimes=AB\sin\theta\otimes$$



矢と視点

【物理的な意味】

「内積（スカラー積）」を取るということは，ベクトルAとベクトルBの類似成分（同相成分）がどれくらいかを示す指標

「外積（ベクトル積）」を取るということは，ベクトルAとベクトルBの非類似成分（直交成分）がどれくらいかを示す指標

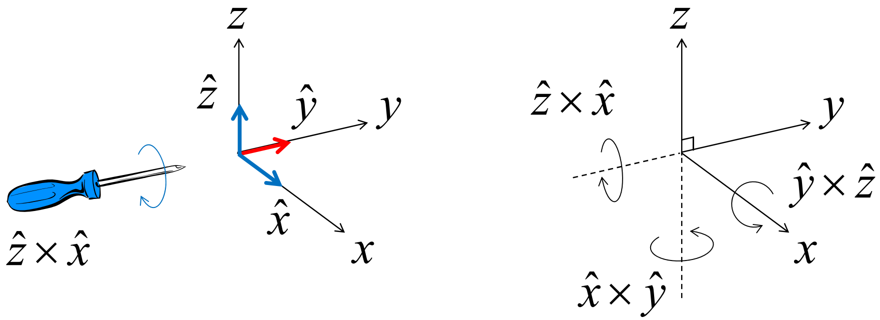
内積を取って1＝外積を取ったら0
内積を取って0＝外積を取ったら1

例えば，交流電力の式

$$P=VI\cos\theta=\dot{V}\bullet\dot{I}=\vec{V}\bullet\vec{I}$$

交流電圧と電流の内積は，電圧と電流の同相成分がどれくらいあるかを計算している。

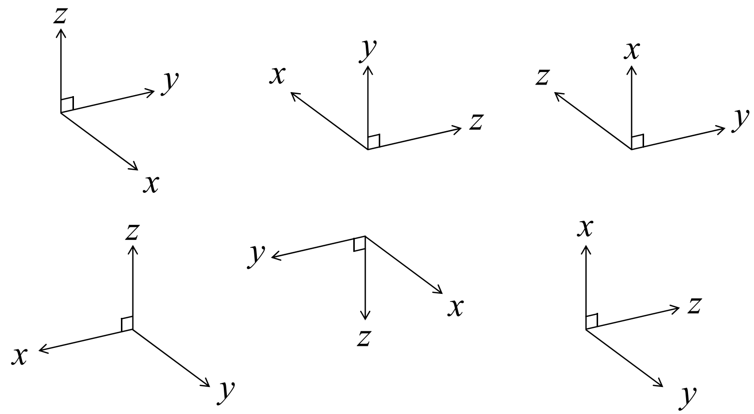
外積の方向＝右ねじの法則



3次元x,y,z空間の単位ベクトル

① z方向からx方向への外積は「右ねじの法則」より、y方向となる。
② x方向からy方向への外積は「右ねじの法則」より、z方向となる。
③ y方向からz方向への外積は「右ねじの法則」より、x方向となる。

座標系のルール（デカルト座標）

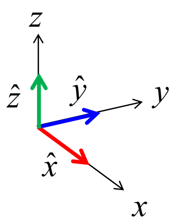


【循環ルール】
(1) 右ねじの法則
(2) アルファベット順 x ⇒ y ⇒ z ⇒ x ⇒ y・・・

二つの軸（面）が決まれば，最後の軸の方向は右ねじの法則で自動的に決まる

単位ベクトルの内積と外積

【3次元デカルト座標における単位ベクトル】



内積

$$\begin{cases} \hat{x}\bullet\hat{y}=|\hat{x}||\hat{y}|\cos 90^\circ = 1\cdot 1\cos 90^\circ = 0 \\ \hat{y}\bullet\hat{z}=|\hat{y}||\hat{z}|\cos 90^\circ = 1\cdot 1\cos 90^\circ = 0 \\ \hat{z}\bullet\hat{x}=|\hat{z}||\hat{x}|\cos 90^\circ = 1\cdot 1\cos 90^\circ = 0 \end{cases}$$

外積

$$\begin{cases} \hat{x}\times\hat{y}=|\hat{x}||\hat{y}|\sin 90^\circ\hat{z} = 1\cdot 1\sin 90^\circ\hat{z} = \hat{z} \\ \hat{y}\times\hat{z}=|\hat{y}||\hat{z}|\sin 90^\circ\hat{x} = 1\cdot 1\sin 90^\circ\hat{x} = \hat{x} \\ \hat{z}\times\hat{x}=|\hat{z}||\hat{x}|\sin 90^\circ\hat{y} = 1\cdot 1\sin 90^\circ\hat{y} = \hat{y} \\ \hat{y}\times\hat{x}=|\hat{y}||\hat{x}|\sin 90^\circ(-\hat{z}) = 1\cdot 1\sin 90^\circ(-\hat{z}) = -\hat{z} \\ \hat{z}\times\hat{y}=|\hat{z}||\hat{y}|\sin 90^\circ(-\hat{x}) = 1\cdot 1\sin 90^\circ(-\hat{x}) = -\hat{x} \\ \hat{x}\times\hat{z}=|\hat{x}||\hat{z}|\sin 90^\circ(-\hat{y}) = 1\cdot 1\sin 90^\circ(-\hat{y}) = -\hat{y} \end{cases}$$

単位ベクトルの内積と外積（答え）

【演習】次の計算をせよ。

(1) $\hat{z}\bullet\hat{x},\ \hat{z}\bullet\hat{y},\ \hat{x}\bullet\hat{y},\ \hat{y}\bullet\hat{z},\ \hat{y}\bullet\hat{y},\ \hat{z}\bullet\hat{z},\ z\bullet(-\hat{x}),\ (-\hat{x})\bullet\hat{x}$

(2) $\hat{z}\times\hat{x},\ \hat{z}\times\hat{y},\ \hat{x}\times\hat{y},\ \hat{y}\times\hat{z},\ \hat{y}\times\hat{y},\ \hat{z}\times\hat{z},\ \hat{z}\times(-\hat{x}),\ (-\hat{x})\times\hat{x}$

【解答】

(1)
$$\hat{z}\bullet\hat{x}=1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0$$
$$\hat{z}\bullet\hat{y}=1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0$$
$$\hat{x}\bullet\hat{y}=1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0$$
$$\hat{y}\bullet\hat{z}=1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0$$
$$\hat{y}\bullet\hat{y}=1\cdot 1\cdot\cos 0^\circ = 1$$
$$\hat{z}\bullet\hat{z}=1\cdot 1\cdot\cos 0^\circ = 1$$
$$\hat{z}\bullet(-\hat{x})=1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ = 0$$
$$(-\hat{x})\bullet\hat{x}=1\cdot 1\cdot\cos 180^\circ = -1$$

$0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, -1$

(2)
$$\hat{z}\times\hat{x}=1\cdot 1\cdot\sin 90^\circ\,\hat{y} = \hat{y}$$
$$\hat{z}\times\hat{y}=1\cdot 1\cdot\sin 90^\circ(-\hat{x}) = -\hat{x}$$
$$\hat{x}\times\hat{y}=1\cdot 1\cdot\sin 90^\circ\,\hat{z} = \hat{z}$$
$$\hat{y}\times\hat{z}=1\cdot 1\cdot\sin 90^\circ\,\hat{x} = \hat{x}$$
$$\hat{y}\times\hat{y}=1\cdot 1\cdot\sin 0^\circ = 0$$
$$\hat{z}\times\hat{z}=1\cdot 1\cdot\sin 0^\circ = 0$$
$$\hat{z}\times(-\hat{x})=1\cdot 1\cdot\sin 90^\circ(-\hat{y}) = -\hat{y}$$
$$(-\hat{x})\times\hat{x}=1\cdot 1\cdot\sin 180^\circ = 0$$

$\hat{y}, -\hat{x}, \hat{z}, \hat{x}, 0, 0, -\hat{y}, 0$

内積と外積の演習

【演習】次のベクトル計算をせよ。
平面上に2つのベクトルA, Bがある。A=A(x^), B=B(z^)とするとき，(1) AとBの内積, (2) BとAの内積, (3) AとBの外積, (4) BとAの外積を計算せよ。ただし外積は方向も示すこと。

【解答】

$$\vec{A}=A\hat{x},\ \vec{B}=B\hat{z}$$

内積は

(1) $\vec{A}\bullet\vec{B}=A\hat{x}\bullet B\hat{z}=AB\hat{x}\bullet\hat{z}=AB\cdot 0=0$

(2) $\vec{B}\bullet\vec{A}=B\hat{z}\bullet A\hat{x}=BA\hat{z}\bullet\hat{x}=BA\cdot 0=0$

外積は

(3) $\vec{A}\times\vec{B}=A\hat{x}\times B\hat{z}=AB\hat{x}\times\hat{z}=AB(-\hat{y})$

(4) $\vec{B}\times\vec{A}=B\hat{z}\times A\hat{x}=BA\hat{z}\times\hat{x}=BA\hat{y}$

内積と外積の演習（答え）

【演習】次のベクトル計算をせよ。

ベクトルA=2(x^)+3(y^)　B=−(x^)−3(y^)のとき，(1) A●B, (2) A×Bを計算せよ。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned}\vec{A}\bullet\vec{B}&=(2\hat{x}+3\hat{y})\bullet(-\hat{x}-3\hat{y})\\&=2\hat{x}\bullet(-\hat{x})+2\hat{x}\bullet(-3\hat{y})+3\hat{y}\bullet(-\hat{x})+3\hat{y}\bullet(-3\hat{y})\\&=-2\hat{x}\bullet\hat{x}-6\hat{x}\bullet\hat{y}-3\hat{y}\bullet\hat{x}-9\hat{y}\bullet\hat{y}\\&=-2-9\\&=-11\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=(2\hat{x}+3\hat{y})\times(-\hat{x}-3\hat{y})\\&=2\hat{x}\times(-\hat{x})+2\hat{x}\times(-3\hat{y})+3\hat{y}\times(-\hat{x})+3\hat{y}\times(-3\hat{y})\\&=-2\hat{x}\times\hat{x}-6\hat{x}\times\hat{y}-3\hat{y}\times\hat{x}-9\hat{y}\times\hat{y}\\&=-6\hat{z}-3(-\hat{z})\\&=-6\hat{z}+3\hat{z}\\&=-3\hat{z}\end{aligned}$$

ヒント：ベクトル演算でも四則演算（加減乗除）の分配則は成立する。交換則は内積のみ成立し，外積はアルファベットの循環則に反するので NG 。

$-11,\ -3(z^\wedge)$

内積・外積の確認テスト

【演習】次の問いに答えよ。
(1) ベクトルA=(3,2)のx成分，y成分および，大きさを求めよ。
(2) 電磁気学で単位ベクトルにeやiを使うことを推奨しない理由は？
(3) 単位ベクトル同士の内積と外積計算について次の計算をせよ。
x^●x^, x^ ● z^, y^ ● z^, x^×y^, y^×z^, y^×y^
(4) A=3x^+2y^, B=−x^−2y^のとき，A●B，A×Bを計算せよ。

【解答】
(1) 3, 2, √(13)
(2) 電圧や電流と混同するリスクを避ける（虚数iではない。虚数jは電気ではiと混同するからjにしている。交流電圧e，交流電流iと混同を避けるが正しい。電子eも間違いではないのでOK）
(3) 1, 0, 0, z^, x^, 0
(4) −7, −4z^

$\vec{A} = 3\hat{x} + 2\hat{y},\ \vec{B} = -\hat{x} - 2\hat{y}$

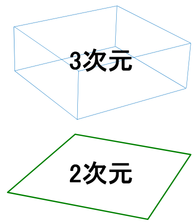
$$(3\hat{x} + 2\hat{y}) \bullet (-\hat{x} - 2\hat{y})$$
$$= -3\hat{x} \bullet \hat{x} - 6\hat{x} \bullet \hat{y} - 2\hat{y} \bullet \hat{x} - 4\hat{y} \bullet \hat{y}$$
$$= -3 - 4 = -7$$

$$(3\hat{x} + 2\hat{y}) \times (-\hat{x} - 2\hat{y})$$
$$= -3\hat{x} \times \hat{x} - 6\hat{x} \times \hat{y} - 2\hat{y} \times \hat{x} - 4\hat{y} \times \hat{y}$$
$$= -6\hat{z} - 2(-\hat{z})$$
$$= -6\hat{z} + 2\hat{z} = -4\hat{z}$$

(1) 3, 2, √13 (2) 略 (3) 1, 0, 0, z^, x^, 0 (4) −7, −4z^

場と界 (Field) とは？

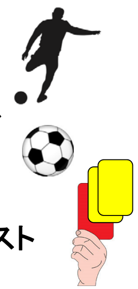
場 (Field)



特定のルール＝秩序・法則）が適用される時空間

サッカー場

- サッカールール
- サッカーボール
- 11人制
- 前後半制
- ハンド
- オフサイド
- PK
- CK
- ゴールポスト
- 観戦マナー



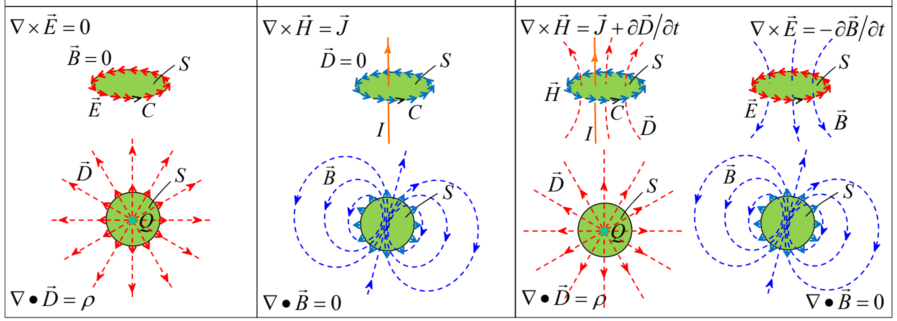
野球場 芸能界

- 野球ルール
- 野球ボール
- 9人制
- 9回表裏制
- デッドボール
- フォアボール
- スリーアウト
- 観戦マナー

問：ルールを知らなかったり，破ったりしたらどうなりますか？
TPO (Time, Place, Occasion)：時と場所と場合(条件)を弁える，郷に入れば郷に従え，とは？

電場・磁場・電磁場はベクトル場

電場（または電界）	磁場（または磁界）	電磁場（または電磁界）

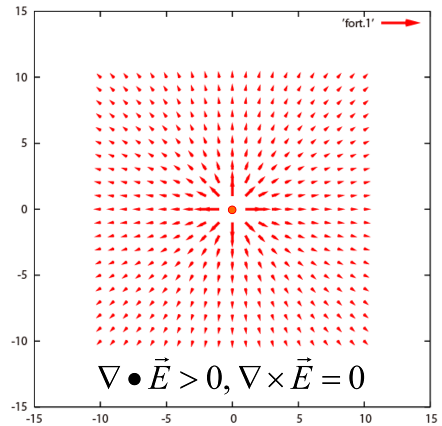


- 静電場のルール
- 静電荷
- 時間変化なし
- 保存場の性質
- ガウスの法則
- 観測マナー

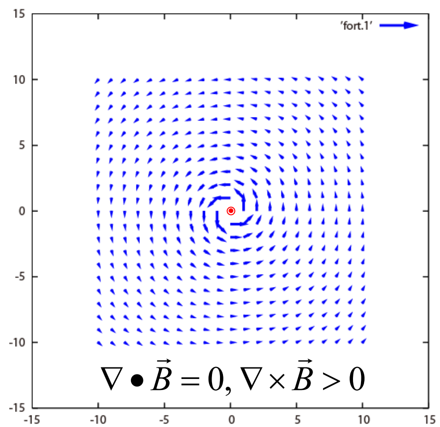
- 静磁場のルール
- 磁石（ループ電流）
- 時間変化なし
- アンペアの法則
- 磁場ガウスの法則
- 観測マナー

- 電磁場のルール
- 変動電荷
- 交流電流
- 時間変化あり
- マクスウェル方程式
- 観測マナー

ベクトル場の表示例



電荷が作る電場
湧き出し（発散）



電流が作る磁場
渦（回転）

ベクトル微分演算子(ナブラ)

①	$\dfrac{d}{dx}$	常微分演算子 (独立変数が1つのみの場合)
②	$\dfrac{\partial}{\partial x},\ \dfrac{\partial}{\partial y}$	偏微分演算子 (独立変数が2つ以上の場合)
③	$\hat{x}\dfrac{\partial}{\partial x} \equiv \nabla_x$	ベクトル偏微分演算子(1次元)
④	$\hat{x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\dfrac{\partial}{\partial y} \equiv \nabla_t$ t: transverse(横方向の)	ベクトル偏微分演算子(2次元断面) 奥行きz方向に対して
⑤	$\boxed{\hat{x}\dfrac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\dfrac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\dfrac{\partial}{\partial z} \equiv \nabla}$	ベクトル偏微分演算子(3次元)

ただし, $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$: x方向, y方向, z方向の単位ベクトル

⑥ $\int dx$ は積分演算子

ベクトルの微分(2次元の例)

①スカラーの微分(勾配)

$$\nabla_t A = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)A = \hat{x}\frac{\partial A}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial A}{\partial y}$$

②ベクトルの微分(発散)

$$\nabla_t \bullet \vec{A} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\bullet\left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y}\right) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

③ベクトルの微分(回転)

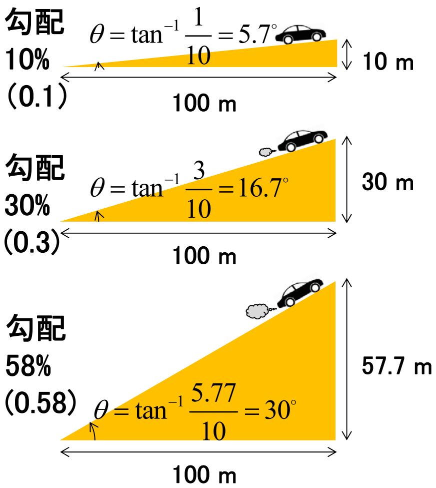
$$\nabla_t \times \vec{A} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\times\left(A_x\hat{x} + A_y\hat{y}\right) = \hat{z}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \hat{z}\frac{\partial A_y}{\partial y} = \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial y}\right)$$

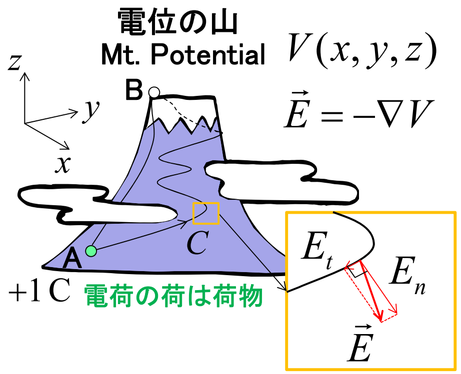
④ラプラシアン(ベクトル演算子どうしの内積)

$$\nabla_t \bullet \nabla_t = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)\bullet\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

勾配とは?

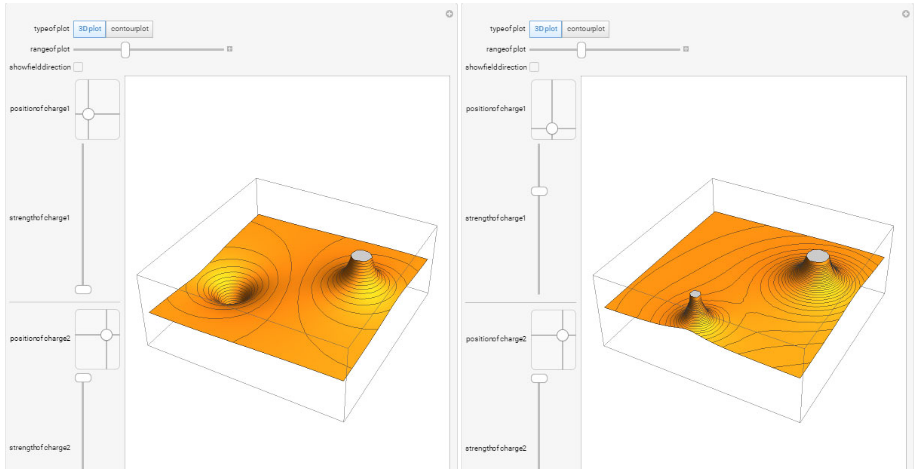
例えば、高速道路で10%勾配の上り坂とは、水平に100 m進んだ時に10 mの高さを上ることを意味する。(道路構造令)





経路や方向によって勾配は異なる。
(勾配には方向がある。)

電位(ポテンシャル)の表示例



等高線は等電位面を示しており、電位の勾配が電界を表す。
勾配には方向があり、等高線が蜜な場所ほど勾配が急で、
等高線が粗なほど勾配が穏やかである。

https://demonstrations.wolfram.com/ElectricDipolePotential/

スカラー場の勾配

$\phi=\phi(x,y,z)$のスカラー場を考える。このスカラー場ϕの勾配(傾斜)は、直角座標系の∇を使って次式で表現される。勾配はグラディエント(gradient)とも呼びます。

① $$\nabla\varphi(x,y,z)=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi(x,y,z)$$

② $$\nabla\varphi=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi=\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

同じ

$$\operatorname{grad}\varphi=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi=\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

勾配(grad)

デカルト座標　または，直角座標　$u=u(x,y,z)$

$$\nabla u=\hat{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial u}{\partial z} \quad ①$$

円筒座標　$u=u(\rho,\varphi,z)$

$$\nabla u=\hat{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\hat{z}\frac{\partial u}{\partial z} \quad ②$$

球座標　$u=u(r,\theta,\varphi)$

$$\nabla u=\hat{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \quad ③$$

ベクトルの線積分

循環という物理量

線路Cが閉じていることを示す記号

線素dlに平行でCの方向を示す

$$\oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l}$$

微小線素

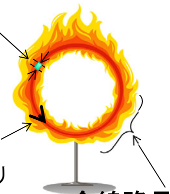
内積記号

線路

線路C上にあるベクトル量

サーカスリング

微小線素dl リングを構成する線分1つあたりの長さ



方向

右回り or 左回り どちらでもよい

全線路長C =Σdl

線路Cが閉じていない(開いている)ことを示す記号

線素dlに平行でCの方向を示す

$$\int_C \vec{A}\bullet d\vec{l}$$

微小線素

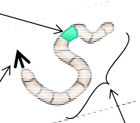
内積記号

線路

線路C上にあるベクトル量

ミミズ　方向

微小線素dl ミミズを構成する消化管1つあたりの長さ



消化した土が排泄される方向

ミミズの進行方向(逆向き)でもよい

全線路長C =Σdl

※ 計算結果の物理量は、ベクトルAの単位[〇〇]と長さ[m]との積になる。

ベクトルの線積分

$$\boxed{\int_C \vec{A}\bullet d\vec{l}=\int_C\left\{A_t\hat{t}+A_n\hat{n}\right\}\bullet dl\hat{t}=\int_C A_t dl}$$

$d\vec{l}=dl\hat{t}$　積分路Cに対して常に接線方向を向いた微小長さベクトル

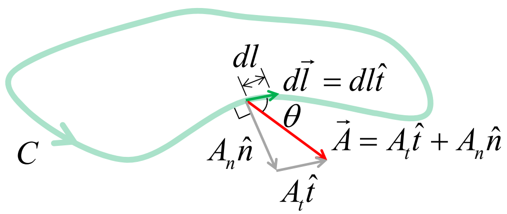
$\vec{A}=A_t\hat{t}+A_n\hat{n}$　積分路C上のある点におけるベクトル(物理量)

A_t　積分路Cに対するベクトルAの接線成分

A_n　積分路Cに対するベクトルAの法線成分(垂直成分)

$\hat{t}$　積分路Cに対して接線方向を向いた単位ベクトル

$\hat{n}$　積分路Cに対して法線方向を向いた単位ベクトル



t : tangential
接線の(接線成分)
n : normal
法線の(法線成分)

ベクトルの面積分

流束という物理量

$$\oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

面Sが閉じていることを示す記号

微小面積dsに垂直で外向きを示す

表面積

面S上のベクトル量

内積記号

微小面積

ミラーボール

微小面積ds
ミラーボールを構成する鏡1枚あたりの面積

※ 図では赤道上は大きく見えるが、実際は無限小の大きさ

全表面積S
=Σds

$$\int_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

面Sが閉じていない（開いている）ことを示す記号

微小面積dsに垂直で外向きを示す

表面積

面S上のベクトル量

内積記号

微小面積

風船と熱気球の違いでもよい

微小面積ds
パズルを構成するピース1枚の面積

※ 内側は表面ではなく裏面として考えるので、表面積Sに含まない

全表面積S
=Σds

※ 計算結果の物理量は、ベクトルAの単位[〇〇]と面積[m²]との積になる。

ベクトルの面積分

$$\int_S \vec{A} \bullet d\vec{s} = \int_S \left\{ A_t \hat{t} + A_n \hat{n} \right\} \bullet ds\hat{n} = \int_S A_n ds$$

$d\vec{s} = ds\hat{n}$　積分面Sに対して常に法線方向を向いた微小面積ベクトル

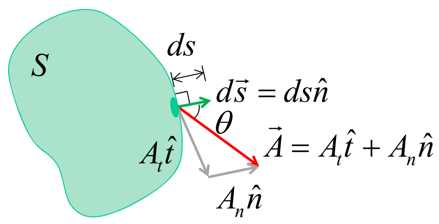
$\vec{A} = A_t \hat{t} + A_n \hat{n}$　積分面S上のある点におけるベクトル（物理量）

A_t　積分面Sに対するベクトルAの接線成分

A_n　積分面Sに対するベクトルAの法線成分（垂直成分）

$\hat{t}$　積分面Sに対して接線方向を向いた単位ベクトル

$\hat{n}$　積分面Sに対して法線方向を向いた単位ベクトル



t : tangential
接線の（接線成分）

n : normal
法線の（法線成分）

ストークスの定理

㋐

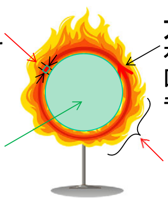
$$\int_S \underbrace{(\nabla \times \vec{A})}_{\text{ベクトルAの回転（＝単位面積あたりの循環）}} \bullet d\vec{s} = \underbrace{\oint_C \vec{A} \bullet d\vec{l}}_{\text{ベクトルAの循環}\ \Gamma}$$

右辺の線路Cの内側の開いた面（2次元）

線路Cに沿って閉じたループ（1次元）

（例）リング
の枠と内側

微小線素dl
リングを構成する線分1つあたりの長さ

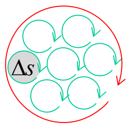


方向
右回り or 左回りどちらでもよい

線路Cの内側の面積
S =Σds

全線路長
C =Σdl

物理的な意味



内側の小さい渦の集合と外周の大きな渦は等価

2次元（面積分）を1次元（線積分）に下げる定理

一般に次元を上げる（積分する）のは難解だが、次元を下げる（微分する）のは簡単

∇×の定義

教科書, p.110

$$\Gamma = \oint_C \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

：ベクトルAの循環
物理量

単位面積当たりの循環の極限値＝ 回転

$$\lim_{S_i \to 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{A} \bullet d\vec{l}}{S_i} = (\mathrm{rot}\ \vec{A}) \bullet \hat{n} \equiv (\nabla \times \vec{A}) \bullet \hat{n}$$

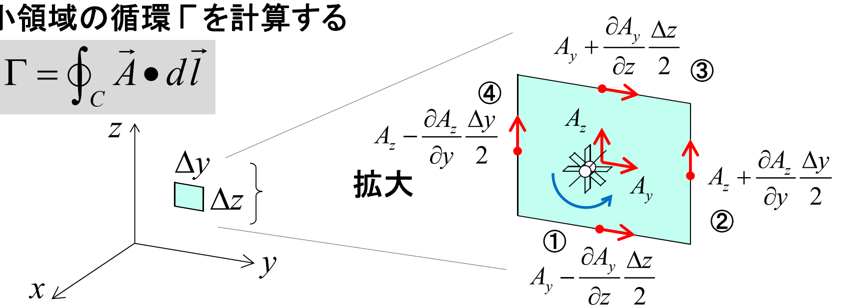
バークレー物理学コース　電磁気　飯田（訳）, pp.89-93, 丸善出版, 2013

循環と回転の関係

微小領域の循環Γを計算する

㋐ $\Gamma = \oint_C \vec{A} \bullet d\vec{l}$

拡大



㋑
$$\Gamma = \oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l} = \underbrace{\left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)}_{①}\Delta y + \underbrace{\left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)}_{②}\Delta z - \underbrace{\left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)}_{③}\Delta y - \underbrace{\left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)}_{④}\Delta z$$
$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\Delta y \Delta z$$

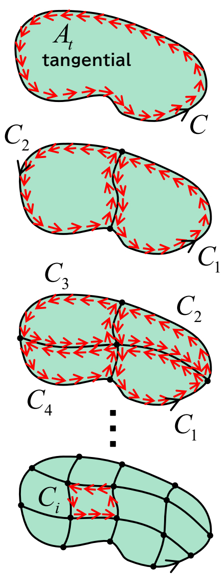
$$\Rightarrow \frac{\Gamma}{\Delta y \Delta z} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \equiv (\nabla \times \vec{A})_x$$

単位面積当たりの循環の極限
（x軸正方向の回転成分）

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \equiv (\nabla \times \vec{A})_y \qquad \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \equiv (\nabla \times \vec{A})_z$$

同様にして、y軸方向の回転成分とz軸方向の回転成分も導出できる。

ストークスの定理の証明１



ベクトルAの循環は次式で定義される物理量である。

$$\Gamma = \oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l} \quad ㋐$$

中央で積分路を分割すると

$$\Gamma = \oint_{C_1} \vec{A}\bullet d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{A}\bullet d\vec{l} \quad ㋑$$

分割した部分は互いに打ち消しあう

さらに分割すると

$$\Gamma = \oint_{C_1} \vec{A}\bullet d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{A}\bullet d\vec{l} + \oint_{C_3} \vec{A}\bullet d\vec{l} + \oint_{C_4} \vec{A}\bullet d\vec{l} \quad ㋒$$

⋮ 細分化を繰り返す

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \vec{A}\bullet d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \quad ㋓$$

微小面積における外周の循環を総和した結果は、微小面積を全部総和してできる一番外側の外周の循環に等しい。

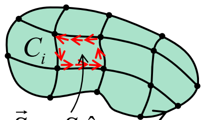
次ページへ続く ▼

飯田（訳）, バークレー物理学コース　電磁気, pp.89-93, 丸善出版, 2013

ストークスの定理の証明２ 教科書, p.112

単位面積当たりの循環の極限値を∇×で表すと

$$\lim_{S_i \to 0} \frac{\Gamma_i}{S_i} = \lim_{S_i \to 0} \frac{\oint_{C_i} \vec{A}\bullet d\vec{l}}{S_i} \quad ㋔$$
$$\equiv (\mathrm{curl}\ \vec{A})\bullet \hat{n} = (\mathrm{rot}\ \vec{A})\bullet \hat{n} = (\nabla \times \vec{A})\bullet \hat{n} \quad ㋕$$



面素ベクトルの方向nは面に垂直で右ねじを正とする。

となる。所で、もとの閉路C全体に関する循環の式は

$$\Gamma = \oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} S_i \frac{\Gamma_i}{S_i} \quad ㋖$$

$$d\vec{s} = ds\hat{n}$$

上式の極限をとると※

$$\lim_{S_i \to 0} \Gamma = \lim_{S_i \to 0} \oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l} = \lim_{S_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Gamma_i = \boxed{\lim_{S_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} S_i} \boxed{\left(\frac{\Gamma_i}{S_i}\right)} = \int_S \boxed{(\nabla \times \vec{A})} \bullet d\vec{s} = \Gamma \quad ㋗$$

したがって，最終的に次式が得られる。

$$\oint_C \vec{A}\bullet d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A})\bullet d\vec{s} \quad ㋘$$

※$S_i \to 0$の極限をとっても、Γ_iはΣを取っているので、閉路C全体のΓは変わらない。

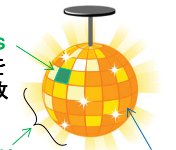
バークレー物理学コース　電磁気　飯田（訳）, pp.89-93, 丸善出版, 2013

ガウスの発散定理（ガウスの定理）

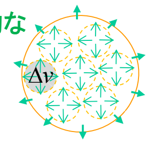
$$㋐ \quad \int_V \overbrace{\nabla \bullet \vec{A}}^{\text{ベクトルAの発散（＝単位体積あたりの流束）}} dv = \overbrace{\oint_S \vec{A}\bullet d\vec{s}}^{\text{ベクトルAの流束}\Phi}$$

右辺の面Sの内側にある体積（3次元）　閉面Sの面積（2次元）

（例）光球の内側と表面



物理的な意味



内側の小さい発散の集合と外周を囲む面からの発散は等価

空間3次元（体積分）を2次元（面積分）に下げる定理

一般に次元を上げる（積分する）のは難解だが，次元を下げる（微分する）のは簡単

∇・の定義

$$\Phi = \oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$$ ： $\underbrace{\text{ベクトルAの流束}}_{\text{物理量}}$

単位体積当たりの流束の極限値＝発散

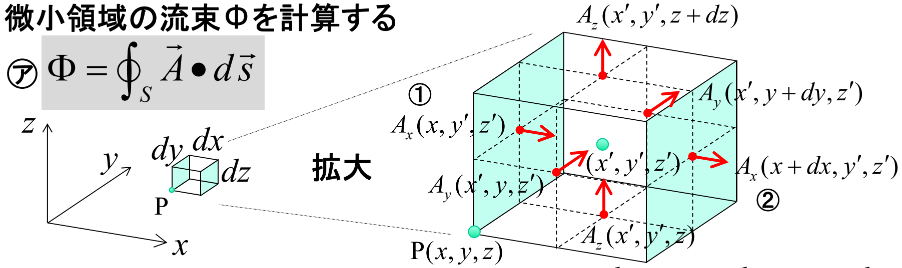
$$\boxed{\lim_{V_i \to 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{A} \bullet d\vec{s}}{V_i} = \operatorname{div} \vec{A} \equiv \nabla \bullet \vec{A}}$$

バークレー物理学コース　電磁気　飯田（訳）, pp.73-76, 丸善出版, 2013

発散と流束の関係

微小領域の流束Φを計算する

㋐ $\Phi = \oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s}$



x方向の流束（面に垂直なベクトル成分と面積の積）の変化は

ただし、$x' = x + \frac{dx}{2}, y' = y + \frac{dy}{2}, z' = z + \frac{dz}{2}$

$$\Delta\Phi_x = A_x(x+dx, y', z')dydz - A_x(x, y', z')dydz$$
$$= \{A_x(x+dx, y', z') - A_x(x, y', z')\}dydz$$
$$= \frac{A_x(x+dx, y', z') - A_x(x, y', z')}{dx} dxdydz$$
$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdydz \quad ㋑$$

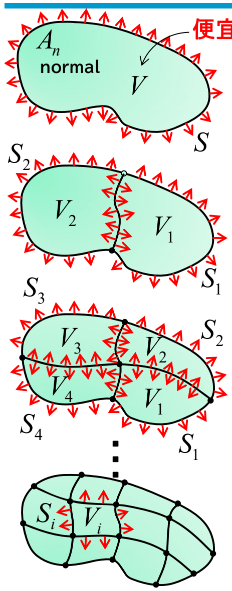
同様にy方向, z方向の流束の変化も計算できる

x, y, z方向の流束の変化の合計

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_x + \Delta\Phi_y + \Delta\Phi_z \quad ㋒$$
$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} dxdydz + \frac{\partial A_y}{\partial y} dxdydz + \frac{\partial A_z}{\partial z} dxdydz$$
$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dxdydz = \nabla \bullet \vec{A}\, dv$$

村上, なるほどベクトル解析, p.149, 海鳴社, 2003

ガウスの定理の証明1



便宜上，2次元平面的に書いているが本当は体積 V と表面積 S の風船状

ベクトルAの流束は次式で定義される物理量である。

$$\Phi = \oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s} \quad ㋐$$

中央で積分面を分割すると

$$\Phi = \oint_{S_1} \vec{A} \bullet d\vec{s} + \oint_{S_2} \vec{A} \bullet d\vec{s} \quad ㋑$$

分割した部分は互いに打ち消しあう

さらに分割すると

$$\Phi = \oint_{S_1} \vec{A} \bullet d\vec{s} + \oint_{S_2} \vec{A} \bullet d\vec{s} + \oint_{S_3} \vec{A} \bullet d\vec{s} + \oint_{S_4} \vec{A} \bullet d\vec{s} \quad ㋒$$

⋮ 細分化を繰り返す

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \oint_{S_i} \vec{A} \bullet d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i \quad ㋓$$

微小体積における流束を総和した結果は、微小体積を全部総和してできる全体積の流束に等しい。

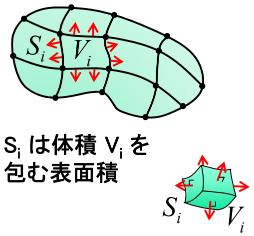
バークレー物理学コース　電磁気　飯田（訳）, pp.73-76, 丸善出版, 2013

次ページへ続く▽

ガウスの定理の証明2

単位体積当たりの流束の極限値を∇・で表すと

$$\lim_{V_i \to 0} \frac{\Phi_i}{V_i} = \lim_{V_i \to 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{A} \bullet d\vec{s}}{V_i} \quad ㋔$$
$$\equiv \operatorname{div} \vec{A} = \nabla \bullet \vec{A} \quad ㋕$$



となる。所で、もとの閉面 S に関する流束の式に戻ると

$$\Phi = \oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s} = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} V_i \frac{\Phi_i}{V_i} \quad ㋖$$

上式の極限をとると※

$$\lim_{V_i \to 0} \Phi = \lim_{V_i \to 0} \oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s} = \lim_{V_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i = \boxed{\lim_{V_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} V_i} \boxed{\frac{\Phi_i}{V_i}} = \int_V \boxed{\nabla \bullet \vec{A}} dv = \Phi \quad ㋗$$

したがって、最終的に次式が得られる。

$$\oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s} = \int_V \nabla \bullet \vec{A} dv \quad ㋘$$

※$V_i \to 0$の極限をとっても、Φ_iはΣを取っているので、閉面V全体のΦは変わらない。

バークレー物理学コース　電磁気　飯田（訳）, pp.73-76, 丸善出版, 2013