

1. 積分公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C \quad (1)$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + C \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (4)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (6)$$

※ 絶対値記号 $|x|$ は、記号の中身 $x > 0$ のときはそのまま外せて x となり、 $x < 0$ のときは $-$ を付ければ外せるので $-x$ となる。

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{a^2+x^2} \right| + C \quad (7)$$

※ 式 (7) は有限長直線電荷が作る電位を求める際に使われる。

$$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) + C \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C \quad (9)$$

※ 式 (9) は有限長直線電流が作る磁場、有限長直線電荷が作る電界を求める際に使われる。

$$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + C \quad (11)$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} + C \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (14)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (15)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (16)$$

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (17)$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C \quad (18)$$

2. 式 (7) の証明

まず、 $f(x) = x + \sqrt{a^2+x^2}$ とおくと $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ となるから

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x + \sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{a^2+x^2} + x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x + \sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

となる。もとの式 (7) 左辺の分子分母に $x + \sqrt{a^2+x^2}$ を掛けると

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx &= \int \frac{x + \sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2} (x + \sqrt{a^2+x^2})} dx \\ &= \int \frac{x + \sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx \end{aligned}$$

ここで式 (5) の結果を使えば

$$= \ln |f(x)| + C = \ln \left| x + \sqrt{a^2+x^2} \right| + C$$

以上より式 (7) が得られる。

3. 式 (11) の証明

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int (-x) \left(-\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx$$

$$= \int (-x) \left((a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} \right)' dx$$

これは部分積分の公式そのものなので

$$= (-x) (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} - \int (-1) (a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx$$

ここで第 2 項に式 (7) の結果を使うと

$$= \frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + C$$

以上より

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + C$$

が得られる。

4. 式 (9) の証明

まず、被積分関数を次のように変形する。

$$(a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2+x^2-x^2}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2+x^2}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

ここで式 (7) と式 (11) の結果

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + C$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + C$$

を使うと与式は

$$\int (a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} dx$$

$$= \frac{1}{a^2} \left\{ \int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} dx - \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \right\}$$

$$= \frac{1}{a^2} \left\{ \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \ln \left(x + \sqrt{a^2+x^2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

以上より

$$\int (a^2+x^2)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

が得られる。