電磁気学によく出る積分公式

v1.3 May.2016　　　　番号:____________________　　氏名:__________________________

1. 積分公式

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + C \tag{1}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1}x + C \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + C \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \tag{4}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C \tag{5}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \tag{6}$$

※ 絶対値記号 $|x|$ は，記号の中身 $x>0$ のときはそのまま外せて x となり，$x<0$ のときは $-$ を付ければ外せるので $-x$ となる。

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C \tag{7}$$

※ 式 (7) は有限長直線電荷が作る電位を求める際に使われる。

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) + C \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C \tag{9}$$

※ 式 (9) は有限長直線電流が作る磁場，有限長直線電荷が作る電界を求める際に使われる。

$$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} + C \tag{10}$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C \tag{11}$$

$$\int xe^{-ax^2}\,dx = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} + C \tag{12}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{13}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \tag{14}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \tag{15}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \tag{16}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C \tag{17}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C \tag{18}$$

2. 式 (7) の証明

まず，$f(x) = x+\sqrt{a^2+x^2}$ とおくと $f'(x) = 1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ となるから

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

となる。もとの式 (7) 左辺の分子分母に $x+\sqrt{a^2+x^2}$ を掛けると

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \int \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

ここで式 (5) の結果を使えば

$$= \ln|f(x)| + C = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C$$

以上より式 (7) が得られる。

3. 式 (11) の証明

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int (-x)\left(-\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx$$

$$= \int (-x)\left(\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'\,dx$$

これは部分積分の公式そのものなので

$$= (-x)\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \int (-1)\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

ここで第 2 項に式 (7) の結果を使うと

$$= \frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

以上より

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

が得られる。

4. 式 (9) の証明

まず、被積分関数を次のように変形する。

$$\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2+x^2-x^2}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2+x^2}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{a^2(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

ここで式 (7) と式 (11) の結果

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C$$

を使うと与式は

$$\int \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \int \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx - \int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left\{\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

以上より

$$\int \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + C$$

が得られる。