電磁気学で使う積分公式

1st. 2017/05/10
Lst. 2018/05/09

電磁気学で使う積分公式（その1）

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C \quad \cdots(1)$$

$f(x)=x+\sqrt{a^2+x^2}$,　$f'(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$　と置くと,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

もとの式の分子・分母に　$x+\sqrt{a^2+x^2}$　を掛けると,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\int \frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}\,dx$$

$$=\int \frac{\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln\left|f(x)\right|+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$$

電磁気学で使う積分公式（その1）

【別解 by 澤田先生】

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C \quad \cdots(1)$$

$x=a\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$　と置くと,　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{a}{2}(e^t+e^{-t})$

$$x^2=a^2\frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}=a^2\frac{e^{2t}-e^{-2t}-2}{4}$$

$$x^2+a^2=a^2\frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}+a^2=a^2\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}-2}{4}+1\right)=a^2\left(\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\right)=a^2\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{x^2+a^2}&=a\frac{e^t+e^{-t}}{2}\\ x&=a\frac{e^t-e^{-t}}{2}\end{aligned}\right\}$$

足すと,

$$x+\sqrt{a^2+x^2}=a\frac{e^t-e^{-t}}{2}+a\frac{e^t+e^{-t}}{2}=ae^t \quad \Leftrightarrow \quad e^t=\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\int \frac{2}{a(e^t+e^{-t})}\frac{a}{2}(e^t+e^{-t})\,dt=\int dt=t$$

$$t=\ln e^t=\ln\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)-\ln a+C=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$$

電磁気学で使う積分公式（その2）

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=-\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C \quad \cdots(2)$$

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx=\int(-x)\left(-\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx=\int(-x)\left(\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'dx=\int f(x)g'(x)\,dx$$

これは部分積分の公式そのものの形になっているので,

$$\int(-x)\left(\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'dx=(-x)\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\int(-1)\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

ここで,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C \quad \cdots(1)$$

は証明済みで既知であるから,

$$=\frac{-x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$$

電磁気学で使う積分公式（その3）

$$\int \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C \quad \cdots(3)$$

まず，被積分関数を変形する。

$$\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2+x^2-x^2}{a^2\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2+x^2}{a^2\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2}{a^2\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^2\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{a^2\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

ここで，

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C \quad \cdots(1) \qquad \int \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C \quad \cdots(2)$$

は証明済みで既知であるから，

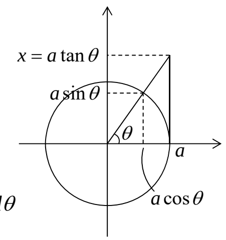
$$\int \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \frac{1}{a^2}\left\{\frac{1}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\} dx = \frac{1}{a^2}\left\{\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

電磁気学で使う積分公式（その3）

【別解 by 澤田先生】

$$\int \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C \quad \cdots(3) \qquad x = a\tan\theta = a\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



$x = a\tan\theta$ と置くと，

$$\frac{dx}{d\theta} = a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = a\frac{\cos\theta\cos\theta-\sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = a\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\int \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx = \int \left(a^2+a^2\tan^2\theta\right)^{-\frac{3}{2}} a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int a^{-3}\left(1+\tan^2\theta\right)^{-\frac{3}{2}} a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int a^{-2}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int a^{-2}\left(\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int a^{-2}\cos\theta d\theta = \frac{\sin\theta}{a^2}$$

図より明らかに，

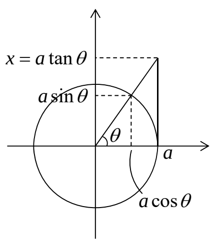
$$\sin\theta = \frac{a\tan\theta}{\sqrt{a^2+(a\tan\theta)^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

の関係があるので，

$$\int \left(a^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

電磁気学で使う積分公式（その4）

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}x+C \quad \cdots(4) \qquad x = a\tan\theta = a\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



$x = a\tan\theta$ と置くと，

$$\frac{dx}{d\theta} = a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)' = a\frac{\cos\theta\cos\theta-\sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = a\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\int \frac{1}{a^2+a^2\tan^2\theta} dx = \int \frac{1}{a^2(1+\tan^2\theta)} a\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int \frac{1}{a}d\theta = \frac{\theta}{a} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\theta$$

従って，

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}x+C$$