

1. 実験式の導出

図1に示すような任意形状の定常電流 I を複数の微小電流素 dl に分割し、塗りつぶされた電流素に着目する。この電流素から観測点までの距離を r 、電流素に流れる電流の接線方向と観測点に向かう直線との開き角度を θ としたとき、観測点で測定される磁束密度 B について次のことが分かった*1。

- (1) 電流の大きさに比例した。 $\Rightarrow B \propto I$
- (2) 電流素の長さに比例した。 $\Rightarrow B \propto dl$
- (3) 電流素と観測点の間の距離の逆2乗に比例した。 $\Rightarrow B \propto 1/r^2$
- (4) $\sin \theta$ に比例した。 $\Rightarrow B \propto \sin \theta$
($\theta = 90^\circ$ で最大となり、 $\theta = 0^\circ$ で最小)

(5) 方向は紙面表から裏に向かう方向であった。 $\Rightarrow B \propto \otimes$
【性質1】～【性質4】をまとめると式(1)が得られる。ただし、係数 $\mu_0/4\pi$ はSI単位系*2で定義された定数である。

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2} \quad (1)$$

しかし、このままでは【性質5】磁束密度 B の方向 \otimes を数式で表現できない。そこで、図1左上に示す $d\vec{l}$ (大きさ dl で電流が流れる方向を持つベクトル) と \hat{r} (大きさ1で電流素から観測点に向かうベクトル) を使って式(1)の $dl \sin \theta$ を書き換えると次式となる。

$$dl \sin \theta = dl \cdot 1 \cdot \sin \theta = |d\vec{l}| |\hat{r}| \sin \theta = |d\vec{l} \times \hat{r}| \quad (2)$$

式(2)の $d\vec{l} \times \hat{r}$ の方向は【性質5】の磁束密度 B の方向 \otimes とちょうど一致している。以上をまとめると次式が得られる。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (3)$$

これをビオ-サバルの法則 (Biot-Savart law) と呼ぶ。図2に数式の意味を示す。

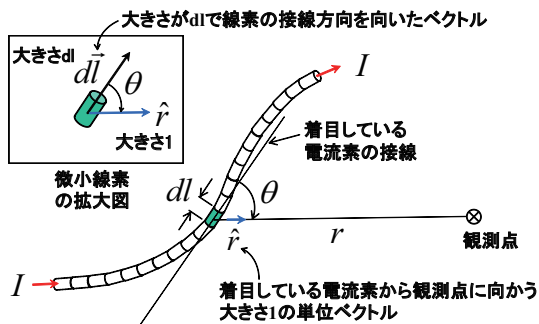
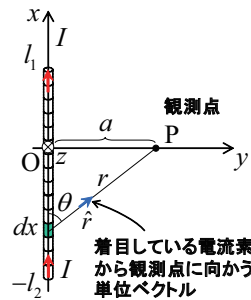


図1 ビオサバルの法則の概念図。着目する電流素から観測点までの距離を r 、開き角度を θ とする。 $d\vec{l}$ は大きさが dl で線素の接線方向 (電流が流れる方向) を向いたベクトルである。 \hat{r} は着目している電流素から観測点に向かう単位ベクトルである。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

観測点における磁束密度ベクトル $d\vec{B}$ は、電流素 $I d\vec{l}$ と、電流素から観測点に向かう単位ベクトル \hat{r} の外積 (電流を観測点に向かう方向とその直交方向に分離し、直交成分の方をとる) を、SI単位系で定義された定数 μ_0 (真空の透磁率) と、電流素から観測点までの距離 r^2 で割ったものである。

図2 ビオ-サバルの公式



解法1(オーソドックスな方法)

変数をすべて x のみの関数に書き換える。

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ r = \sqrt{a^2 + x^2} \end{cases}$$

積分公式

$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

図3 x 軸上の区間電流 I 。着目する電流素から観測点 P までの距離を r 、開き角度を θ とする。

2. ビオ-サバルの法則の適用例

ここで、図3左のように x 軸上の区間 $-l_2 \sim l_1$ を流れる有限長の直線電流が y 軸上の距離 a の位置に設けた観測点 P に作る磁束密度を式(3)のビオ-サバルの法則から求める。式(3)において $d\vec{l} = d\vec{x}$ であり、 $d\vec{x} \times \hat{r} = |d\vec{x}| |\hat{r}| \sin \theta \hat{z} = dx \sin \theta \hat{z}$ (\hat{z} は z 方向の単位ベクトル) であるから、塗りつぶされた電流素に着目すると

$$d\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I d\vec{x} \times \hat{r}}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I dx \sin \theta \hat{z}}{4\pi r^2} \quad (4)$$

全磁束密度 \vec{B}_P はこれを区間 $-l_2 \sim l_1$ で x について積分して

$$\vec{B}_P = \int_{-l_2}^{l_1} \frac{\mu_0 I dx \sin \theta}{4\pi r^2} \hat{z} = \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{\sin \theta}{r^2} dx \quad (5)$$

式(5)の積分変数 θ, r はともに x の関数 (x の従属変数) になっているのでこのままでは積分しにくい。そこで、図3右上のように被積分関数を x だけの関数に書き換える。別解法として、変数をすべて θ のみの関数に書き換えるか*3、 φ のみの関数に書き換える方法*4でもよい。さらに図3右下の積分公式を使うと \vec{B}_P は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \vec{B}_P &= \frac{\mu_0 I \hat{z}}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_1} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left(\frac{l_1}{a^2 \sqrt{a^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{a^2 \sqrt{a^2 + l_2^2}} \right) \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{l_1}{\sqrt{a^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{a^2 + l_2^2}} \right) \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left(\frac{1}{\sqrt{(a/l_1)^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(a/l_2)^2 + 1}} \right) \hat{z} \end{aligned} \quad (6)$$

もしも区間電流が無有限長電流ならば、式(6)で $l_1, l_2 \rightarrow \infty$ を代入して $\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{z}$ (7) となる。

式(7)より、直線電流の周囲には電流軸を中心にして同心円状の磁束密度が発生しており、その大きさは電流から離れるほど小さく、方向は右ネジの方向*5であることが分かる。

3. その他のビオサバルの法則の適用例

ビオサバルの法則を使って解析的に解を導出*6できるのは、(1)有限長直線電流、(2)無限長直線電流 (有限長直線電流の極限をとれば無限長になる) (3)ループ電流、および(1)-(3)の組み合わせか重ね合わせに限定される。なお、ビオ-サバル法則の適用手順には次のパターンがある。【手順1】着目した電流素 $I d\vec{l}$ が観測点に作る磁場 $d\vec{B}$ を求める。【手順2】着目する電流素を変えて磁場 $d\vec{B}$ を求める。【手順3】個別の磁場をすべて足し合わせて (電流が連続して流れている場合は積分して) 合成磁場 \vec{B} を求める。

*3 $r = \frac{a}{\sin \theta}$, $dx \sin \theta = r d\theta$ と置けば、 θ に関する積分にできる。

*4 $\varphi = \pi - \theta$ は、観測点 P から着目する電流素 $I d\vec{x}$ と原点 O を見込む角度であり、 $r = \frac{a}{\cos \varphi}$, $dx \sin \theta = r d\varphi$ と置けば φ に関する積分にできる。

*5 ネジを回す方向を磁場に例えると、ネジの進行方向が電流になる。または右手の親指を電流に例えると、他の指の曲がる方向が磁場になる。

*6 数学的な変形だけで解を出せるという意味。煩雑な問題はパソコンによる数値計算が必要になる。

*1 1820年 Biot と Savart によって発表された。実際は後述の理論式(3)が先行して考案され、後から実験によってその正しさが証明された。

*2 現在の mksA 単位系のこと。1 cm, 1 g, 1 s を基本単位としていた昔の gauss 単位系と cgs 単位系ではこの係数の値は異なる。