

# ビオ-サバールの法則

1st 2011/04/25  
Lst 2023/09/30

# 電磁気学の偉人マップ

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$   
アンペール-マクスウェルの法則

$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$   
ファラデーの法則

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$   
ガウスの法則

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$   
ビオ-サバールの法則

$c = 2.99792458 \times 10^8$  [m/s] ミリカン 1868-1953 (85)  
光速 ヘルツ 1857-1894 (37)

$e = 1.60217733 \times 10^{-19}$  [C] テスラ 1856-1943 (87)  
素電荷 トムソン 1856-1940 (84)

$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}l$  フレミング左手則  
 $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$  ローレンツ力  
マクスウェル 1831-1879 (48)

$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$  フレミング右手則  
ギルピホッフ 1824-1887 (63)

$R = \rho \frac{l}{S}$   $C = \frac{Q}{V}$   $L = \frac{\phi}{I}$

$I = \frac{dQ}{dt}$   $E = IR$   
オームの法則

$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$   
クーロンの法則

ボルタ 1745-1827 (82)  
クーロン 1736-1806 (70)  
キャベンディッシュ 1731-1810 (79)  
平賀源内 1728-1780 (52)  
フランクリン 1706-1790 (84)  
デュ・フェ 1698-1739 (41)

ギルバート 1544-1603 (59)

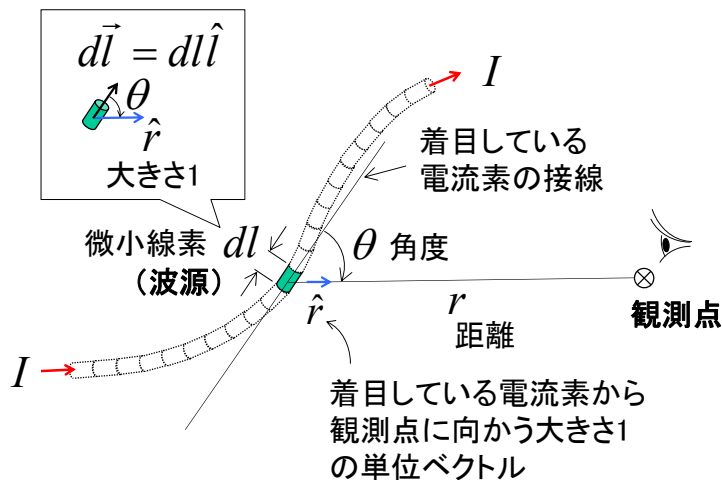
1400 1500 1600 1700 1800 1900 2000

1639 宗教・外交・貿易制限(鎖国時代) 1854

**ミクロの観察/観測**

どんな偉人も先達の努力・知恵・発見を利用している。

# ビオ-サバールの法則①



# ビオ-サバールの法則②

観測点における磁束密度Bには、次の法則があった。

- (1) 電流の大きさに比例した。  $\propto I$
- (2) 電流素の長さに比例した。  $\propto dl$
- (3) 観測点までの距離の2乗に反比例した。  $\propto r^{-2}$
- (4) 電流の方向と観測点との開き角度に関係があった。  $\propto \sin \theta$
- (5) 方向は電流素の接線から観測点の方向に外積を取った方向であった。  $\propto d\vec{l} \times \hat{r}$

実験式、経験式 empirical equation

# ビオ-サバールの法則③

## 【ベクトル形】

観測点における磁束密度ベクトル

まとめて電流素

電流 微小線素ベクトル

外積(電流を観測点に向かう方向とその直交方向に分離し、直交成分の方をとる)

電流素から観測点に向かう単位ベクトル

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

SI単位系で定義された定数 ( $\mu_0$ は真空の透磁率)

電流素から観測点までの距離

$$[\text{Wb/m}^2] = [\text{H/m}] \times [\text{A}\cdot\text{m}] \div [\text{m}^2]$$

# ビオ-サバールの法則④

## 【スカラー形】

観測点における磁束密度

まとめて電流素

電流 微小線素

電流と観測点の方向とのなす角度

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

SI単位系で定義された定数 ( $\mu_0$ は真空の透磁率)

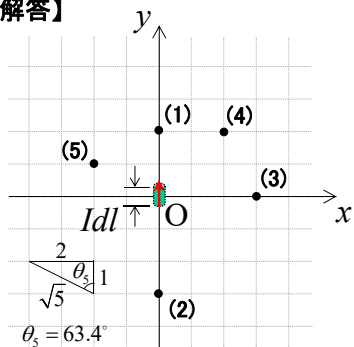
電流素から観測点までの距離

$$[\text{Wb/m}^2] = [\text{H/m}] \times [\text{A}\cdot\text{m}] \div [\text{m}^2]$$

# 微小電流が任意の点に作る磁場①

【問題】 xy平面上において、y軸上原点に微小長さ $\Delta l$  [m]の電流 I [A]がy軸正方向に流れている。次の各点の磁束密度を求めよ。(1) (x, y)=(0, 2), (2) (x, y)=(0, -3), (3) (x, y)=(3, 0), (4) (x, y)=(2, 2), (5) (x, y)=(-2, 1) (演習書 例題6.5改)

## 【解答】



- (1)  $dB_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin 0^\circ}{2^2} = 0$
- (2)  $dB_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin 180^\circ}{3^2} = 0$
- (3)  $dB_3 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin 90^\circ}{3^2} = \frac{\mu_0 Idl}{36\pi}$
- (4)  $dB_4 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin 45^\circ}{(2\sqrt{2})^2} = \frac{\mu_0 Idl}{32\sqrt{2}\pi}$
- (5)  $dB_5 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta_3}{\sqrt{5}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \frac{2}{\sqrt{5}}}{5} = \frac{\mu_0 Idl}{10\sqrt{5}\pi}$

答え (1) 0 (2) 0 (3)  $\frac{\mu_0 I \Delta l}{36\pi}$  (4)  $\frac{\mu_0 I \Delta l}{32\sqrt{2}\pi}$  (5)  $\frac{\mu_0 I \Delta l}{10\sqrt{5}\pi}$

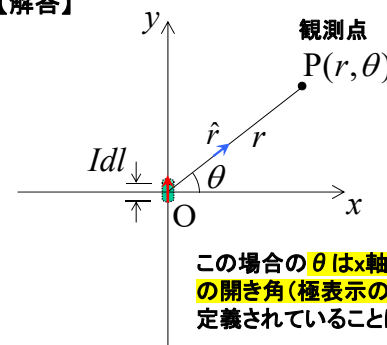
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2}$$

$\theta$  は  $d\vec{l}$  と  $\hat{r}$  のなす角

# 微小電流が任意の点に作る磁場②

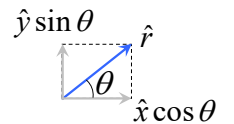
【例題】 微小長さ $\Delta l$  [m]に電流 I [A]が流れている。点P(r,  $\theta$ )の磁束密度を求めよ。(演習書 例題6.5)

## 【解答】



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\begin{cases} \hat{r} = \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \\ d\vec{l} = dl \hat{y} \end{cases}$$



単位ベクトルの成分分解

$$d\vec{l} \times \hat{r} = dl \hat{y} \times (\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) = dl \cos \theta (-\hat{z})$$

$$\text{又は、} d\vec{l} \times \hat{r} = dl \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) (-\hat{z}) = dl \cos \theta (-\hat{z})$$

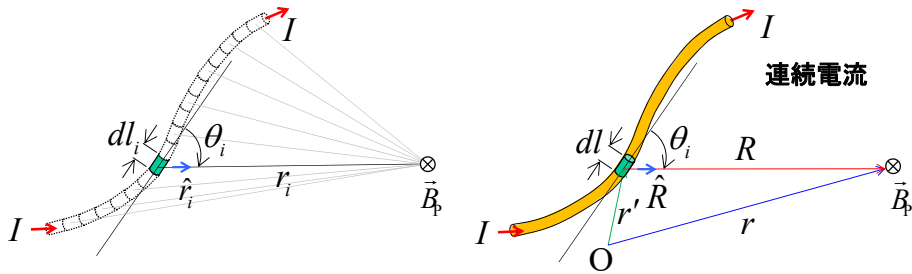
答え  $d\vec{B} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2} \cos \theta (-\hat{z})$

# 磁場の重ね合わせの原理

【ベクトル形】

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\sum_i d\vec{B}_i = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l}_i \times \hat{r}_i}{r_i^2} \quad \int_C d\vec{B} = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{R}}{R^2}$$

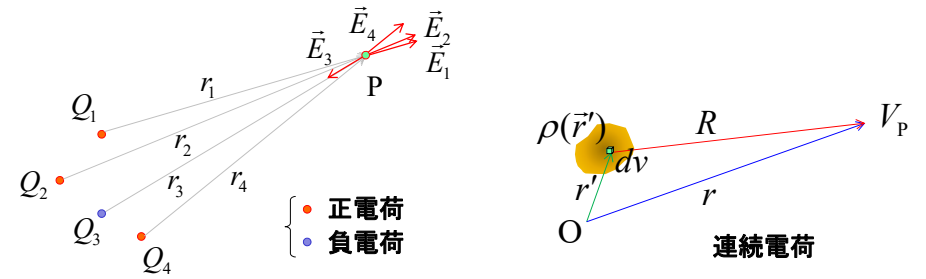


# 電界の重ね合わせの原理

【ベクトル形】

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r^2} \hat{r}$$

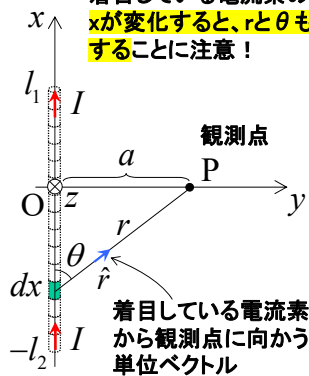
$$\sum_i d\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{r_i^2} \hat{r}_i \quad \int_V d\vec{E} = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dv}{R^2} \hat{R}$$



# ビオ-サバルの法則の例題1

【問題】 x軸上を流れる有限長直線電流 I (-l2 ≤ x ≤ l1) が、y軸上で a 離れた位置にある観測点 P に作る磁束密度の大きさを求めよ。(教科書 p.84)

【解答】 着目している電流素の座標 x が変化すると、r と θ も変化することに注意！



解法1(オーソドックスな方法) 変数をすべて x のみの関数に書き換える。

$$\begin{cases} \sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \\ r = \sqrt{a^2 + x^2} \end{cases}$$

$$dB_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

これを x = -l2 から φ = +l1 で積分する。即ち、  
 $B_p = \int_{-l_2}^{l_1} dB_p = \int_{-l_2}^{l_1} \frac{\mu_0 I a}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} dx$

ここで、次の積分公式を使う。

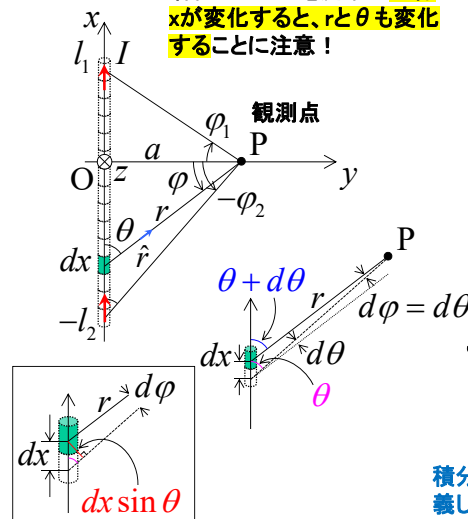
$$\int \frac{1}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C$$

答え  $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left( \frac{l_1}{a^2 \sqrt{a^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{a^2 \sqrt{a^2 + l_2^2}} \right) \hat{z}$

# ビオ-サバルの法則の例題1

【問題】 観測点 P における磁束密度の大きさを求めよ。(教科書 p.84)

【別解】 着目している電流素の座標 x が変化すると、r と θ も変化することに注意！



解法2(教科書の解法) 変数をすべて φ のみの関数に書き換える。

$$\begin{cases} r \cos \varphi = a \rightarrow r = \frac{a}{\cos \varphi} \\ dx \sin \theta = r d\varphi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} dB_p &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r d\varphi}{r^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\varphi}{r} = \frac{\mu_0 I \cos \varphi}{4\pi a} d\varphi \end{aligned}$$

これを φ = -φ2 から φ = +φ1 で積分する。即ち、

$$B_p = \int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} dB_p = \int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\mu_0 I \cos \varphi}{4\pi a} d\varphi$$

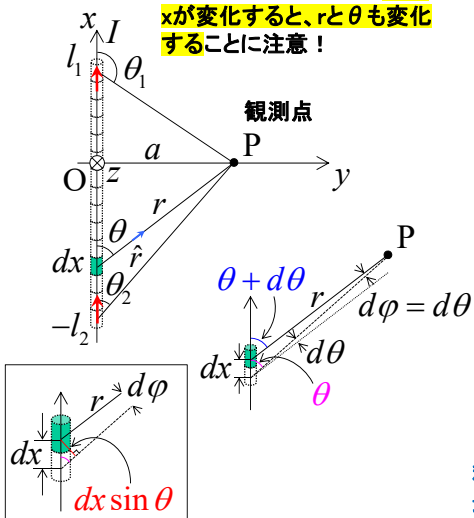
積分公式は不要になるが、φ (ファイ) を新たに定義し、最終的に置き換えを元に戻す必要がある。

# ビオ-サバールの法則の例題1” <sup>13</sup>

【問題】観測点Pにおける磁束密度の大きさを求めよ。(教科書 p.84)

【別解】

着目している電流素の座標  $x$  が変化すると、 $r$  と  $\theta$  も変化することに注意！



解法3

変数をすべて  $\theta$  のみの関数に書き換える。

$$\begin{cases} r \sin \theta = a \longrightarrow r = \frac{a}{\sin \theta} \\ dx \sin \theta = r d\theta \end{cases}$$

$$dB_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r d\theta}{r^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{r} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{a} d\theta$$

これを  $\theta = \theta_2$  から  $\theta = \theta_1$  で積分する。即ち、

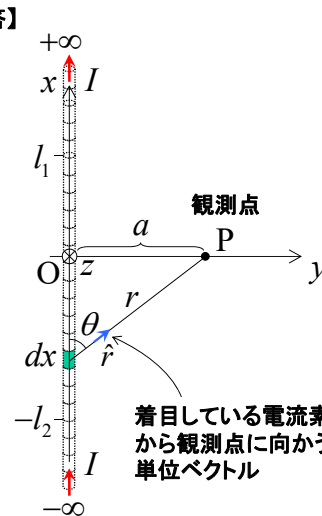
$$B_p = \int_{\theta_2}^{\theta_1} dB_p = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin \theta}{a} d\theta$$

積分公式は不要になるが、 $\theta$  を新たに定義し、最終的に置き換えを元に戻す必要がある。

# 無限長直線電流が作る磁場 <sup>14</sup>

【問題】x軸上を流れる無限長直線電流がy軸上で a 離れた位置にある観測点Pに作る磁束密度ベクトルを求めよ。(教科書 p.85)

【解答】



$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left( \frac{l_1}{a^2 \sqrt{a^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{a^2 \sqrt{a^2 + l_2^2}} \right) \hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( \frac{l_1}{\sqrt{a^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{a^2 + l_2^2}} \right) \hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( \frac{1}{\sqrt{(a/l_1)^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(a/l_2)^2 + 1}} \right) \hat{z}$$

分子・分母ともに  $\infty$  になる場合は、分子・分母とも同じ  $l_1, l_2$  で割る。  $l_1, l_2 \rightarrow \infty$  の極限を取ると

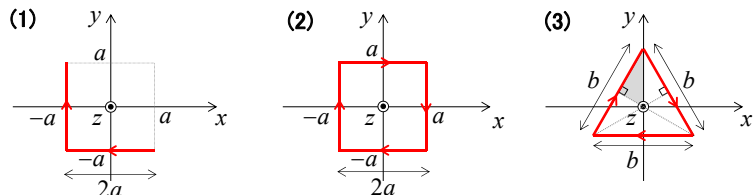
$$\lim_{l_1, l_2 \rightarrow \infty} \vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \frac{1}{2} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{z}$$

答え  $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{z}$

# 有限長直線電流が作る磁場 <sup>15</sup>

【演習】xy平面上に図のようなループ電流がある。原点における磁束密度ベクトルを求めよ。(教科書 章末6.7)

【解答】



有限長電流1本が、原点から垂直距離 a 離れた位置に作る磁場の式において、 $l_1 \rightarrow a, l_2 \rightarrow a$  で置き換える。

$$\begin{aligned} \vec{B}_p &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( \frac{l_1}{\sqrt{a^2 + l_1^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{a^2 + l_2^2}} \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( \frac{1}{\sqrt{(a/l_1)^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(a/l_2)^2 + 1}} \right) \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right) (-\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi a} (-\hat{z}) \end{aligned}$$

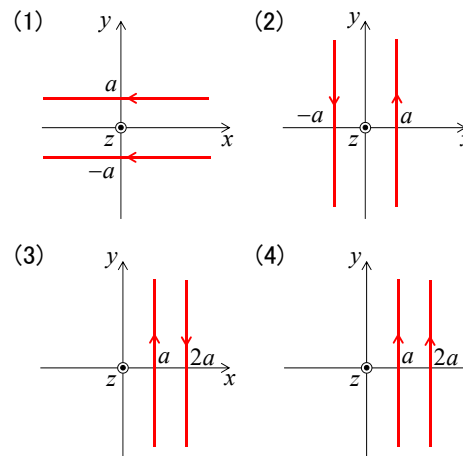
残りは対称性を考慮して重ね合わせる。(1)の場合なら1本あたりの電流が作る磁場は2本あるので2倍すればよい。

答え (1)  $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{2}\pi a} (-\hat{z})$  (2)  $\vec{B}_p = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a} (-\hat{z})$  (3)  $\vec{B}_p = \frac{9\mu_0 I}{2\pi b} (-\hat{z})$

# 無限長直線電流が作る磁場 <sup>16</sup>

【問題】無限長直線電流が図のように流れているとき、原点に作られる磁束密度ベクトルを求めよ。

【解答】



有限長電流1本が原点から垂直距離 a 離れた位置に作る磁場は

$$\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{z}$$

あとは方向に注意して重ね合わせ。

答え (1)  $\vec{B}_p = 0$  (2)  $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{\pi a} \hat{z}$

(3)  $\vec{B}_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{z}$  (4)  $\vec{B}_p = \frac{3\mu_0 I}{4\pi a} \hat{z}$

# 磁束の計算

【演習】z軸上を流れる無限長直線電流がある。r=a から r=2a および z=0 から z=a で囲まれた部分を貫く磁束を求めよ。(教科書 章末6.3)

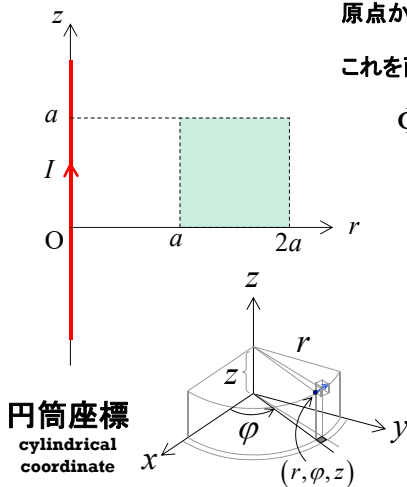
【解答】

z軸上を流れる有限長電流がr軸上で原点から離れた位置に作る磁場は

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

これを面S上で総和する。

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} && \text{磁束の定義 (磁場の流束)} \\ &= \int_S B \hat{\phi} \cdot ds \hat{\phi} \\ &= \int_S B ds = \int_S B dr dz \\ &= \int_{z=0}^a \int_{r=a}^{2a} B dr dz \end{aligned}$$



答え  $\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln 2$

# ビオ-サバルの法則の例題2

【例題】半径 a の円形ループがxy平面上にある。y軸上で原点から a 離れた位置にある観測点P(ループ中心)に作られる磁束密度を求めよ。(教科書 例題6.1)

【解答】

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

着目している電流素の位置が変わっても  $\theta$  と r は常に一定になる。すなわち

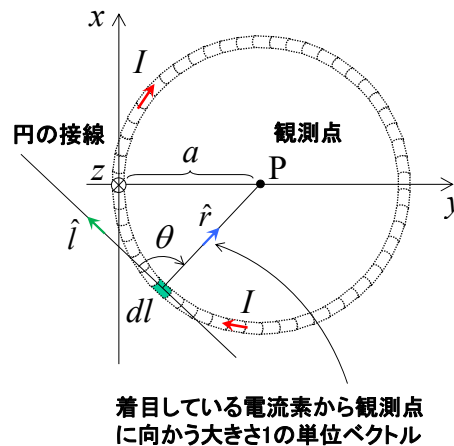
$$\begin{cases} \theta = 90^\circ & \text{const.} \\ r = a & \text{const.} \end{cases}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{a^2} \hat{z}$$

これを円周C上で総和して

$$\vec{B}_P = \oint_C d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \int_{l=0}^{2\pi a} dl \hat{z}$$

$$\therefore \vec{B}_P = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2a} \quad \text{答え}$$

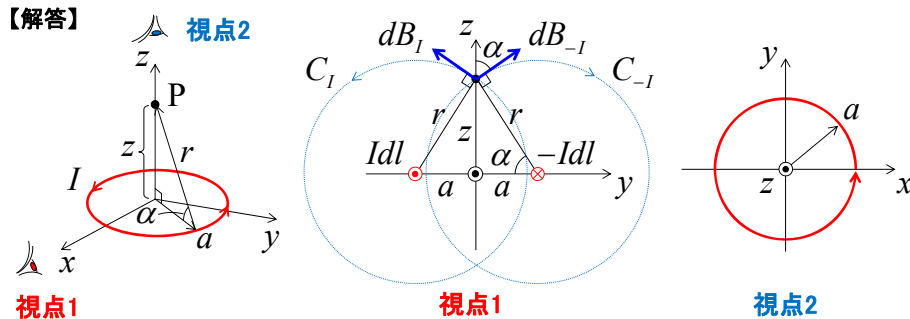


着目している電流素から観測点に向かう大きさ1の単位ベクトル

# ループ電流が作る磁場

【例題】半径 a の円形ループがxy平面上にある。z軸上の任意の位置における磁束密度ベクトルを求めよ。(教科書 pp.85-86)

【解答】



P点には逆円錐状の磁束密度ベクトルが発生するが、磁束密度のy方向成分は打ち消され、z方向成分のみが積算される。

$$\begin{cases} dB = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2} \\ dB_z = dB \cos \alpha = dB \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 Idl a}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 Idl a}{4\pi r^3} \end{cases}$$

答え  $\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3} \hat{z} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$

# ループ電流が作る磁場

【演習】xy平面上に図のような円形がある。z=0 における磁束密度ベクトルを求めよ。ただし電流の大きさは I とする。(教科書 章末6.6, 6.8)

【解答】

(演習6.8と同じ)

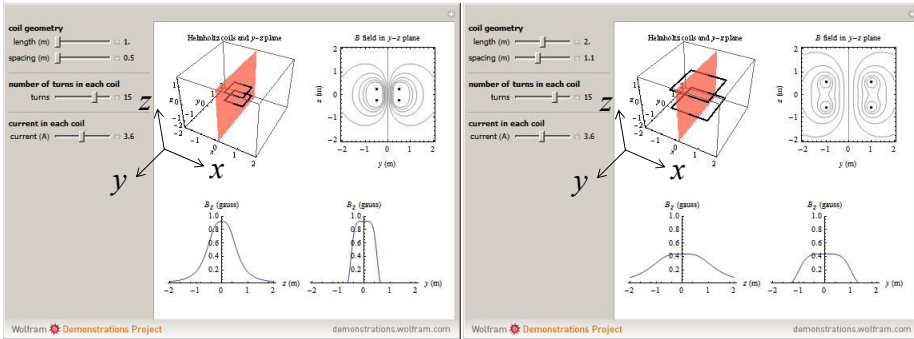


# ヘルムホルツコイルの磁場1

【演習】共通の中心軸をもつ半径  $a$  [m] の二つの円形コイルが  $d$  [m] の間隔で平行に置かれている。  $d=a$  で同じ方向に電流  $I$  [A] を流したとき、中心軸上の二つのコイルの中心付近では磁界がほぼ一様になる。このコイルをヘルムホルツコイルという。半径  $a$  [m] のヘルムホルツコイルに  $I$  [A] の電流を流したとき、コイルの中心および中心軸上の中心の磁束密度を求め、磁束密度分布を図示せよ。

(演習書 基礎6.6)

【解答】



<https://demonstrations.wolfram.com/SquareHelmholtzCoils/>

# 演習問題

- ◇ 表面電荷密度  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] で一様に帯電した半径  $a$  [m] の導体球が軸のまわりに角速度  $\omega$  [rad/s] で回転している。球の中心の磁束密度を求めよ。<sup>\*8</sup>
- ♡ 有限長ソレノイドに電流  $I$  [A] が流れているとき、中心軸上の磁界の磁束密度を求めよ。ただし、ソレノイドの断面は円形で、その半径を  $a$  [m]、ソレノイドの長さを  $l$  [m]、単位長さあたりの巻数を  $n$  [回/m] とする。<sup>\*9</sup>

凡例

- ♣ 教科書例題
- ◇ 教科書章末問題
- ♡ 演習書問題・例題
- ♣ 調査問題

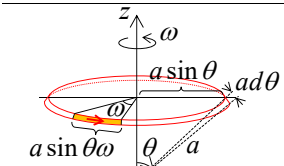
\*8 答え:  $\frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega a$

\*9 答え:  $\frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{d+1/2}{\sqrt{(d+1/2)^2+a^2}} - \frac{d-1/2}{\sqrt{(d-1/2)^2+a^2}} \right)$  [T]

# 回転帯電球中心の磁場

【演習】  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] で帯電した回転球殻の中心磁場を求めよ。(教科書 章末6.14)

$dI = \sigma a^2 \sin\theta \omega d\theta$  [C/s] 微小ループ電流  
ビオサバルの法則より



$$dB_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$$

ただし、 $a$  はループ半径、 $r$  はループから観測点までの距離なので次の置き換えをする。

$$I \rightarrow \sigma a^2 \sin\theta \omega d\theta, a \rightarrow a \sin\theta, r \rightarrow a$$

$$B_z = \int_0^\pi dB = \int_0^\pi \mu_0 \sigma a^2 \sin\theta \omega d\theta a^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega a \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

球表面電流全体が中心に作る磁場は

$$B_z = \int_0^\pi dB = \int_0^\pi \mu_0 \sigma a^2 \sin\theta \omega d\theta a^2 \sin^2\theta = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega a \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

3倍角の公式

$$\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta$$

$$= (2 \sin\theta \cos\theta) \cos\theta + (1 - 2 \sin^2\theta) \sin\theta$$

$$= 2 \sin\theta \cos^2\theta + \sin\theta - 2 \sin^3\theta$$

$$= 2 \sin\theta (1 - \sin^2\theta) + \sin\theta - 2 \sin^3\theta$$

$$= 2 \sin\theta - 2 \sin^3\theta + \sin\theta - 2 \sin^3\theta$$

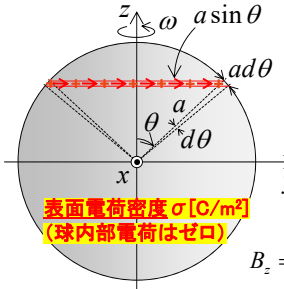
$$= 3 \sin\theta - 4 \sin^3\theta$$

$$= 3 \sin\theta - 4 \sin^3\theta$$

従って、回転帯電球中心の磁場は

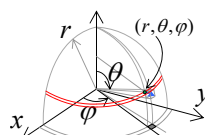
$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega a \frac{1}{4} \left[ -3 \cos\theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega a \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega a$$

1秒間に塗りつぶし部分にある電荷  $Q = a \sin\theta \omega (a d\theta) \sigma$  [C] が移動する。  
⇒ 電流 [A] = [C/s] が矢印方向に流れる。



表面電荷密度  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>]  
(球内部電荷はゼロ)

球座標

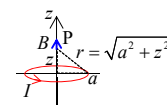


# 有限長ソレノイドの磁場

【演習】有限長ソレノイドに電流  $I$  [A] が流れているとき、中心軸上の磁界の磁束密度を求めよ。ただし、ソレノイドの断面は円形で、その半径を  $a$  [m]、ソレノイドの長さを  $l$  [m]、単位長さあたりの巻数を  $n$  [回/m] とする。(演習書 応用6.7)

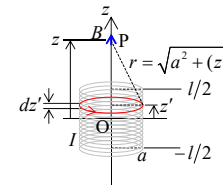
【解答】

ビオサバルの法則より、 $z$  軸上の原点におかれたループ電流が作る磁場は



$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$$

これが下図のように積層された場合を考える。着目している区間  $dz'$  におけるループ電流が P 点に作る磁場は



$$dB_z = \frac{\mu_0 I a^2 ndz'}{2r^3}$$

$z$  は観測点までの任意の座標なので、定数  $d$  で置き換えて考えてもよい。

積分区間は  $z' = -l/2$  から  $+l/2$  であるが、観測点 P 点の座標を表す  $z$  ではなく、着目しているループ電流の座標  $z'$  について積分を行う。

$$B_z = \int_{z'=-l/2}^{z'+l/2} \frac{\mu_0 I a^2 ndz'}{2r^3}$$

$$= \int_{z'=-l/2}^{z'+l/2} \frac{\mu_0 I a^2 ndz'}{2 \{a^2 + (z-z')^2\}^{3/2}}$$

よく使う積分公式

$$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}} + C$$

$$B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2+a^2}} - \frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2+a^2}} \right) [T]$$

類似問題 [https://www.kusamab.org/lecture/em1/B2\\_charge\\_distribution\\_slide.pdf](https://www.kusamab.org/lecture/em1/B2_charge_distribution_slide.pdf)