

1. 積分路の中に電流がある場合

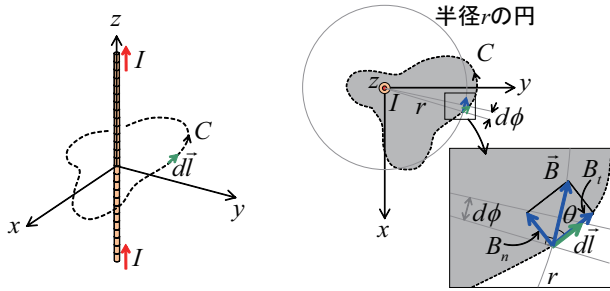


図1 z軸上の無限長電流 I を含む任意の閉曲線 C (左) と閉曲線 C を真上から見た様子 (右)。因果の順は I (愛) から B (慈)。

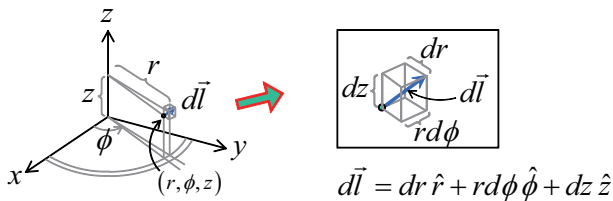


図2 円筒座標  $r, \phi, z$  上で考えた微小線素ベクトル  $d\vec{l}$  (中央)

図1左に示すように  $z$  軸上を流れる無限長電流  $I$  を含む閉曲線  $C$  を考える。ビオサバルの法則より電流周囲に発生する磁束密度  $\vec{B}$  と閉曲線  $C$  を構成する微小線素ベクトル  $d\vec{l}$  を図2のような円筒座標<sup>\*1</sup>  $r, \phi, z$  で表すと次式となる。

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (1)$$

ここで、閉曲線  $C$  上で  $\vec{B}$  と  $d\vec{l}$  の内積を1周分総和してみる<sup>\*2</sup>。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot (dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\phi \quad (2)$$

式(2)の最後に出てきた積分は、図1右に示すように積分路  $C$  を真上から見たとき、 $d\phi$  を1周総和することと同じなので

$$\oint_C d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi \quad (3)$$

となるから次式が得られる。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \quad (4)$$

2. 積分路の外に電流がある場合

次に、図3左のように積分路  $C$  が電流  $I$  を含まない場合を考える。電流周囲に発生する磁束密度  $\vec{B}$  と閉曲線  $C$  を構成する微小線素ベクトル  $d\vec{l}$  は式(1)と同じであり、式(2)と全く同じように閉曲線  $C$  上で  $\vec{B}$  と  $d\vec{l}$  の内積を取って1周分総和してみる。式(2)と同じように式(5)の積分が現れるが、今度の場合は図3中央に示すように積分路  $C$  を真上から見たとき、 $d\phi$  を  $\phi_1 \rightarrow \phi_2 \rightarrow \phi_1$  で総和することと同じなので、

$$\oint_C d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_1} d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi - \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = 0 \quad (5)$$

となるから次式が得られる。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (6)$$

電流を積分路  $C$  の内部に含む場合の式(4)と含まない場合の式(6)より、図4のような積分路  $C$  の内側であって互いに方向が異なる2本

の電流  $I_1, I_2$  と、積分路の外にある1本の電流  $I_3$  について考えると

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_1 - I_2) \quad (7)$$

となる<sup>\*3</sup>。以上の内容をまとめて記述すると次式が得られる。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i \quad (i \text{ は積分路に含まれる電流の数}) \quad (8)$$

これをアンペアの法則 (Ampere's law) と呼ぶ。磁場が定常で時間的に変化しない静磁気問題に関して、アンペアの法則とビオ-サバルの法則は同じである<sup>\*4</sup>。別の言い方をすると、ビオ-サバルの法則を一般化したものがアンペアの法則である。図5に数式の意味を示す。

3. アンペアの法則の適用例と適用手順

アンペアの法則を解析的に適用できるのは、無限長直線電流、無限長円柱電流、平行2線、同軸線路、無限平板電流、環状ソレノイド(無端ソレノイド)、無限長ソレノイドである。適用手順には次のパターンがある。【手順1】右ネジの法則から磁場  $\vec{B}$  のパターンを想像する<sup>\*5</sup>。【手順2】磁場  $\vec{B}$  に沿って積分路  $C$  を決める。【手順3】積分路  $C$  上で  $B$  が一定である性質を利用して積分方程式を解く。

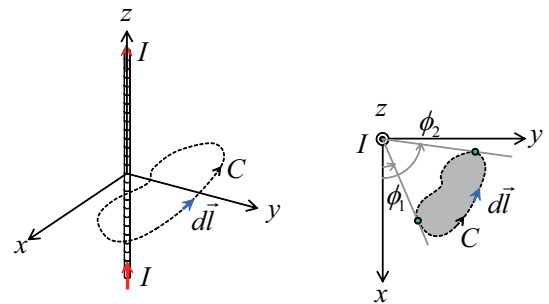


図3 z軸上の無限長電流 I を含まない任意の閉曲線 C (左) と閉曲線 C を真上から見た様子 (中央)。円筒座標  $(r, \phi, z)$  上で考えた微小線素ベクトル  $d\vec{l}$  (右)。

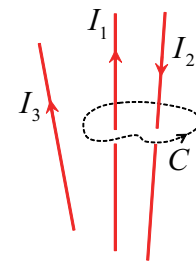


図4 積分路  $C$  に囲まれた2本の電流 (方向が異なる) と積分路の外にある1本の電流

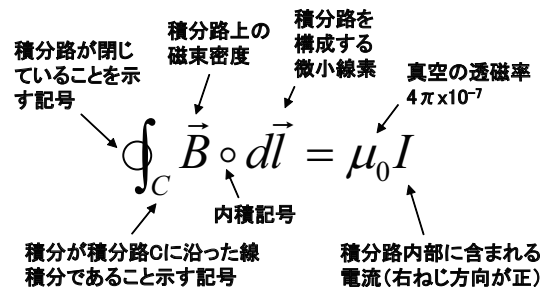


図5 アンペアの法則

\*1 3次元空間座標は3つの直交した基本ベクトルがあれば表現できる。最もよく使う座標  $(x, y, z)$  はデカルト座標または直角座標と呼ばれる。他にも球座標  $r, \theta, \phi$  で表現することもある。例えば3次元空間にある点電荷どうしに働く力を表すクーロンの法則は球座標で表されている。どの座標系を用いても結果は同じであるが、着目しているベクトル場 ( $\vec{E}$  or  $\vec{B}$ ) の方向と座標系の単位ベクトルのどれか1成分が一致したとき、数式の扱いが最も簡単になる。従って状況に応じて座標系を使い分けている。

\*2  $\oint_C$  は積分路  $C$  が閉じたループになっていることを強調する記号である。

\*3 電流が逆向きの場合、 $\vec{B}$  の方向が逆向きになるため  $I_2$  には  $-$  がつく。

\*4 静電気問題において、クーロンの法則を等価なガウスの法則で表現したように、電流が周囲に作る磁場を求めるとき、アンペアの法則を使うと計算が極めて楽になるメリットがある。例えば、式(1)を導出するのにビオ-サバルの法則ではかなり面倒な計算をしたが、アンペアの法則を使えばたったの3行の計算で済む(このことは演習問題で明らかになる)。

\*5  $\vec{B}$  のパターンについては電流  $I$  が作るベクトル場のイメージを参照。