

アンペアの法則

1st. 2011/04/11
Lst. 2023/11/15

電磁気学の偉人マップ

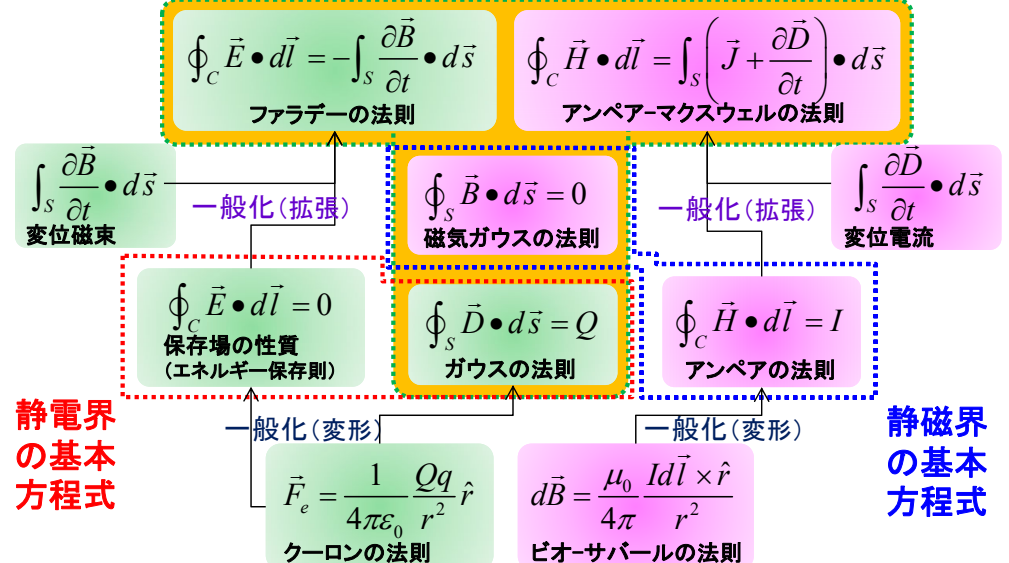
$c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] ミリカン 1868-1953 (85)
 光速 ヘルツ 1857-1894 (37)
 $e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ [C] アスラ 1856-1943 (87)
 素電荷 トムソン 1856-1940 (84)
 ローレンツ 1853-1928 (75)
 フレミング 1849-1945 (96)
 マクスウェル 1831-1879 (48)
 キルヒホッフ 1824-1887 (63)
 レンツ 1804-1865 (61)
 ヘンリー 1797-1878 (81)
 ファラデー 1791-1867 (76)
 サバル 1791-1841 (50)
 オーム 1789-1854 (65)
 ガウス 1777-1855 (78)
 エルステッド 1777-1851 (74)
 アンペール 1775-1836 (61)
 ビオ 1774-1862 (88)
 ボルタ 1745-1827 (82)
 クーロン 1736-1806 (70)
 キャベンディッシュ 1731-1810 (79)
 平賀源内 1728-1780 (52)
 フランクリン 1706-1790 (84)
 デュ・フェ 1698-1739 (41)
 ギルバート 1544-1603 (59)

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$ アンペア-マクスウェルの法則
 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$ ファラデーの法則
 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ ガウスの法則
 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ 磁気ガウスの法則
 $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$ ビオ-サバルの法則
 $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$ フレミング左手則
 $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ フレミング右手則
 $\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$ ローレンツ力
 $R = \rho \frac{l}{S}$
 $C = \frac{Q}{V}$
 $L = \frac{\phi}{I}$
 $E = IR$ オームの法則
 $\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$ クーロンの法則

マクロの観察/観測
ミクロの観察/観測
どんな偉人も先達の努力・知恵・発見を利用している。

電磁気学法則間の上位互換性

電磁界の基本方程式(マクスウェルの方程式)最上位版



※ 上位の法則に行くほど、より一般化されて抽象的になるため難しくなるが、様々な応用ができるようになる。逆に、下位の法則ほど具体的で簡単だが、そのままでは応用されにくい。

実用的な応用例

ガウスの法則より
 If Q [C] is charged in the inner conductor, in the case of $a < r < b$
 $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{\epsilon_0}$
 $\Rightarrow \oint_S E dr = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E \oint_S dr = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon_0}$
 $\therefore E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} \dots (1)$
 Then the potential difference V is,
 $V = - \int_a^b E dr = - \int_a^b \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} dr = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} [\ln r]_a^b = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l} (\ln b - \ln a)$
 $\therefore Q = \frac{2\pi\epsilon_0 l V}{\ln \frac{b}{a}} \dots (2)$
 Substitute (2) to (1) produces
 $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r l} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r l} \frac{2\pi\epsilon_0 l V}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{V}{r \ln \frac{b}{a}}$
 In the case of $r < a$ and $b < r$
 $E = 0$
 From equation (2)
 $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}$ [F]
電磁気 I のメインテーム

アンペアの法則より
 (i) In the case of $r < a$
 From equation (3)
 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H dl = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I$
 $\Rightarrow H 2\pi r = \frac{r^2}{a^2} I$
 $\therefore H_1 = \frac{I r}{2\pi a^2}$
 $L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 I \ln \frac{b}{a}}{2\pi I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ [H] **電磁気 II のメインテーム**
 (ii) In the case of $a < r < b$
 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H dl = I$
 $\Rightarrow H 2\pi r = I$
 $\therefore H_2 = \frac{I}{2\pi r} \dots (3)$
 (iii) In the case of $b < r < c$
 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H dl = I - \frac{\pi r^2 - \pi b^2}{\pi c^2 - \pi b^2} I$
 $\Rightarrow H 2\pi r = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} I$
 $\therefore H_3 = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$
 (iv) In the case of $r > c$
 $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint_C H dl = I - I = 0$
 $\Rightarrow H 2\pi r = 0$
 $\therefore H_4 = 0$

特性インピーダンス
 $Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}}{\frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln \frac{b}{a}}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}}$
 $\therefore Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}}$ **電磁波の導入テーム**

アンペアの法則

【ベクトル形】

積分路が閉じていることを示す記号

積分路上の磁束密度

積分路を構成する微小線素 (方向は経路Cの方向)

真空の透磁率 $4\pi \times 10^{-7}$

内積記号

積分が経路Cに沿った線積分であることを示す記号

積分路内部に含まれる電流 (右ねじ方向が正)

$[\text{Wb/m}^2] \times [\text{m}] = [\text{H/m}] \times [\text{A}]$

【解説】 経路Cに沿って磁場Bを線積分(微小長さdlを掛けて総和)すると、積分路内部に含まれる電流Iを μ_0 倍した値に等しい。

アンペアの法則

【スカラー形】

積分路が閉じていることを示す記号

積分路上の磁束密度

積分路を構成する微小線素 (方向は経路Cの方向)

真空の透磁率 $4\pi \times 10^{-7}$

Bとdlのなす角度

積分が経路Cに沿った線積分であることを示す記号

積分路内部に含まれる電流 (右ねじ方向が正)

$[\text{Wb/m}^2] \times [\text{m}] = [\text{H/m}] \times [\text{A}]$

【解説】 経路Cに沿って磁場Bを線積分(微小長さdlを掛けて総和)すると、積分路内部に含まれる電流Iを μ_0 倍した値に等しい。

ベクトルの線積分

循環という物理量

線素dlに平行でCの方向を示す

線路Cが閉じていることを示す記号

線路 Contour

線路C上にあるベクトル量

内積記号

微小線素

サーカスリング

微小線素dl リングを構成する線分1つあたりの長さ

方向 右回り or 左回り どちらでもよい

全線路長 $C = \sum dl$

線素dlに平行でCの方向を示す

線路Cが開いていない(開いている)ことを示す記号

線路

線路C上にあるベクトル量

内積記号

微小線素

ミミズ

微小線素dl ミミズを構成する消化管1つあたりの長さ

方向 消化した土が排泄される方向 ミミズの進行方向 (逆向き)でもよい

全線路長 $C = \sum dl$

※ 計算結果の物理量は、ベクトルAの単位[OO]と長さ[m]との積になる。

ベクトルの線積分

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_C (A_t \hat{t} + A_n \hat{n}) \cdot d\vec{l} = \int_C A_t dl$$

$d\vec{l} = dl \hat{t}$ 積分路Cに対して常に接線方向を向いた微小長さベクトル

$\vec{A} = A_t \hat{t} + A_n \hat{n}$ 積分路C上のある点におけるベクトル(物理量)

A_t 積分路Cに対するベクトルAの接線成分

A_n 積分路Cに対するベクトルAの法線成分(垂直成分)

\hat{t} 積分路Cに対して接線方向を向いた単位ベクトル

\hat{n} 積分路Cに対して法線方向を向いた単位ベクトル

t : tangential
 接線の(接線成分)
 n : normal
 法線の(法線成分)

保存場の性質との類似性

別名: エネルギー保存の法則

位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)が運動エネルギー(電荷の加速)に変化するだけ

積分路が閉じていることを示す記号

電界

内積記号

積分路を構成する微小線素

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

仕事 { する仕事(発) / される仕事(受) }

積分が積分路Cに沿った線積分であることを示す記号

PE KE

[V/m] × [m] = [V]
[N/C] × [m] = [J/C]

積分路Cの内部に点電荷を含んでも含まなくても常に成立

真空中のガウスの法則

閉面S上の電界ベクトル

積分面を構成する外向き微小面積ベクトル

積分面Sが閉じていることを示す記号

閉面内に含まれる真電荷(分極電荷除く)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

表面積

内積記号

真空の誘電率 8.854×10^{-12}

[V/m] × [m²] = [C] ÷ [F/m]

ベクトルの面積分

流束という物理量

微小面積dsに垂直で外向きを示す

面Sが閉じていることを示す記号

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

表面積 Surface

内積記号

微小面積

面S上のベクトル量

ミラーボール

微小面積ds
ミラーボールを構成する鏡1枚の面積

※ 図では赤道上は大きく見えるが、実際は無限小の大きさ

全表面積S = Σ ds

微小面積dsに垂直で外向きを示す

面Sが閉じていない(開いている)ことを示す記号

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

表面積

内積記号

微小面積

面S上のベクトル量

風船と熱気球の違いでもよい

微小面積ds
パズルを構成するピース1枚の面積

※ 内側は表面ではなく裏面として考えるので、表面積Sに含まない

全表面積S = Σ ds

ウィキペディア フリー百科事典

※ 計算結果は、ベクトルFの単位[O]と面積[m²]との積になる

ベクトルの面積分

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \{ A_t \hat{t} + A_n \hat{n} \} \cdot ds \hat{n} = \int_S A_n ds$$

$d\vec{s} = ds \hat{n}$ 積分面Sに対して常に法線方向を向いた微小面積ベクトル

$\vec{A} = A_t \hat{t} + A_n \hat{n}$ 積分面S上のある点におけるベクトル(物理量)

A_t 積分面Sに対するベクトルAの接線成分

A_n 積分面Sに対するベクトルAの法線成分(垂直成分)

\hat{t} 積分面Sに対して接線方向を向いた単位ベクトル

\hat{n} 積分面Sに対して法線方向を向いた単位ベクトル

$d\vec{s} = ds \hat{n}$

$\vec{A} = A_t \hat{t} + A_n \hat{n}$

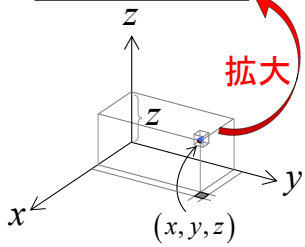
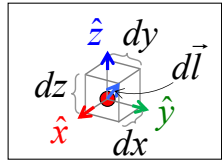
t : tangential
接線の(接線成分)

n : normal
法線の(法線成分)

主な直交座標系

$$\vec{dl} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

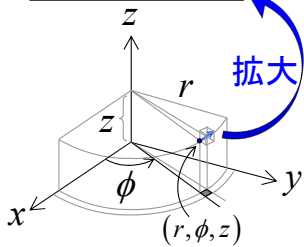
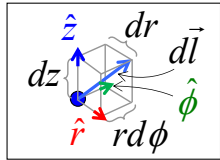
$$dv = dx dy dz$$



デカルト座標
Cartesian coordinate
または直角座標
rectangular coordinate

$$\vec{dl} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$$

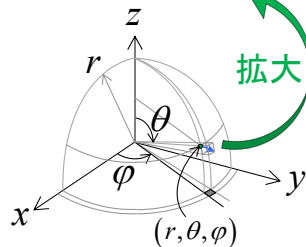
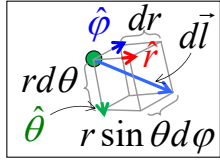
$$dv = r dr d\phi dz$$



円筒座標
cylindrical coordinate
アンペアの法則を適用する
際に最もよく使う座標系

$$\vec{dl} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

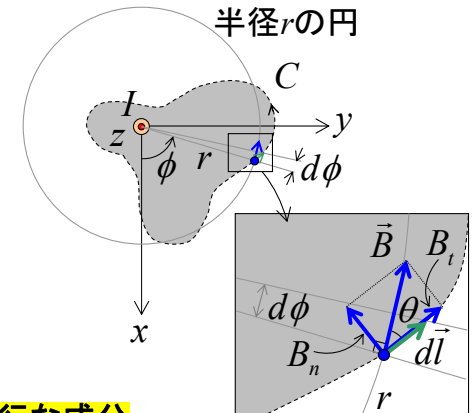
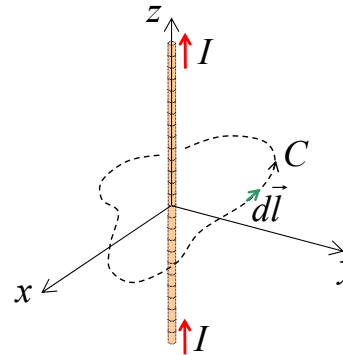
$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$



球座標
spherical coordinate
ガウスの法則を適用する
際に最もよく使う座標系

アンペアの法則の証明①

視点 積分路Cの内側に電流が含まれる場合

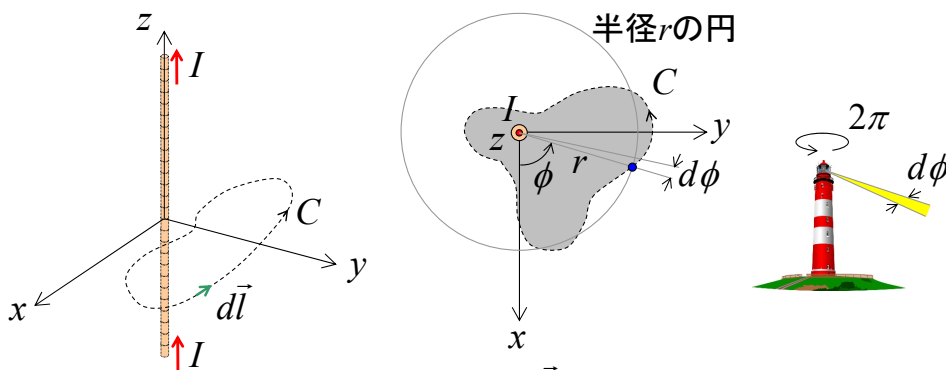


磁束密度Bを積分路Cに平行な成分 B_t と垂直な成分 B_n に分けて考える。

レジュメ
https://www.kusamalab.org/lecture/em2/A6_ampere.pdf

アンペアの法則の証明②

視点 積分路Cの内側に電流が含まれる場合



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot (dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\phi$$

ここで

$$\oint_C d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$$

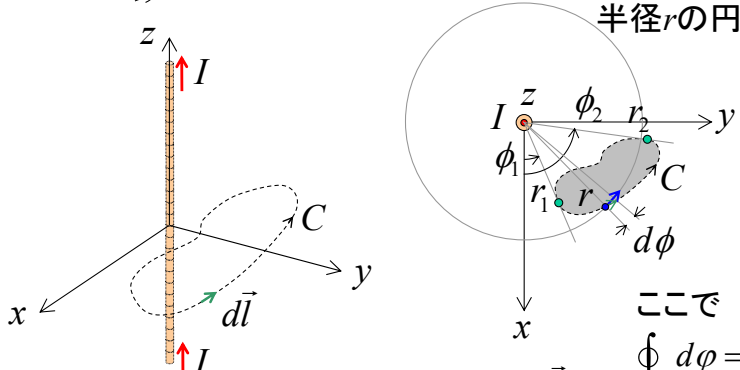
従って

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

レジュメ
https://www.kusamalab.org/lecture/em2/A6_ampere.pdf

アンペアの法則の証明③

視点 積分路Cの内側に電流が含まれない場合



$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} \cdot (dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z})$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C d\phi$$

ここで

$$\oint_C d\phi = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi + \int_{\phi_2}^{\phi_1} d\phi$$

$$= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi - \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi = 0$$

従って

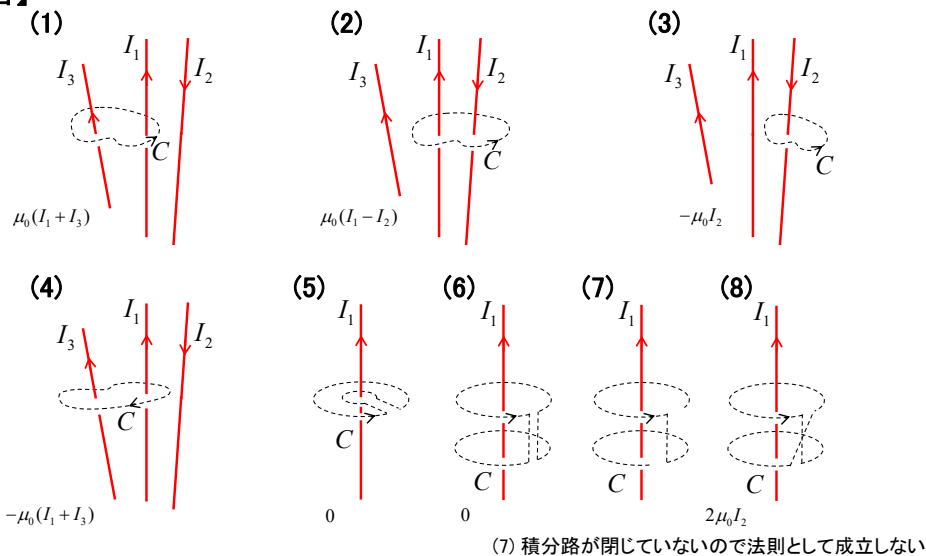
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

レジュメ
https://www.kusamalab.org/lecture/em2/A6_ampere.pdf

アンペアの法則の適用例

【演習】無限長の直線電流 I_1, I_2, I_3 が下図のように流れている。各積分路に対するアンペアの法則の右辺を求めよ。

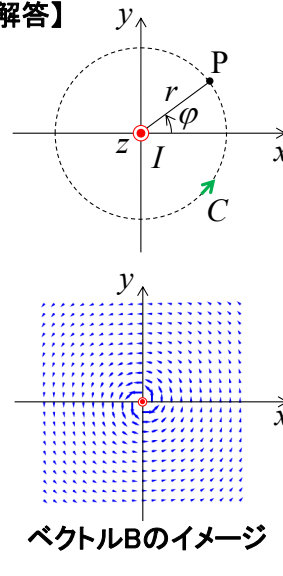
【解答】



無限長直線電流の断面磁場

【演習】z軸上に無限長直線電流 I が流れている。原点から距離 r の位置の磁場をアンペアの法則から求めよ。(教科書 p.89)

【解答】



- ① 積分路Cの形と方向を決める。

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$
 (磁場ベクトルに沿う形で)
- ② ベクトルをスカラーに直す。

$$\oint_C B dl \cos 0^\circ = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow \oint_C B dl = \mu_0 I$$
- ③ 未知数を積分の外に出す。

$$B \oint_C dl = \mu_0 I$$
- ④ 方程式を解く。

$$B 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
- ⑤ 方向を付ける。

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}$$

アンペアの法則の適用手順

1. 積分路内部に電流を含むように積分路Cを決める。積分路の方向は右ねじの方向を正とする。この際、磁力線を頭の中でイメージし、**磁力線に沿った形に積分路を取る。**
2. **ベクトル積分方程式をスカラー積分方程式に直して難易度を1つ下げる。**
3. 磁場が積分路上で一定となる(ように積分路を決定した)ことを利用して未知数を積分の外に出す。これで**積分を単なる積に置き換えて難易度をさらに1つ下げる。**
4. 方程式を解いて磁束密度Bを求める。
5. 磁束密度Bの方向と積分路Cの方向が一致するように積分路を決めたので、**積分路に沿った単位ベクトルを付けて磁束密度ベクトルにする。**

上位法則(通信と飛脚の例)

高すぎる通信費!? 飛脚の値段



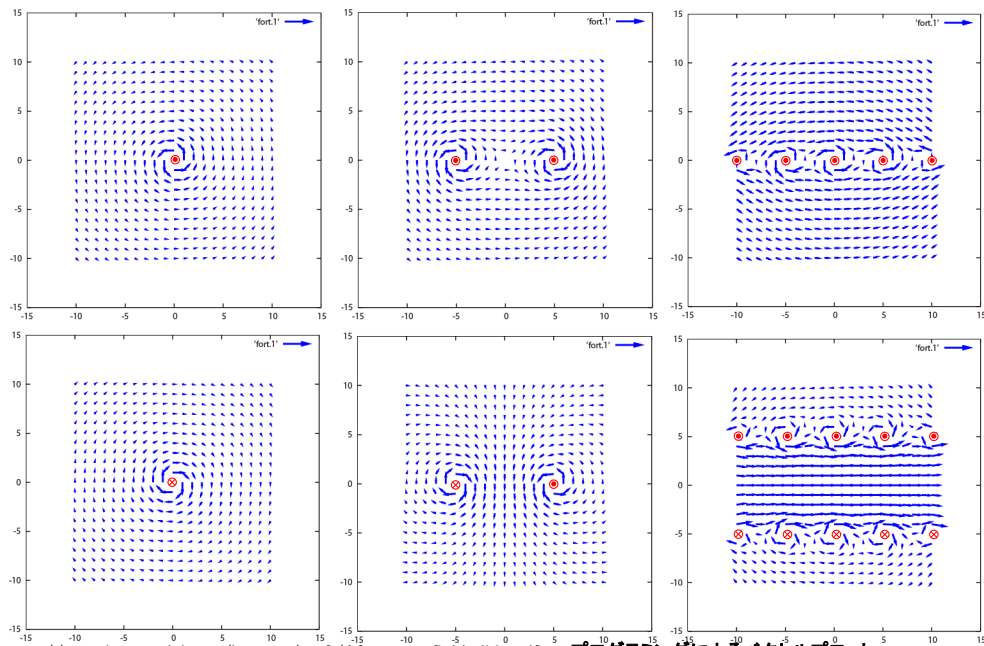
インターネットのない江戸時代は遠方に情報を伝える術は手紙しかありませんでした。その通信事業者はご存じ飛脚。では気になる値段かというと、庶民が利用した並便で江戸から大坂に書状1通送るのに銀3分、今のお金にして約300円かかったそうで、日数は10日から20日ほど要しました。ちなみに、三日半限という江戸大坂間を2日半で届ける便は7両2分、現在に換算すると40万円以上になります。現代に生まれて良かった!



上位法則を使いこなせるようになると、これまで面倒で時間がかかっていたことでも比較的短時間で簡単にできるようになる。ただし、便利になると当然デメリットも出てくる。例) 移動(徒歩→馬→車・電車・飛行機)、通信(のろし→飛脚→ウェブ・携帯)、その代わりに生活悪習慣病やCO₂問題。次の時代に使われる法則は何か?

ビオサバールの法則は、電流線素が観測点に作る磁場を重ね合わせるという点で、直感的で分かり易いが計算量が多い。これに対して、**アンペアの法則は積分方程式の形をしており、直感性にはやや欠けるが、少ない計算量で同じ問題を解ける。**人間の動物的な習性や心理的な法則もこれと似ているところがある。例えば、心拍や呼吸、歩行等から細胞分裂まで、何も意識しないでもやってくれているが、裏では極めて複雑な作業を半自動的にしてくれている。

直線電流が作る磁場のイメージ



https://www.kusamablab.org/lecture/em2/A2_vector_field_slide.pdf プログラミングによるベクトルプロット

磁場の重ね合わせの原理

【ベクトル形】

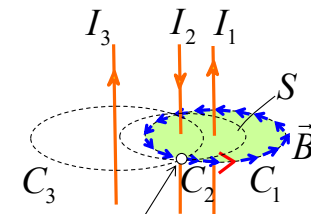
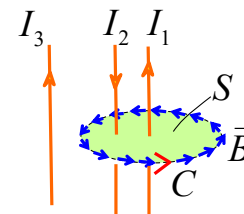
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

共通の積分路Cの場合

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_i I_i$$

個別の積分路C_iの場合

$$\sum_i \left(\oint_{C_i} \vec{B}_i \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_i \right)$$

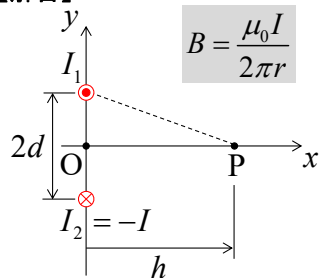


P 3つの円の交点

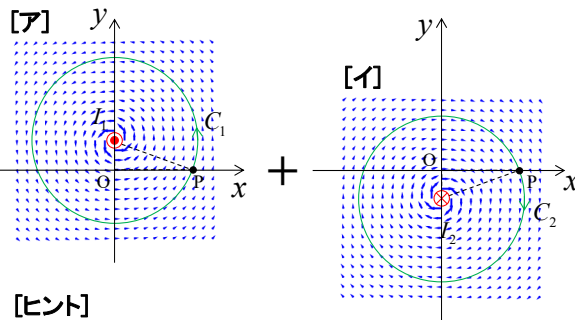
平行線路の断面磁場①

【演習】 間隔 2d [m]の無限に長い2本の平行導線に往復電流 I [A]が流れている。
O点および x 軸上で距離 h [m]離れたP点の磁束密度をアンペアの法則から求めよ。
(教科書 章末6.9)

【解答】

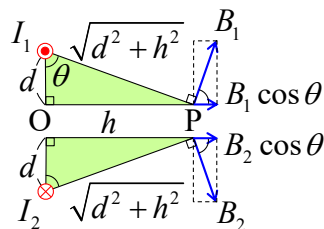


$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



【ヒント】
I₁が作る磁場とI₂が作る磁場を
O点又はP点で重ね合わせる。

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{d^2 + h^2}}$$

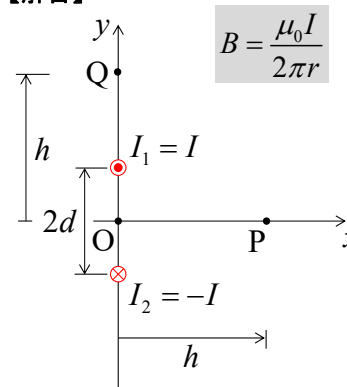


答え $\vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \hat{x}$, $\vec{B}_P = \frac{\mu_0 I d}{\pi(d^2 + h^2)} \hat{x}$

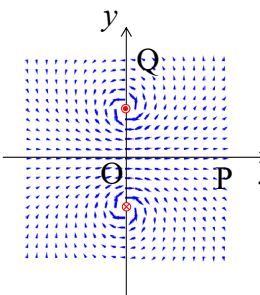
平行線路の断面磁場②

【演習】 間隔 2d [m]の無限に長い2本の平行導線に往復電流 I [A]が流れている。
y軸上で距離 h [m]離れた Q点の磁束密度をアンペアの法則から求めよ。
(教科書 章末6.9改)

【解答】



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



磁場イメージ

【ヒント】

$\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1$
ただし、C₁はI₁を中心とした半径 h-d の円

$\oint_{C_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_2$
ただし、C₂はI₂を中心とした半径 h+d の円

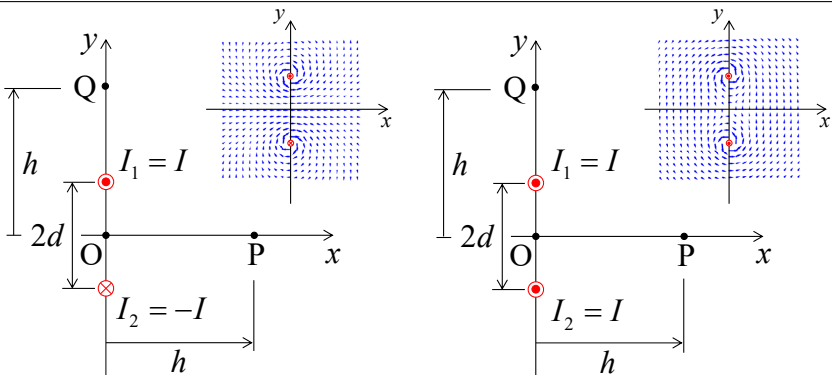
答え $\vec{B}_Q = \frac{\mu_0 I}{\pi} \frac{d}{h^2 - d^2} (-\hat{x})$

平行線路の断面磁場③

【演習】図に示すように間隔 $2d$ の無限に長い2本の平行線に電流 I が流れている。O点、P点および、Q点の磁束密度を求めよ。(教科書 章末6.9改)

【解答】

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



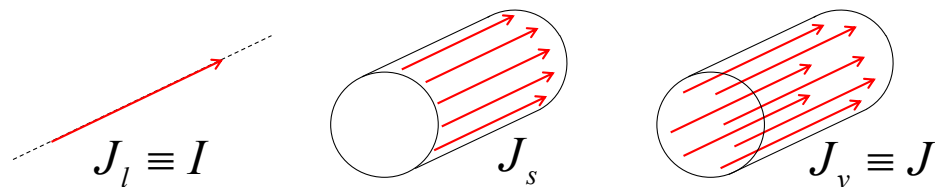
答え

$$\begin{cases} \vec{B}_O = \frac{\mu_0 I}{\pi d} \hat{x} \\ \vec{B}_P = \frac{\mu_0 I d}{\pi(d^2 + h^2)} \hat{x} \\ \vec{B}_Q = \frac{\mu_0 I d}{\pi(h^2 - d^2)} (-\hat{x}) \end{cases}$$

答え

$$\begin{cases} \vec{B}_O = 0 \\ \vec{B}_P = \frac{\mu_0 I h}{\pi(d^2 + h^2)} \hat{y} \\ \vec{B}_Q = \frac{\mu_0 I h}{\pi(h^2 - d^2)} (-\hat{x}) \end{cases}$$

電流と電流密度



(a) Line current 電流 I [A]
 (b) Surface current 面電流密度 J_s [A/m]
 (c) Volume current 電流密度 J [A/m²]

線電流には厚みがないのと同じように、面電流も厚みは考えない。

D. M. Pozar, Microwave Engineering, 3rd, p.9, Wiley.

無限長平板電流の磁場

【例題】図に示すように厚さが a [m] の無限平板導体中を電流が一様に電流密度 J [A/m²] で z 軸の正の方向に流れているとき、アンペアの法則を用いて磁束密度を求めよ。(教科書 例題6.2)

【解答】微小面積 $\Delta x \Delta y$ [m²] に流れる電流 $J \Delta x \Delta y$ [A] を原点に対して上下セットで考えると、P点における磁束密度 B は B_{upper} と B_{lower} の合成により常に y 方向のみに発生する。 y 方向に長さ l [m] あたりで考えると

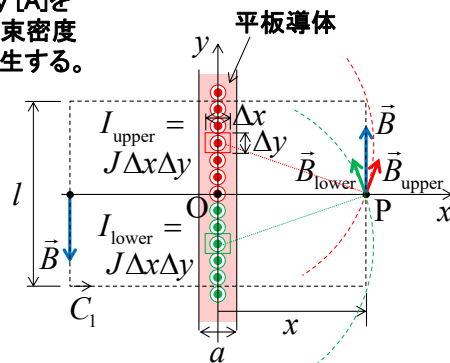
(1) $x > a/2$ のとき(平板導体外)

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 J a l$$

$$\Rightarrow B 2l = \mu_0 J a l$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 J a}{2}$$

縦幅 l で横幅 $2x$ の長方形の積分路 C_1 についてアンペアの法則を適用する。

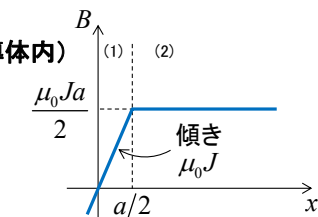


(2) $x < a/2$ のとき(導体内)

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 J 2xl$$

$$\Rightarrow B 2l = \mu_0 J 2xl$$

$$\therefore B = \mu_0 J x$$



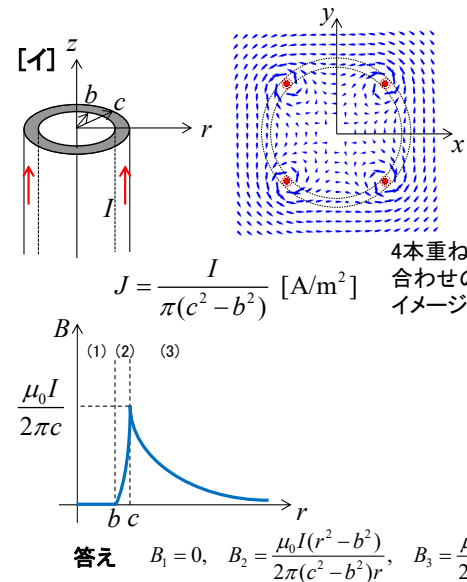
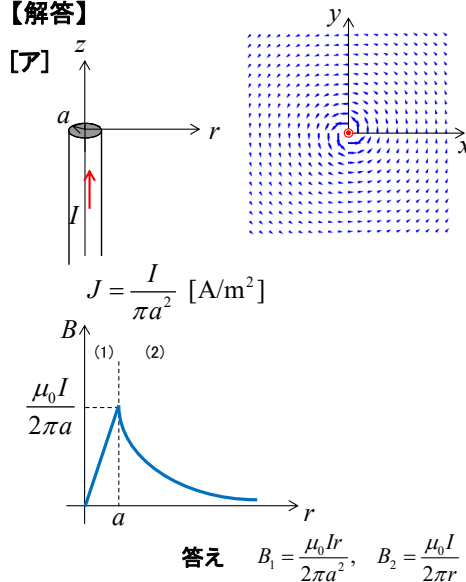
無限平板なので導体断面積 S も $\pm y$ 方向へ無限大に広がっている。電流密度は有限の値 J [A/m²] なので、全電流の大きさ $I = JS$ [A] は無限大になる。つまり、波源のエネルギーが無限大なので減衰がない。

厚みのある無限長電流の磁場①

【演習】導体に電流 I [A] を流したとき、アンペアの法則を適用して横軸に距離 r [m]、縦軸に磁界 B [T] をとって磁場分布を記入せよ。(教科書 章末6.10, pp.89-90)

【解答】

【ア】



4本重ね合わせのイメージ

同軸線路の断面磁場①

【演習】内導体の半径が a [m]、外導体の内半径が b [m]、外半径が c [m] の同軸線路がある。内導体と外導体の間の空間は空気を満たされている。一様な密度で往復電流 I [A] が流れているとき、4つに場合分けしてそれぞれアンペアの法則を適用し、磁束密度の大きさを r の関数としてグラフ化せよ。(教科書 章末6.12)

【解答】

2つの電流の重ね合わせ

同軸線路 平行線路

答え $B_1 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$, $B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $B_3 = \frac{\mu_0 (c^2 - r^2)}{2\pi r (c^2 - b^2)} I$, $B_4 = 0$

無限長ソレノイドの磁場

【演習】断面半径 a の無限長ソレノイドがある。断面中心から距離 r の位置の磁場を求めよ。ただし、単位長さあたりの巻き数を n とする。(教科書 pp.92-93)

【解答】

【ヒント】ソレノイドの内側では $+z$ 方向、外側では $-z$ 方向の磁束密度 B_z が発生していると想像できる。ただし、 $r \rightarrow \infty$ で B_z はゼロに近づかず。

磁場と積分路のイメージ

【語源】ソレノイド solenoid = solen (筒) -oid (~状の)、
【参考】筒: つつ = 丸い + 丸い、つき = 丸い + 奇妙

答え $\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z} & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases}$

無端ソレノイドの磁場

【演習】環状ソレノイドの中心半径を R [m]、巻数を N [巻]、ソレノイドの断面半径を a [m] として、密に巻かれた環状ソレノイドの磁束密度を求めよ。ただし、 $R \gg a$ とする。また、横軸に環状ソレノイド中心からの距離 r [m]、縦軸に磁束密度の大きさ B をとってグラフ化せよ。(教科書 pp.91-92)

【解答】

【ヒント】① $r < R - a$, ② $R - a < r < R + a$, ③ $R + a < a$ の三つの場合に分けてアンペアの法則を適用する。

答え $\vec{B} = \begin{cases} 0 & (r < R - a) \\ \frac{\mu_0 N I}{2\pi R} \hat{\phi} & (R - a < r < R + a) \\ 0 & (R + a < r) \end{cases}$

オフセット中空線路の断面磁場

【発展】半径 a [m] の無限長円柱導体に中心軸から d [m] 離れて半径 b [m] の円筒の穴が開いている。この導体に電流密度 J [A/m²] が一様に流れるとき、穴の部分の磁束密度を求めよ。(教科書 章末6.13)

【解答】

① J による P 点の磁束密度

$$\begin{cases} B_{1x} = B_1 \sin \theta = \frac{\mu_0 J r}{2} \frac{y}{r} \\ B_{1y} = B_1 \cos \theta = \frac{\mu_0 J r}{2} \frac{x}{r} \end{cases}$$

② $-J$ による P 点の磁束密度

$$\begin{cases} B_{2x} = B_2 \sin \theta' = \frac{\mu_0 J r'}{2} \frac{y}{r'} \\ B_{2y} = B_2 \cos \theta' = \frac{\mu_0 J r'}{2} \frac{d-x}{r'} \end{cases}$$

【ヒント】半径 a [m] の円柱導体に一様電流 J [A/m²] が上向きに流れているので、半径 b [m] の仮想的な円柱導体に $-J$ [A/m²] を下向きに流して両者を重ね合わせれば、穴を等価的に表現できる。

穴の部分の座標を $P(x, y)$ として、 J と $-J$ の各中心から P までの距離と角度を図のように決めると