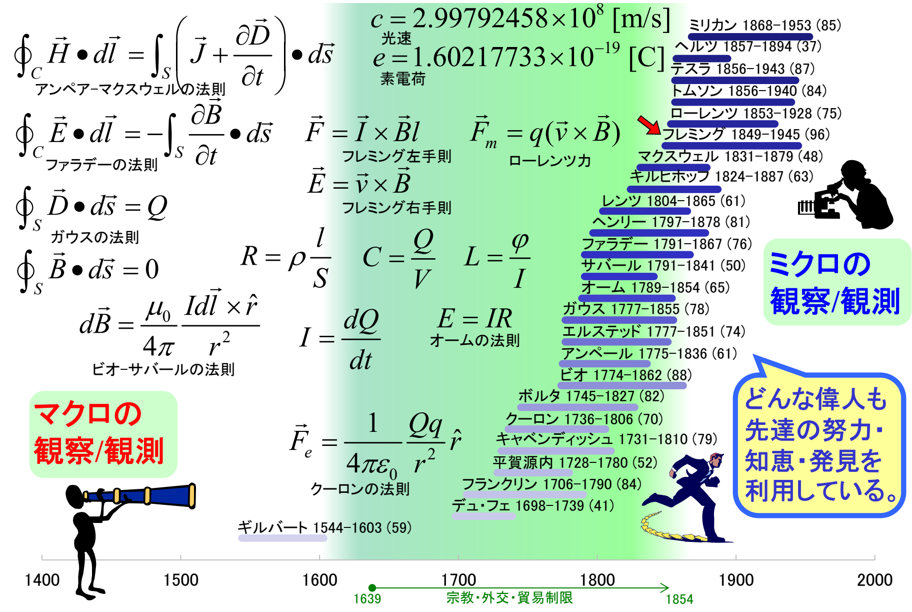
フレミング左手の法則

1st 2011/04/22
Lst 2023/10/27

電磁気学の偉人マップ



ローレンツ力(復習)

磁気力　電荷　磁束密度

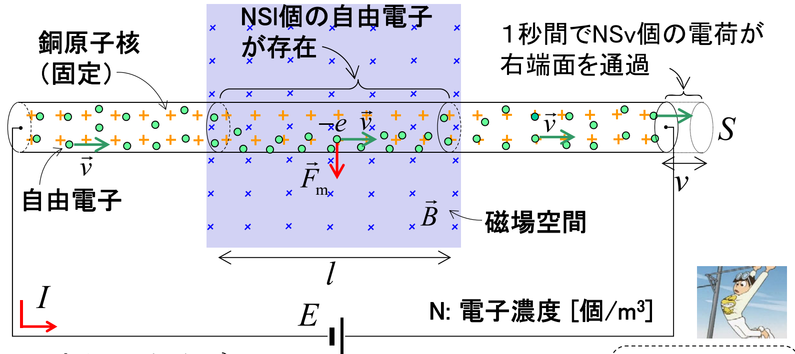
$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

荷電粒子速度　外積記号

[N] = [C] [m/s] [Wb/m^2]
= [C/s] [Wb/m]
= [A/m] [Wb] = [N/Wb] [Wb]

$$F_m = \underbrace{H}_{\text{磁界}} \; Q_m$$

フレミング左手則の導出



自由電子一つあたりに働くローレンツ力

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

電荷と電流の関係式

$$\vec{I} = -eNS\vec{v}$$

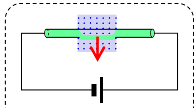
両式からeを消去すると

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{I}}{NS} \times \vec{B}$$

考えている磁場空間にはNSl個の自由電子が存在するので

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_m = \vec{I} \times \vec{B}l}$$

ローレンツ力の寄せ集めに等しい



電子濃度の偏りが内側から導線を押し出すイメージ

ノート https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B1_fleming_lefthand.pdf

フレミング左手則

荷電粒子一つあたりに働くローレンツ力（ミクロな視点）を、有限長さの導線を流れる電流にはたらく力（マクロな視点）で書直した式

※ フレミング右手則と混同するので、指は使わず式で覚える！

磁気力　　電流　　磁束密度

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} l$$

外積記号　　電流（導線）の長さ [m]

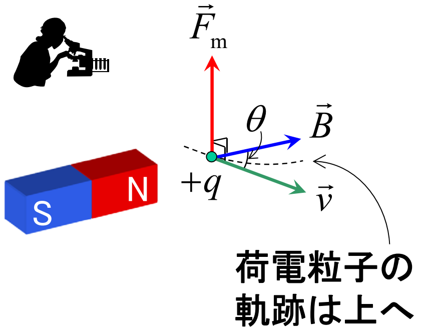
[N] = [A] [Wb/m²] [m]

= [A/m] [Wb] = [N/Wb] [Wb]

F_m = H Q_m

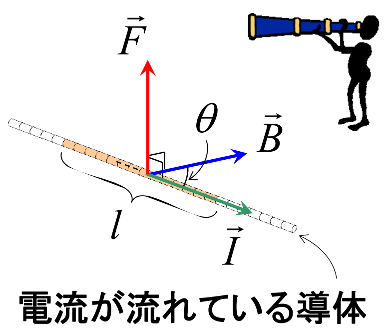
もしも磁荷Q_mが存在すれば、電気力F_e=qE（クーロンの法則）と同じようにして、磁界Hと磁荷Q_mの積で磁気力を定義することもできる。この定義は現実（観測結果）に即していないので一般には使われていない。

ローレンツ力とフレミング左手則



自由電子一つあたりに働くローレンツ力

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$



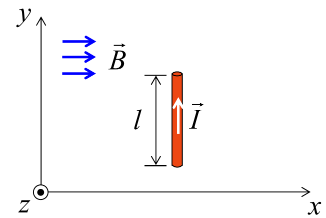
電流を自由電子の移動に置き換えて考えるとフレミング左手則

$$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} l$$

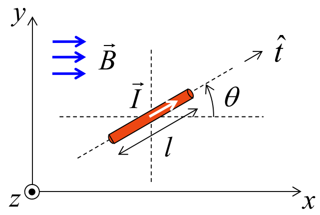
導体電流にはたらく力

【問題】x方向に一様な磁場の中で有限長さの直線導体棒に電流I [A]を流したとき、はたらく力の大きさと方向を求めよ。ただし、ℓ=1 m, I=10 A, B=0.5 T, θ=30° である。

(1)



(2)



【解答】

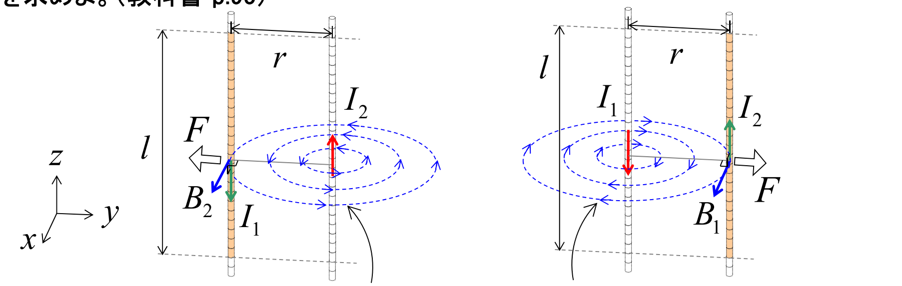
(1) $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} l = I\hat{y} \times B\hat{x} l = IBl(-\hat{z}) = 10(0.5)(1)\hat{x} = 5(-\hat{z})$ [N]

(2) $\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B} l = I\hat{t} \times B\hat{x} l = IBl \cdot \hat{t} \times \hat{x} = IBl \sin\theta(-\hat{z})$

$= 10(0.5)(1)\sin 30^{\circ}(-\hat{z}) = 10(0.5)(1)\tfrac{1}{2}(-\hat{z}) = 2.5(-\hat{z})$ [N]

平行電流間に働く力

【例題】無限長の直線電流I_1, I_2が下図のように流れているとき、長さlの部分に働く力を求めよ。（教科書 p.95）



電流 I_2による磁場 B_2　　電流 I_1による磁場 B_1

【解答】

$$\begin{cases} \vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\hat{x}, \quad \vec{I}_1 = I_1(-\hat{z}) \\ \vec{F} = \vec{I}_1 \times \vec{B}_2 l = I_1(-\hat{z}) \times \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\hat{x} \cdot l \end{cases}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}(-\hat{y})$$ 反発力

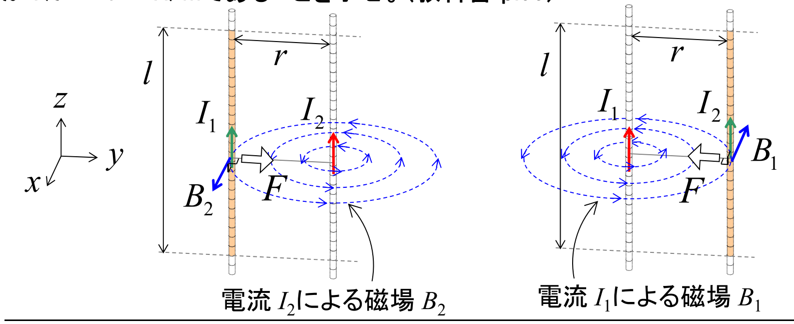
$$\begin{cases} \vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{x}, \quad \vec{I}_2 = I_2\hat{z} \\ \vec{F} = \vec{I}_2 \times \vec{B}_1 l = I_2\hat{z} \times \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{x} \cdot l \end{cases}$$

$$\therefore \vec{F} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}\hat{y}$$ 反発力

ノート https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B1_fleming_lefthand.pdf

真空の透磁率の導出

【演習】SI単位系の基本単位の一つである1 Aは、「1 m 離れた位置に置かれた同一方向流れる平行電流のうち、長さ1 mあたりに働く力の大きさが2×10^{-7} Nとなるときに流れている電流の大きさ」と定義している。この定義から真空の透磁率μ_0の値が$4\pi\times10^{-7}$ H/mであることを示せ。(教科書 p.95)



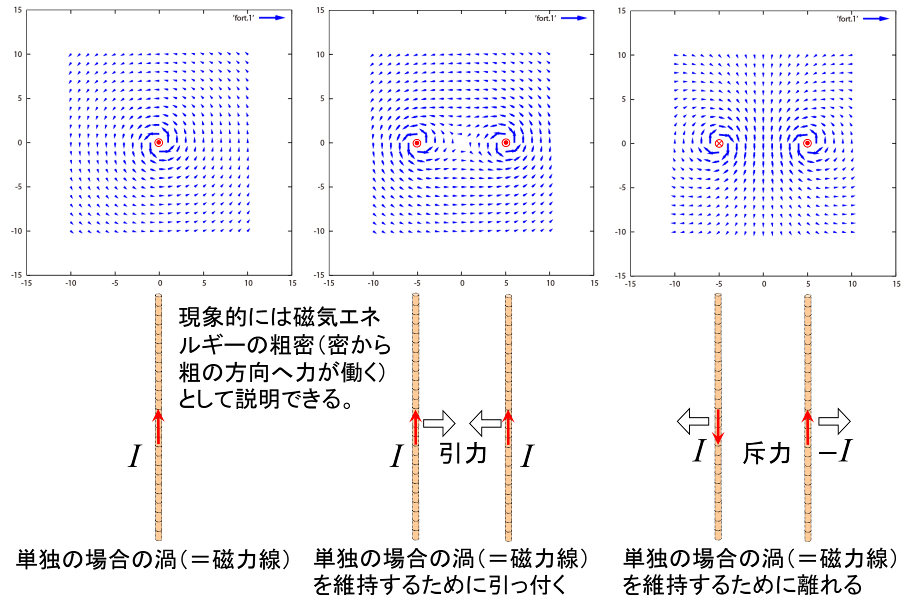
【解答】

$$\begin{cases} \vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\hat{x}, \quad \vec{I}_1 = I_1\hat{z} \\ \vec{F} = \vec{I}_1\times\vec{B}_2 l = I_1\hat{z}\times\dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\hat{x}\cdot l = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi r}\hat{y} \quad \therefore F = \dfrac{\mu_0}{2\pi} = 2\times10^{-7}\ \mathrm{N} \end{cases}$$

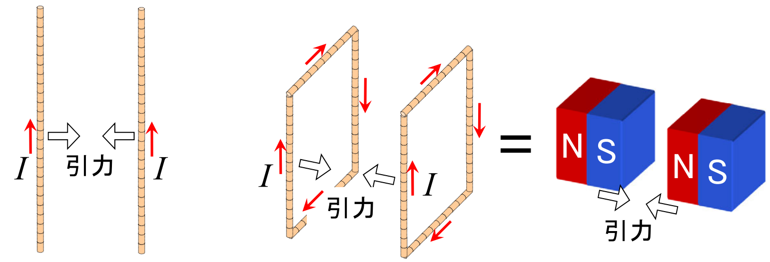
同方向の電流には吸引力がはたらく

レジュメ https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B1_fleming_lefthand.pdf

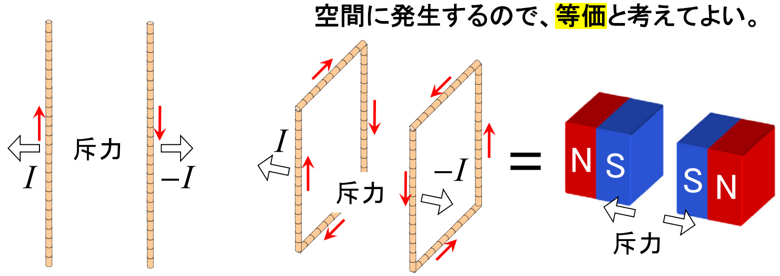
平行電流に力が働く理由の考察



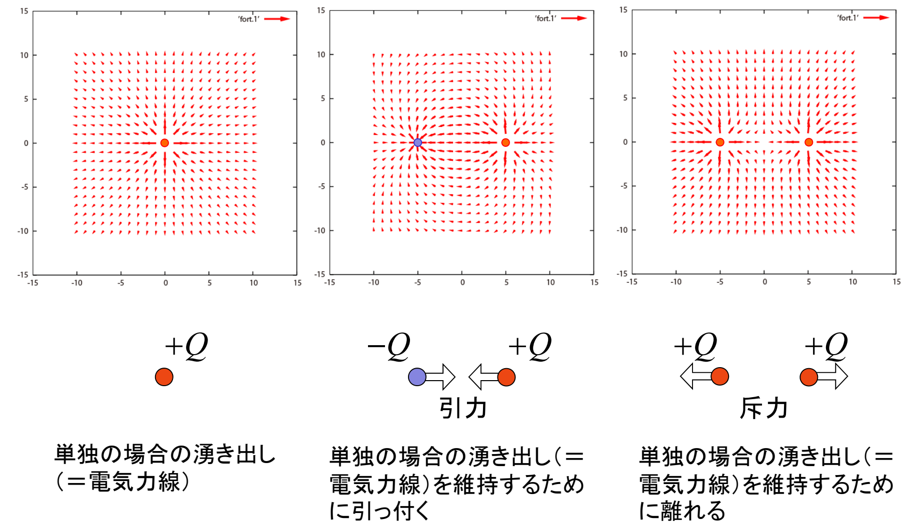
平行電流と磁石の類似性



ループ電流と磁石は同じ磁場 B を周囲の空間に発生するので、等価と考えてよい。



電荷間に力が働く理由は？



湧き出し(源泉)に関するもので、磁気エネルギーの粗密による吸引力と反発力を使った単純な説明はできない。重力がなぜ存在するのか？現代科学が未だ説明できないのと同様に我々には分からない。＝自然法則(神のみぞ知る)。

電子の移動速度は？

【例題】(1) 次の場合の導線内の電子の速度を求めよ。そして、(2) H^+原子核の周囲を回る電子の速度、(3) 電磁波の伝わる速度と比較せよ。

【解答】 $\vec{I} = -eNS\vec{v}$ $\vec{v} = -\vec{I}\,/\,eNS$

答え： (1) 0.74 mm/s, 1.47 mm/s, 0.74 mm/s (2) 軌道半径 $r=0.53\times10^{-10}$ mとして、v=2180 km/s, (3) $c=3\times10^8$ m/s

(a) I=10 A、銅の自由電子濃度$N=8.5\times10^{28}$個/m^3、断面積S=1 mm^2のとき、速度は

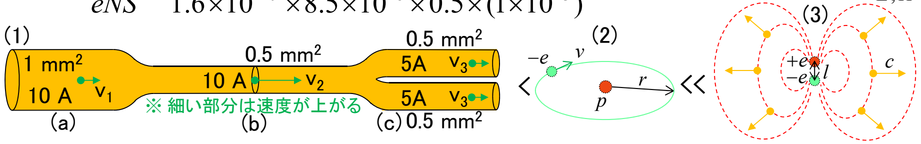
$$v_1 = \frac{I}{eNS} = \frac{10}{1.6\times10^{-19}\times8.5\times10^{28}\times(1\times10^{-3})^2} = 0.74\ \mathrm{mm/s}$$

(b) I=10 A、銅の自由電子濃度$N=8.5\times10^{28}$個/m^3、断面積S=0.5 mm^2のとき、速度は

$$v_2 = \frac{I}{eNS} = \frac{10}{1.6\times10^{-19}\times8.5\times10^{28}\times0.5\times(1\times10^{-3})^2} = 1.47\ \mathrm{mm/s}$$

(c) I=5 A、銅の自由電子濃度$N=8.5\times10^{28}$個/m^3、断面積S=0.5 mm^2のとき、速度は

$$v_3 = \frac{I}{eNS} = \frac{5}{1.6\times10^{-19}\times8.5\times10^{28}\times0.5\times(1\times10^{-3})^2} = 0.74\ \mathrm{mm/s}$$



菊池，電気のキホン，p.58, Softbank Creative, 2010

「海水の流れ」<<「海水表面を伝わる波の速さ」の関係に似ている

原子核を周回する電子速度

【演習】水素原子を周回する電子の軌道半径を $r = 0.53\times10^{-10}$ m とするとき電子の速度は秒速何キロメートルか。(演習書 p.2 基礎改)

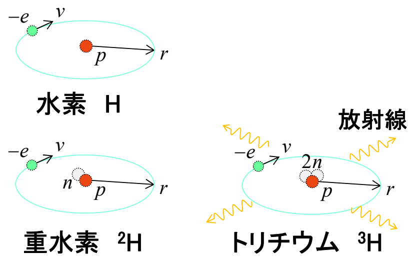
【解答】陽子と電子はクーロン力で吸引されるので、両者が結合しないためには、電子が陽子の周囲を円運動する必要がある。円運動の釣合いの式より

クーロン力　向心力

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

これをvについて求めると

$$v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}\frac{r}{m} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}$$



数値を代入すると

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}} = \frac{1.6\times10^{-19}}{\sqrt{4\pi(8.854\times10^{-12})(9.11\times10^{-31})(0.53\times10^{-10})}} = 2.184\times10^6$$

円運動の周期から周波数を求めると $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{v}{2\pi r} = \dfrac{2.184\times10^6}{2\pi(0.53\times10^{-10})} = 6.56\times10^{15} = 6.56\ \mathrm{PHz}$

N. Ida, Engineering Electromagnetics, pp.130–131, Springer.

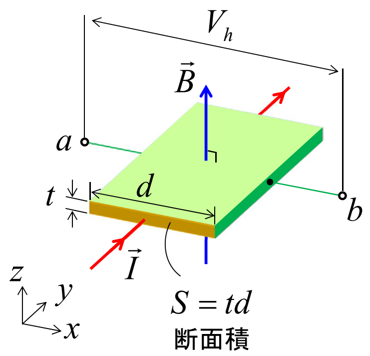
答え: 2184 km/s

ホール効果とホール素子

	素子	電荷(キャリア)
1	導体、n形半導体	電子
2	p形半導体	正孔(ホール)
3	バイポーラトランジスタ	電子とホール

$$\begin{cases} \vec{B} = B\hat{z}\ \ [\mathrm{T}] \\ \vec{J} = J\hat{y} = \dfrac{I}{S}\hat{y} = \dfrac{I}{td}\hat{y}\ \ [\mathrm{A/m^2}] \\ I = qNSv = qNtdv\ \ [\mathrm{A}] \end{cases}$$

N : 電荷濃度[個/m^3]
q : 電荷[C]
v : 電荷移動速度[m/s]
t : ホール素子厚み[m]
d : ホール素子幅[m]

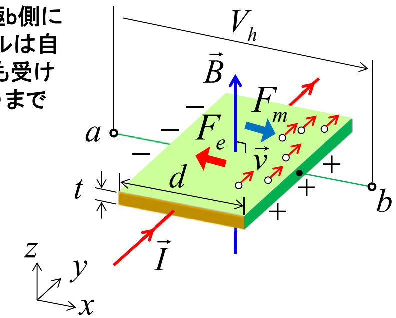


ホール効果

【問題】ホール素子がp形半導体の場合、ホール電圧を求めよ。

【解答】キャリアであるホールは磁気力を受けて電極b側に偏るため、b→aに向かって電界E_hが発生する。ホールは自ら作った電界によって逆向きの電気力(クーロン力)も受けるため、両者の力の釣り合いが成立する(平衡状態)まで偏りが続く。これを数式で表すと

$$\underbrace{\vec{F}_e = -\vec{F}_m}_{\text{釣り合いの式}} \Rightarrow \underbrace{q\vec{E}_h}_{\text{電気力(磁気力と逆向き)}} = -\underbrace{(q\vec{v}\times\vec{B})}_{\text{磁気力}}$$



ここから電界を求めると

$$\vec{E}_h = -\vec{v}\times\vec{B} = -\underbrace{\boxed{v\hat{y}}}_{\text{ホールの速度}}\times B\hat{z} = vB(-\hat{x})$$

電位差を求めると

$$V_h = -\int_0^d \vec{E}_h \bullet dx\hat{x} = \int_0^d vBdx = vBd$$

I=qNSv=qNv(td)より、vd=I/Nqtであるから

$$V_h = vdB = \frac{I}{Nqt}B = \frac{1}{Nq}\frac{BI}{t} = R\frac{BI}{t}$$

ここで、V_hをホール電圧、R=1/Nqをホール係数と呼ぶ。

ホール電圧V_hとホール係数Rと伝導電流Iが分かれば、素子に垂直に加わっている磁場Bを間接測定で求められる。磁場は3次元空間に広がっているが、電圧Vと電流Iは閉じた1次元線路内にあるため簡単に測定できる。

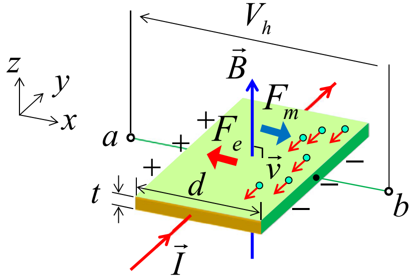
答え: V=RBI/t, R=1/Nq

ホール効果（演習）

【演習】ホール素子に電流I [A]を流した。次の問に答えよ。（演習書 応用6.4）
(1) 半導体片がn形のとき、ホール電圧の電極の向きはどうなるか。
(2) ホール係数 R=−6×10^{-4} m^3/C, t=0.4 mmの素子にI=1 mAを流したところ、V_h=−1.2 mVのホール電圧を観測した。磁束密度Bを求めよ。

【解答】
釣り合いの式より、

$$\underbrace{\vec{F}_e = -\vec{F}_m}_{\text{釣り合いの式}} \Rightarrow \underbrace{q\vec{E}_h}_{\text{電気力（磁気力と逆向き）}} = -\underbrace{(q\vec{v}\times\vec{B})}_{\text{磁気力}}$$



ここから電界を求めると

$$\vec{E}_h = -\vec{v}\times\vec{B} = -\underbrace{\boxed{v(-\hat{y})}}_{\text{電子の速度}}\times B\hat{z} = vB\hat{x}$$

電位差を求めると

$$V_h = -\int_0^d \vec{E}_h \bullet dx\hat{x} = -\int_0^d vBdx = -vBd = -R\frac{BI}{t}$$

従って、p形半導体と電圧の向きが逆になる。Bについて求めると

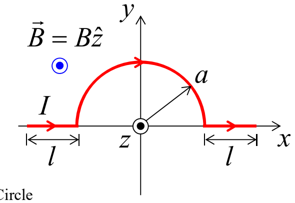
$$B = \frac{V_h t}{RI} = \frac{1.2\times10^{-3}(0.4\times10^{-3})}{6\times10^{-4}(1.0\times10^{-3})} = 0.8\ \mathrm{T}$$

答え: (1) a正、b負 (2) 0.8T

フレミング左手の法則（演習）

【演習】図に示すように、一様な磁束密度B [T]の磁界中に半径a [m]の半円の導線と長さがともにl [m]の直線からなる導線に電流I [A]が流れているとき、この導線全体にはたらく力を求めよ。（演習書 応用6.11）

【解答】2本の直線にはたらく力と、半円に働く力を合成する。



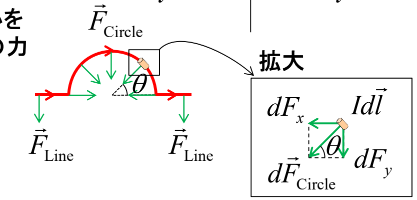
①直線一つあたりの力は、フレミング左手則より

$$\vec{F} = \vec{I}\times\vec{B}l = I\hat{x}\times B\hat{z}l = IBl(-\hat{y})$$

これが2本あるので

$$\vec{F}_{\mathrm{Line}} = 2IBl(-\hat{y})$$

②半円にはたらく力は、右図のように常に円の中心を向くが、x方向の力は左右で打ち消し合ってy方向の力だけが残るので



$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{Circle}} &= (-\hat{y})\int_{\theta=0}^{\pi} dF_y = (-\hat{y})\int_{\theta=0}^{\pi} F\sin\theta \\ &= (-\hat{y})\int_{\theta=0}^{\pi} IBdl\sin\theta \\ &= (-\hat{y})\int_{\theta=0}^{\pi} IBad\theta\sin\theta \\ &= (-\hat{y})IBa\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta = 2IBa(-\hat{y})\end{aligned}$$

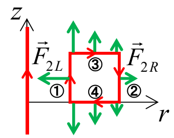
$$\begin{cases} dF_{\mathrm{Circle}} = Id\vec{l}\times\vec{B} = IBdl \\ dF_y = dF_{\mathrm{Circle}}\sin\theta = IBdl\sin\theta \end{cases}$$

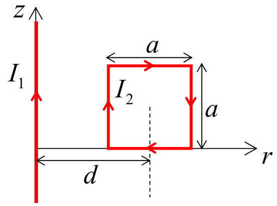
答え: $2IB(a+l)(-\hat{y})$ [N]

フレミング左手の法則（演習）

【演習】無限長直線導線と正方形導線が同一平面上にあり、それぞれに I_1, I_2 [A]の電流が流れている。電流の向きはI_1は上向き、I_2は時計回りである。二つの導線間に作用する力を求めよ。ただし、直線導線と正方形導線の中心との距離はd [m]で、正方形導線の1辺はa [m]である。また、a/2 < d とする。（演習書 応用6.13）

【解答】
まず、無限長電流I_1が正方形電流I_2を構成する4辺に作る磁場を使って、I_2にはたらく力を個別に求める。





① I_2左側とI_1との間に働く力は

$$\left|\vec{F}_{2L}\right| = I_2B_{21}a = I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d-a/2)}a$$

$$\therefore \vec{F}_{2L} = F_{2L}(-\hat{r})$$

② I_2右側とI_1との間に働く力は

$$\left|\vec{F}_{2R}\right| = I_2B_{21}a = I_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a/2)}a$$

$$\therefore \vec{F}_{2R} = F_{2R}\hat{r}$$

③ I_2上側と ④ I_2下側に働く力は上下対称で打ち消し合うので、①②だけを考えればよい。

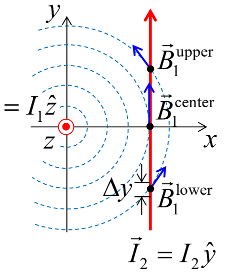
①と②の合成より

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= (F_{2L}-F_{2R})(-\hat{r}) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\left(\frac{1}{d-a/2}-\frac{1}{d+a/2}\right)(-\hat{r}) \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\frac{d+a/2-(d-a/2)}{d^2-a^2/4} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\frac{a(-\hat{r})}{d^2-a^2/4} \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\frac{4a}{4d^2-a^2} = \frac{2\mu_0 I_1 I_2 a^2}{\pi(4d^2-a^2)}(-\hat{r})\ \ [\mathrm{N}]\end{aligned}$$

フレミング左手の法則（演習）

【演習】二つの電流 I_1, I_2が互いに直角になるように置かれているとき、導線2にはどのような力がはたらくか。ただし、導線1の電流は非常に長い線電流であり、固定されているとする。（演習書 基礎6.15）

【解答】
I_1がI_2上に作る磁束密度を使ってフレミング左手則よりI_2に働く力を求めると



$$\vec{F}_{21}^{\mathrm{upper}} = \vec{I}_2\times\vec{B}_1^{\mathrm{upper}}dy = F_{21}\hat{z}$$
$$\vec{F}_{21}^{\mathrm{center}} = \vec{I}_2\times\vec{B}_1^{\mathrm{center}}dy = 0$$
$$\vec{F}_{21}^{\mathrm{lower}} = \vec{I}_2\times\vec{B}_1^{\mathrm{lower}}dy = F_{21}(-\hat{z})$$

電流I_2にはy=0を中心として上下対称の偶力が働く。

答え：電流が同じ方向で平行になろうとする力がはたらく。