磁気ダイポールとトルク

v2.6 Nov.2022　　　　番号:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1. トルクの定義

図 1 に示すように z 軸を回転軸とした長さ l の棒の先端に力 $\vec{F}$ を加えたとき，棒は反時計回りに回転する。この**回転エネルギーを定量化**したものを**トルク** (torque) と呼ぶ [*1]。トルクの大きさは作用点に加えられた力の大きさと回転軸から作用点までの長さに比例する[*2]。まず，作用点に加えられた力 $\vec{F}$ を分解すると，回転に寄与する力は $F\sin\theta$ だけである。さらに回転には時計回りと反時計回りがあり，回転軸の単位ベクトルを使って右ネジの法則で回転方向を表現する（この場合は左回りなので $\hat{z}$）。即ち，トルクは次式で表される。

$$\vec{N} = lF\sin\theta\hat{z} = \vec{l}\times\vec{F} \tag{1}$$

以上より，トルクは回転軸から作用点までの距離ベクトルと作用点に働く力との外積で表現できることが分かる。

2. 磁気ダイポールに働くトルク

さて，図 2 のように一様な磁場空間 $\vec{B} = B\hat{x}$ の中に置かれた $a\times b$ の長方形ループ電流（ループ面の法線と磁束密度とのなす角度が θ）について考える。コイルに電流 $\vec{I}$ を流したとき，図 2 右において右上の電流 b [m] の部分に生じる力はフレミング左手則より

$$\vec{F} = \vec{I}b\times\vec{B} = Ib\,\hat{z}\times B\,\hat{x} = IbB\sin 90^\circ\,\hat{y} = IbB\,\hat{y} \tag{2}$$

左下の電流 b [m] にも同じ大きさで逆向きの力が働くので，トルクは

$$\vec{N} = \left(\frac{a}{2}\hat{t}\times IbB\hat{y}\right)2 = IabB\hat{t}\times\hat{y} = IabB\sin\theta\hat{z} \tag{3}$$

$$= ISB\sin\theta\hat{z} = ISB\hat{n}\times\hat{x} = I\vec{S}\times\vec{B} \tag{4}$$

ただし，$\vec{S} = S\hat{n} = ab\hat{n}$ である。さらに $\vec{m} = I\vec{S}$ を**磁気ダイポールモーメント**[*3] (magnetic dipole moment) と定義すれば次式となる。

$$\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B} \tag{5}$$

3. 磁気ダイポールに働くトルク（円形ループ電流の場合）

今度は図 3 のように一様な磁場空間 $\vec{B} = B\hat{x}$ の中に置かれた半径 a [m] の円形ループ電流（ループ面の法線 $\hat{n}$ と磁束密度 $\vec{B}$ のなす角度が θ）について考える。まず図 4 左において，円形コイルの微小長さ $dl = ad\varphi$ に働く力のうち，回転に寄与する成分だけを考えると[*4]

$$d\vec{F} = I_z\hat{z}ad\varphi\times B\hat{x} = I\sin\varphi ad\varphi B\hat{y} = IBa\sin\varphi d\varphi\hat{y} \tag{6}$$

これと同じ力が z 軸の対称点にも働くので，ループの微小部分に働くトルクは $d\vec{N} = 2\vec{l}\times d\vec{F}$ となり，$\vec{l} = a\sin\varphi\hat{t}$ であるから，

$$d\vec{N} = 2a\sin\varphi\hat{t}\times IBa\sin\varphi d\varphi\hat{y} = 2a^2IB\sin^2\varphi d\varphi\sin\theta\hat{z} \tag{7}$$

となる。従って，円形ループ電流に働く全トルクは $\varphi = 0$ から π まで総和すると次式となる。

$$\vec{N} = \int_0^\pi d\vec{N} = \int_0^\pi 2a^2IB\sin^2\varphi\sin\theta d\varphi\hat{z} \tag{8}$$

$$= 2a^2IB\sin\theta\int_0^\pi\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi\hat{z} = a^2IB\sin\theta\left[\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_0^\pi\hat{z} \tag{9}$$

$$= \pi a^2IB\sin\theta\hat{z} = SIB\sin\theta\hat{z} = I\vec{S}\times\vec{B} \tag{10}$$

ただし，$\vec{S} = S\hat{n} = \pi a^2\hat{n}$ である。$\vec{m} = I\vec{S}$ とおけば式 (5) と同じ式が得られる[*5]。以上まとめると，磁場空間 $\vec{B}$ の中に置かれたループ面積 S [m^2] のコイル（形状は問わない）に電流 I が流れているとき，そのコイルには $\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B}$ なるトルクが発生することが分かる。

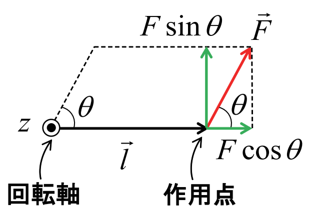

図 1　トルクの定義

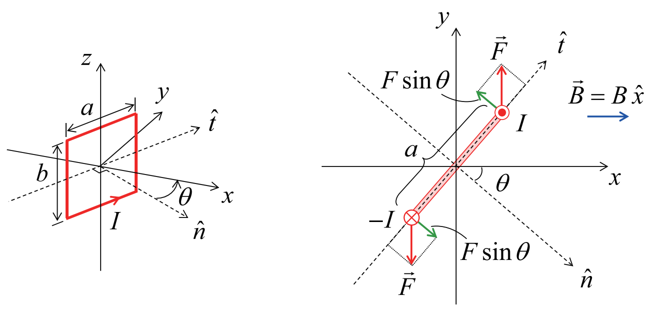

図 2　長方形ループコイルに働く力。斜視図 (左) と上面図 (右)

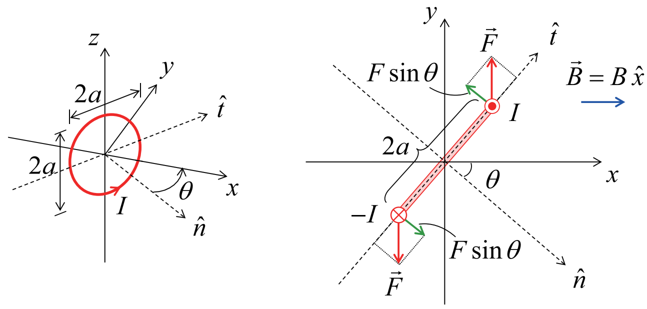

図 3　円形ループコイルに働く力。斜視図（左）と上面図（右）

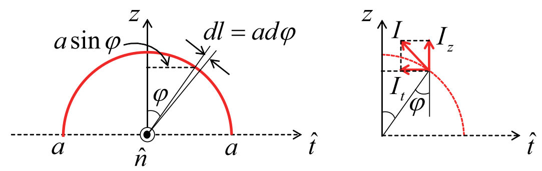

図 4　円形ループコイルに働く力。斜視図（左）と上面図（右）

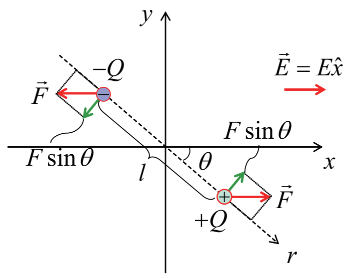

図 5　電気ダイポールに働く力

4. 電気ダイポールとの類似性

同様の議論は電気ダイポールについても行うことができる。図 5 に示すように一様な電界 $\vec{E} = E\hat{x}$ の中に置かれた長さ l の電気ダイポールについて考える。それぞれの電荷にはクーロン力

$$\vec{F} = Q\vec{E} = QE\hat{x} \tag{11}$$

が生じるので，この電気ダイポールに働くトルクは次式となる。

$$\vec{N} = \left(\frac{l}{2}\hat{r}\times QE\hat{x}\right)2 = QlE\hat{r}\times\hat{x} = QlE\sin\theta\hat{z} = Q\vec{l}\times\vec{E} \tag{12}$$

さらに $\vec{p} = Q\vec{l}$ を**電気ダイポールモーメント** (electric dipole moment) [C·m] と定義すれば次式 (13) が得られる。

$$\vec{N} = \vec{p}\times\vec{E} \tag{13}$$

磁気ダイポールに働くトルクの式 (5) と電気ダイポールに働くトルクの式 (13) の比較から，磁気と電気の間には $\vec{m}\Leftrightarrow\vec{p}, \vec{B}\Leftrightarrow\vec{E}$ といった**類似の対応関係**があることが分かる。

[*1] [Nm]=[J] であるから，トルクはエネルギーの単位に等しい。

[*2] てこの原理，シーソーの原理と同じである。

[*3] 磁気モーメントとも呼ぶ。単位は [Am^2]。モーメントという言葉には能率とか能力といった意味があり，周囲に磁場という条件があれば電流が流れているコイル自体に回転する能力があるというニュアンスになる。

[*4] $I_t\times B_x$ はコイルを z 方向に伸縮させる力なのでトルクには関係しない。

[*5] 円形ループ電流を軸対称の細い長方形ループの集まりと考えれば，内部電流は互いに打ち消し合いループ外周電流のみが残る。従って，式 (5) は円形ループだけでなく，任意形状ループ（ループ面積 S）に対しても成立する。