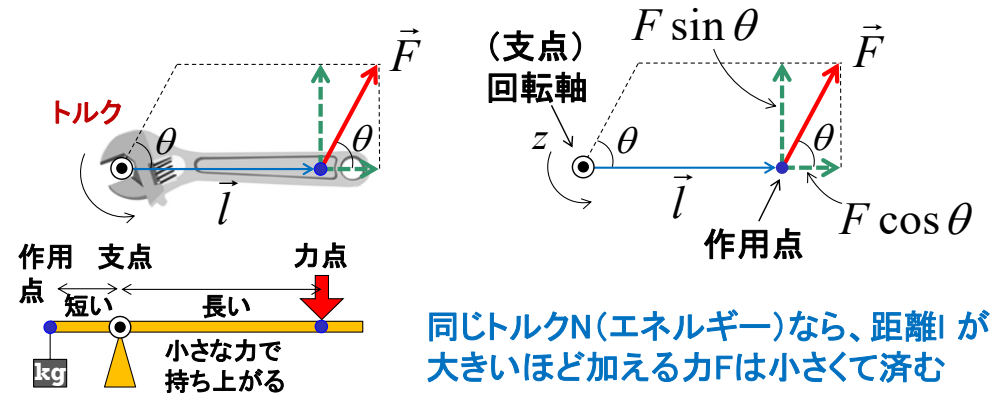


# 磁気ダイポールモーメント

1st 2011/04/22

Lst 2021/10/30

# トルク(力のモーメント)とは?



同じトルクN(エネルギー)なら、距離lが大きいほど加える力Fは小さくて済む

$$\vec{N} = lF \sin \theta \hat{z} = \vec{l} \times \vec{F}$$

$$[\text{N}\cdot\text{m}] = [\text{m}] \times [\text{N}]$$

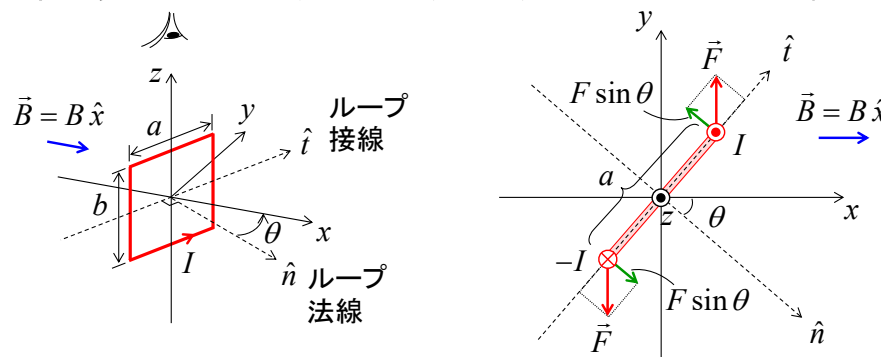
マーク・レヴィ著, 森田由子訳, ひらめきの物理学, pp.304-305, SBクリエイティブ

ノート: [https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2\\_magnetic\\_dipole.pdf](https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2_magnetic_dipole.pdf)

# 磁気ダイポールモーメント①

モーメントとは? ...軸の周りの回転を起こす力(エネルギー)または、力の大きさと回転の中心との距離の積で表される物理量

外部磁場の向きに一致(追従)するように自身の方向を回転させる。



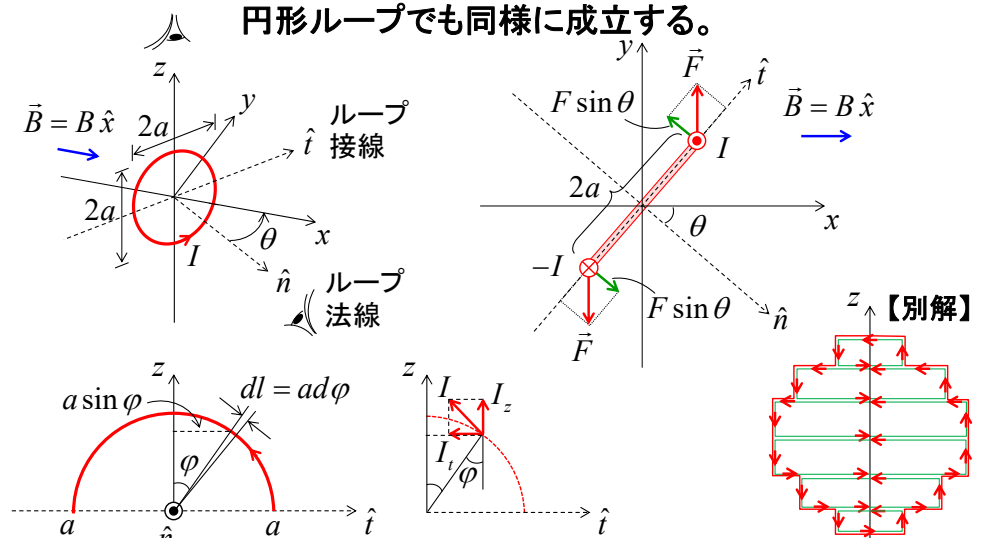
$$\vec{N} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$[\text{N}\cdot\text{m}] = [\text{A}\cdot\text{m}^2] \times [\text{Wb}/\text{m}^2] = [\text{A}\cdot\text{Wb}]$$

ノート: [https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2\\_magnetic\\_dipole.pdf](https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2_magnetic_dipole.pdf)

# 磁気ダイポールモーメント②

円形ループでも同様に成立する。



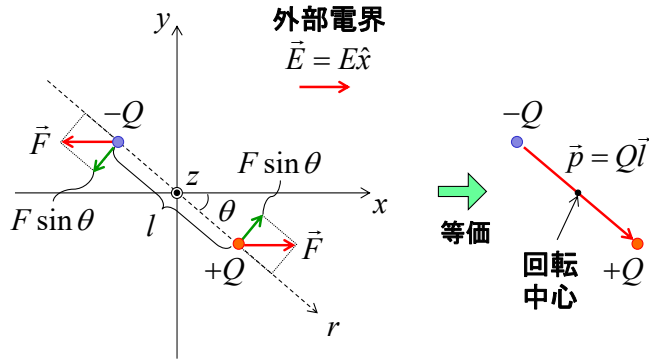
$$\vec{N} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

複数の長方形ループに分割すると、内部電流は相殺して外周電流のみ残る。

ノート: [https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2\\_magnetic\\_dipole.pdf](https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2_magnetic_dipole.pdf)

# 電気ダイポールモーメント

モーメントとは？  
原点を中心に回転運動を起こす能力の大きさ、能率を表す。



電場Eの中に電荷±Qで距離lの電気ダイポールを置くと、次のトルクNが発生する。ここで、p=Qlを電気ダイポールモーメントと呼ぶ。

$$\vec{N} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$[N \cdot m] = [C] \times [m] \times [V/m] = [C \cdot m] \times [V/m]$$

# ダイポールモーメントのまとめ

## 磁気ダイポールモーメント

## 電気ダイポールモーメント

電流

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

ループ面積  
(方向は面に垂直で右ねじが正)

電荷

$$\vec{p} = Q\vec{l}$$

電荷間の距離  
(方向は-から+の方向)

## 外部磁場によるトルク

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

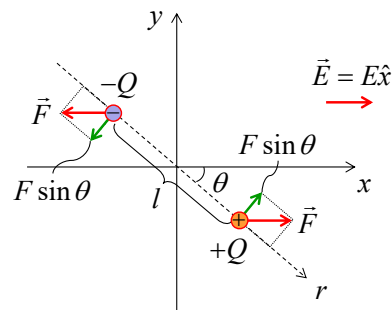
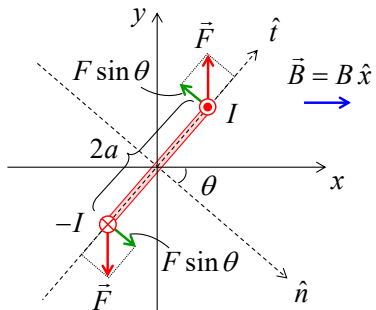
## 外部電界によるトルク

$$\vec{N} = \vec{p} \times \vec{E}$$

# ダイポールモーメントとトルク

## 磁気ダイポールモーメント

## 電気ダイポールモーメント



磁場Bの中にループ面積Sの電流Iを置くと、次に示すトルクNが発生する。ここで、m=ISを磁気ダイポールモーメントと呼ぶ。

電場Eの中に電荷±Qで距離lの電気ダイポールを置くと、次のトルクNが発生する。ここで、p=Qlを電気ダイポールモーメントと呼ぶ。

$$\vec{N} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$$\vec{N} = Q\vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}$$

# 回転帯電球中心の磁場(復習)

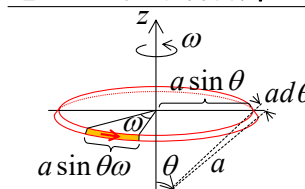
【演習】回転帯電球中心の磁場を求めよ。(教科書, p.98)

$$dl = \sigma a^2 \sin \theta \omega d\theta \quad [C/s] \quad \text{微小ループ電流}$$

微小ループ電流I [A]が作る磁場はビオサバールの法則より  

$$dB = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$$
 ただし、aはループ半径、rはループから観測点までの距離なので次の置き換えをする。  

$$I \rightarrow \sigma a^2 \sin \theta \omega d\theta, \quad a \rightarrow a \sin \theta, \quad r \rightarrow a$$



球表面電流全体が中心に作る磁場は

$$B = \int_0^\pi dB = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \sigma a^2 \sin \theta \omega d\theta a^2 \sin^2 \theta}{2a^3} = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega a \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

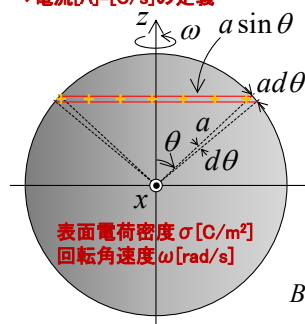
3倍角の公式

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= (2\sin \theta \cos \theta) \cos \theta + (1 - 2\sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= 2\sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta - 2\sin^3 \theta \\ &= 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2\sin^3 \theta \\ &= 2\sin \theta - 2\sin^3 \theta + \sin \theta - 2\sin^3 \theta \\ &= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \end{aligned}$$

従って、回転帯電球中心の磁場は

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega a \frac{1}{4} \left[ -3 \cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \mu_0 \sigma \omega a \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma \omega a \quad [T]$$

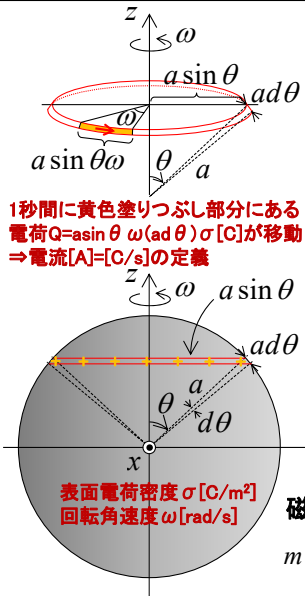
1秒間に黄色塗りつぶし部分にある電荷Q=asin theta omega (ad theta) sigma [C]が移動 => 電流I=[C/s]の定義



【前提】導体球に電荷を与えても互いにクーロン力で反発するため、球内部には電荷は集まらない。お互いに反発する電荷同志が一番落ち着くのは、導体球の外側の殻の部分であり、この部分の表面電荷密度がsigma [C/m^2]。つまり、導体球自体は内部が空でも導体で埋まっても同じ。

# 回転帯電球の磁気モーメント

【演習】回転帯電球の磁気モーメントを求めよ。ただし、角速度  $\omega$  [rad/s]、半径  $a$  [m]、表面電荷密度を  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>] とする。



**微小ループ電流**  
 $dI = \sigma a^2 \sin \theta \omega d\theta$  [C/s]

**微小ループの内部面積**  
 $S = \pi (a \sin \theta)^2$  [m<sup>2</sup>]

微小ループ電流が作る磁気ダイポールモーメント  
 $dm = dIS = \sigma a^2 \sin \theta \omega d\theta \cdot \pi (a \sin \theta)^2 = \pi \sigma \omega a^4 \sin^3 \theta d\theta$

表面電流全体が作る磁気ダイポールモーメント  
 $m = \int_0^\pi dm = \int_0^\pi \pi \sigma \omega a^4 \sin^3 \theta d\theta = \pi \sigma \omega a^4 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$

**3倍角の公式**  
 $\sin 3\theta = \sin(2\theta + \theta) = \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta$   
 $= (2 \sin \theta \cos \theta) \cos \theta + (1 - 2 \sin^2 \theta) \sin \theta$   
 $= 2 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$   
 $= 2 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$   
 $= 2 \sin \theta - 2 \sin^3 \theta + \sin \theta - 2 \sin^3 \theta$   
 $= 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$

【前提】導体球に電荷を与えてもお互いにクーロン力で反発するため、球内部には電荷は集まらない。お互いに反発する電荷同志が一番落ち着くのは、導体球の外側の殻の部分であり、この部分の表面電荷密度が  $\sigma$  [C/m<sup>2</sup>]。つまり、導体球自体は内部が空でも導体で埋まっても同じ。

**磁気ダイポールモーメント**  
 $m = \pi \sigma \omega a^4 \frac{1}{4} \left[ -3 \cos \theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta \right]_0^\pi = \pi \sigma \omega a^4 \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{3} = \frac{4}{3} \pi \sigma \omega a^4$  [A · m<sup>2</sup>]

# 磁気ダイポールモーメント

【演習】水素原子の軌道電子による軌道電流  $I_{orb}$  と軌道磁気ダイポールモーメント  $m_{orb}$  を求めよ。ただし、軌道半径は  $r = 0.53 \text{ \AA}$  とする。また、水素原子に外部から  $B = 1 \text{ TT}$  (テラテスラ =  $10^{12} \text{ T}$ ) の磁場を加えた場合の最大トルク  $N$  を求めよ。

【解答】

**クーロン力**  
 $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$   
 $v^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{mr}$   
 $v = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 mr}}$   
 $\omega = \frac{v}{r} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 mr^3}}$   
 $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e}{\sqrt{16\pi^3 \epsilon_0 mr^3}}$

**向心力**

**軌道電流**  
 $I_{orb} = ef = e \frac{\omega}{2\pi} = e \frac{v}{2\pi r}$   
 $= \frac{e^2}{\sqrt{16\pi^3 \epsilon_0 mr^3}}$  [A]

**磁気ダイポールモーメント**  
 $\vec{m} = I \vec{S} = \frac{e^2 \pi r^2}{\sqrt{16\pi^3 \epsilon_0 mr^3}} = \sqrt{\frac{e^4 r}{16\pi \epsilon_0 m}}$

**トルク(最大)**  
 $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B} = \sqrt{\frac{e^4 r}{16\pi \epsilon_0 m}} B$

$m$  の方向が外部磁場  $B$  の方向に一致 (追従) するようにトルクを生じる。

Answer:  $I = 1.05 \text{ mA}$ ,  $m = 9.26 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$ ,  $N = 9.26 \times 10^{-12} \text{ Nm}$

# 原子の磁気ダイポールモーメント

磁気モーメント      軌道磁気モーメント      スピン磁気モーメント

$$\vec{m} = \vec{m}_{orb} + \vec{m}_{spin}$$

**電子 (公転)**      **陽子**      **中性子**

$\vec{m}_{orb}$        $I_{orb}$

拡大  $m_{nuc}$  小は無視できるほど小さい

**電子 (自転)**       $\vec{m}_{spin}$        $I_{spin}$

**複数原子の集まり**

原子1個あたり       $\vec{m}$  ランダム      整列

**自発磁場の発生**  
 ※外部磁場を切っても整列が崩れにくいものが永久磁石になる。

外部磁場なし      外部磁場  $\vec{B}_{ext}$        $\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_m$

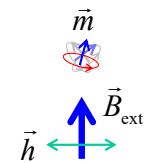
電子の公転軌道(電流ループ面)がランダムに変化していると捉えた方がよい。

源, 理工系のための電磁気学, p.112, 学術図書

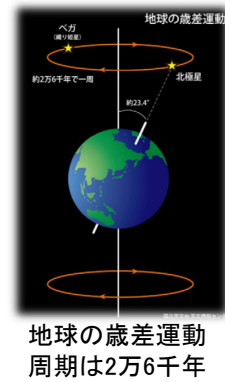
# 磁気共鳴 MR

**磁気共鳴 magnetic resonance**  
 スピン共鳴ともいう。磁気モーメント  $m$  に静磁界  $H$  を加えると、 $N = m \times B$  のトルクが働き、 $m$  は  $B$  の周りを歳差運動(ラーモアの歳差運動)することが知られている。

## 歳差運動



このときの角振動数は  $\omega = \gamma H$  と表される。ここで、 $\gamma$  は回転磁気比(gyromagnetic ratio)である。このままだと  $m$  の歳差運動は減衰してしまう。しかし、 $B$  に垂直に高周波磁界  $h (f = \omega / 2\pi)$  を加えると上式の条件が満たされる周波数で共鳴が起こり、 $m$  は  $h$  からエネルギーを得て歳差運動を続け高周波電力を吸収する(共鳴吸収)。共鳴吸収を観測するのに、 $\omega$  を固定し  $B$  を変化させる場合と  $B$  を固定し  $\omega$  を変化させる場合とがある。共鳴周波数、共鳴磁場、共鳴半値幅などの値から物質のミクロな性質を研究することができ、物性物理学、化学、生物学、医学などの分野で広く利用されている。磁気モーメントが核スピンの伴う場合は核磁気共鳴であり、電子のスピンまたは軌道運動に伴う磁気モーメントの場合は電子スピン共鳴である。また  $\mu$  中間子を磁気探針とするものを  $\mu$  SR (muon spin resonance; rotation) と呼ぶ。



# 磁気ダイポールモーメントの演習

13

【演習】図に示すような導線の枠 ABCDEFA に電流  $I$  [A] が流れている。磁気双極子モーメントの大きさと方向を求めよ。(演習書, 6.12)

【解答】二つの長方形ループの重ね合わせとして考える。ABCDの面積を $S_1$ 、DEFAの面積を $S_2$ とする。

各ループ電流の磁気モーメントは

$$\vec{m}_1 = I\vec{S}_1 = Iab(-\hat{z})$$

$$\vec{m}_2 = I\vec{S}_2 = Ibh\hat{y}$$

磁気モーメントの合成は

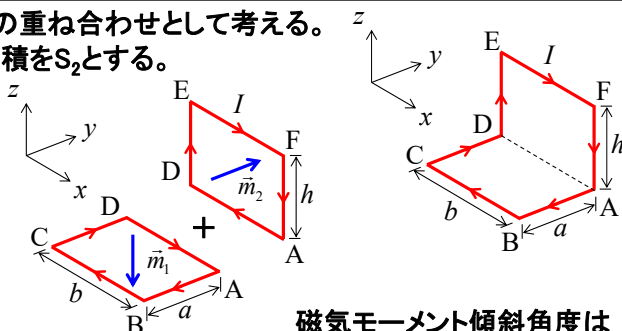
$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$$

$$= Iab(-\hat{z}) + Ibh\hat{y}$$

磁気モーメントの大きさは

$$|\vec{m}| = m = \sqrt{(Iab)^2 + (Ibh)^2}$$

$$= Ib\sqrt{a^2 + h^2}$$

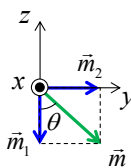


磁気モーメント傾斜角度は

$$\tan \theta = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{m_2}{m_1}$$

$$= \tan^{-1} \frac{Ibh}{Iab} = \tan^{-1} \frac{h}{a}$$



# 磁気ダイポールモーメントの演習

14

【演習】図に示すように、無限長直線導線と円形導線があり、それぞれに  $I_1, I_2$  [A] の電流が図のように流れている。円形導線を含む面と直線導線が直角の場合に、円形導線に作用する回転力を求めよ。ただし、直線導線と円形導線の中心との距離は  $d$  [m] で、円形導線の半径は  $a$  [m] である。また、 $a < d$  とする。(演習書, 6.14)

【解答】無限長直線電流  $I_1$  が作る磁場は

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\phi} \quad (1)$$

円形電流  $I_2$  の磁気ダイポールモーメントは

$$\vec{m} = I\vec{S} = I_2 \pi a^2 (-\hat{z}) \quad (2)$$

$a < d$  の条件であれば、 $I_1$  が  $I_2$  上に作る磁場はほぼ一様で方向は上向きになるので、

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{y} \quad (3)$$

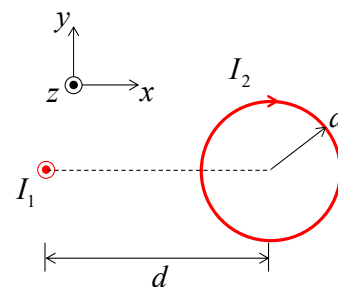
(注)  $a \ll d$  が成立しないケースでは、(3)は成立しない。

従って、円形電流にはたらくトルクは、

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$

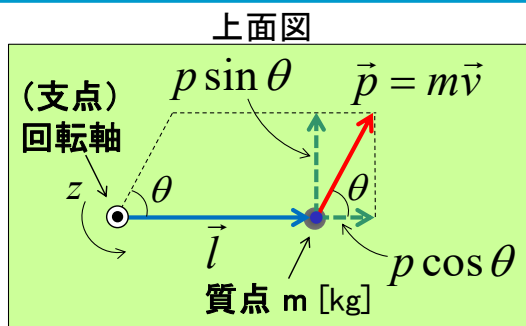
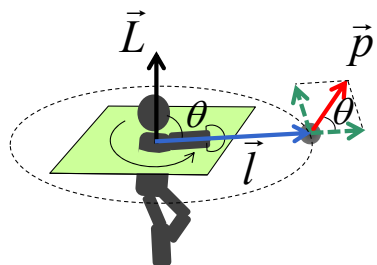
$$= I_2 \pi a^2 (-\hat{z}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \hat{y}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 \pi a^2}{2\pi d} \hat{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a^2}{2d} \hat{x} \quad (4)$$



# 角運動量とは？

15



$$\vec{L} = lp \sin \theta \hat{z} = \vec{l} \times \vec{p}$$

$$[\text{J}\cdot\text{s}] = [\text{m}] \times [\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}] = [\text{m}] \times [\text{N}\cdot\text{s}]$$

同じ角運動量  $L$  ならば、距離  $l$  が小さいほど運動量  $p$  は大きくなる  
(速度  $v$  が大きくなる = 高速回転)



# 角運動量と力のモーメント(トルク)

16

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$$

$$= m \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v})$$

$$= m \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \right]$$

$$= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a})$$

$$= 0 + \vec{r} \times m\vec{a}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \vec{N}$$

運動	並進運動	回転運動
式	$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad (2)$
式の意味	運動量の時間変化が力に相当する。	角運動量の時間変化が力のモーメントに相当する。
式の解釈	加える力がいかに大きいか、運動量の変化は大きい。 運動量の大きな物体を急停止するには、大きな力が必要である。 小さな力であっても、時間をかければ、運動量の大きな物体を減速させることができる。	加える力のモーメントがいかに大きいか、角運動量の変化は大きい。 角運動量の大きな物体の回転を急停止するには、大きな力のモーメントが必要である。 小さな力のモーメントであっても、時間をかければ、角運動量の大きな物体の回転を減速させることができる。

(1) 運動量の微分 = 力

(2) 角運動量の微分 = 力のモーメント(トルク)