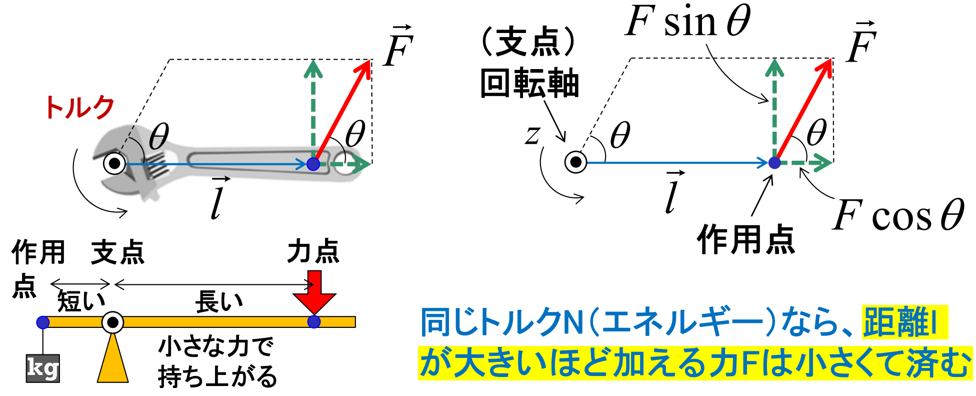
磁気ダイポールモーメント

1st 2011/04/22
Lst 2023/10/27

トルク（力のモーメント）とは？



同じトルクN（エネルギー）なら、距離lが大きいほど加える力Fは小さくて済む

$$\vec{N} = lF\sin\theta\hat{z} = \vec{l}\times\vec{F}$$

[N・m] = [m] [N] = [J]

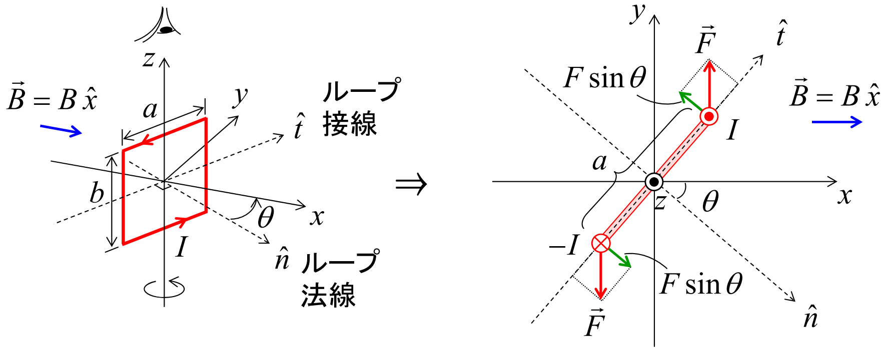
マーク・レヴィ著，森田由子訳，ひらめきの物理学，pp.304-305，SBクリエイティブ

ノート： https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2_magnetic_dipole.pdf

磁気ダイポールモーメント①

モーメントとは？・・・軸周りの回転を起こす力（エネルギー）または、力の大きさと回転中心までの距離の積で表される物理量

外部磁場の向きに一致（追随）するように自身の方向を回転させる。



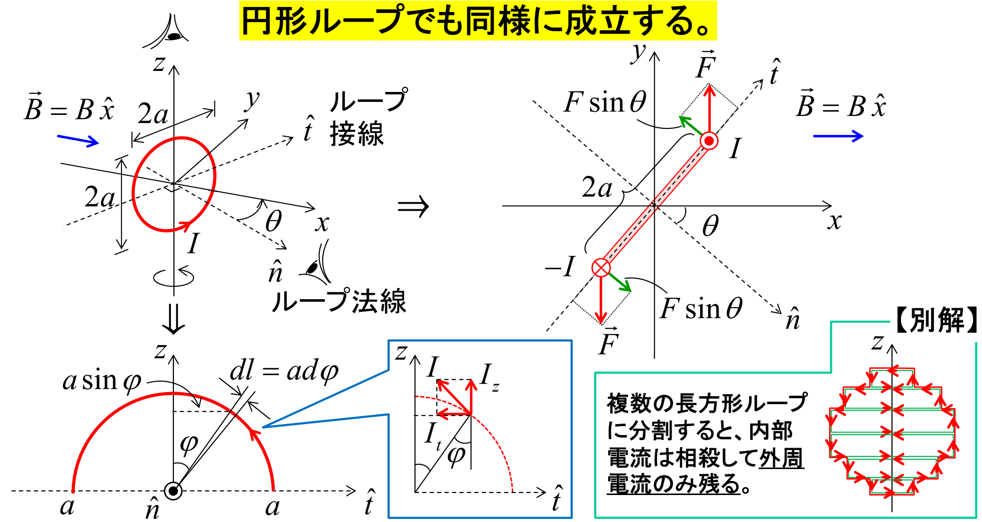
$$\vec{N} = I\vec{S}\times\vec{B} = \vec{m}\times\vec{B}$$

[N・m] = [A・m²] [Wb/m²] = [A・Wb]

ノート： https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2_magnetic_dipole.pdf

磁気ダイポールモーメント②

円形ループでも同様に成立する。

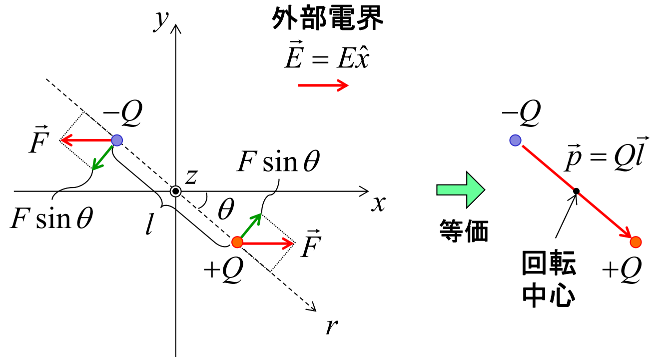


$$\vec{N} = I\vec{S}\times\vec{B} = \vec{m}\times\vec{B}$$

ノート： https://www.kusamalab.org/lecture/em2/B2_magnetic_dipole.pdf

電気ダイポールモーメント

モーメントとは？
原点を中心に回転運動を起こす能力の大きさ、能率を表す。

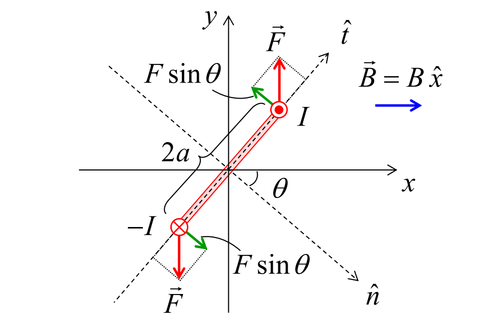
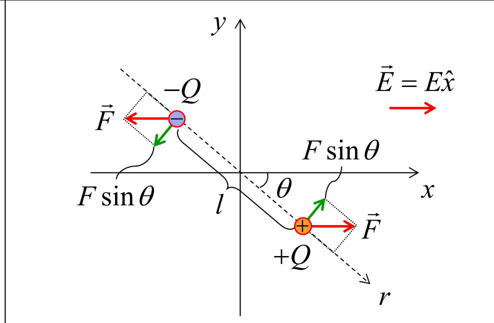


電場Eの中に電荷±Qで距離lの電気ダイポールを置くと、次のトルクNが発生する。ここで、p=Qlを電気ダイポールモーメントと呼ぶ。

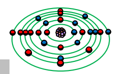
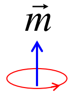
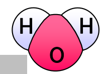
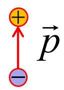
$$\vec{N}=Q\vec{l}\times\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E}$$

[N･m] = [C] [m] [V/m] = [C･m] [V/m]

ダイポールモーメントとトルク

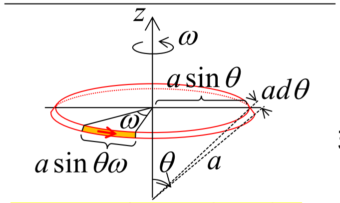
磁気ダイポールモーメント	電気ダイポールモーメント
	
磁場Bの中にループ面積Sの電流Iを置くと、次に示すトルクNが発生する。ここで、m=ISを磁気ダイポールモーメントと呼ぶ。	電場Eの中に電荷±Qで距離lの電気ダイポールを置くと、次のトルクNが発生する。ここで、p=Qlを電気ダイポールモーメントと呼ぶ。
$\vec{N}=I\vec{S}\times\vec{B}=\vec{m}\times\vec{B}$	$\vec{N}=Q\vec{l}\times\vec{E}=\vec{p}\times\vec{E}$

ダイポールモーメントのまとめ

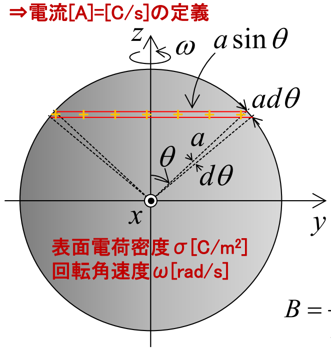
磁気ダイポールモーメント	電気ダイポールモーメント
電流  $\vec{m}=I\vec{S}$  ループ面積（方向は面に垂直で右ねじが正）	電荷  $\vec{p}=Q\vec{l}$  電荷間の距離（方向は－から＋の方向）
外部磁場によるトルク	外部電界によるトルク
$\vec{N}=\vec{m}\times\vec{B}$	$\vec{N}=\vec{p}\times\vec{E}$

回転帯電球中心の磁場（復習）

【演習】回転帯電球中心の磁場を求めよ。（教科書 章末6.14）



1秒間に黄色塗りつぶし部分にある電荷Q=asinθ ω(adθ)σ[C]が移動
⇒電流[A]=[C/s]の定義



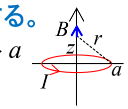
$dI=\sigma a^2\sin\theta\omega d\theta$ [C/s] 微小ループ電流

微小ループ電流I [A]が作る磁場はビオサバールの法則より

$$\boxed{dB=\frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}}$$

ただし、aはループ半径、rはループから観測点までの距離なので次の置き換えをする。

$$I\to\sigma a^2\sin\theta\omega d\theta,\ a\to a\sin\theta,\ r\to a$$

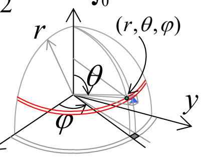


球表面電流全体が中心に作る磁場は

$$B=\int_0^\pi dB=\int_0^\pi\frac{\mu_0\sigma a^2\sin\theta\omega d\theta a^2\sin^2\theta}{2a^3}=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega a\int_0^\pi\sin^3\theta d\theta$$

3倍角の公式

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta\\&=(2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta\\&=2\sin\theta\cos^2\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta\\&=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+\sin\theta-2\sin^3\theta\\&=2\sin\theta-2\sin^3\theta+\sin\theta-2\sin^3\theta\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$



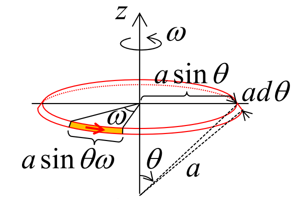
【前提】導体球に電荷を与えてもお互いにクーロン力で反発するため、球内部には電荷は集まらない。お互いに反発する電荷同志が一番落ち着くのは、導体球の外側の殻の部分であり、この部分の表面電荷密度がσ [C/m²]。つまり、導体球自体は内部が空でも導体で埋まっていても同じ。

従って、回転帯電球中心の磁場は

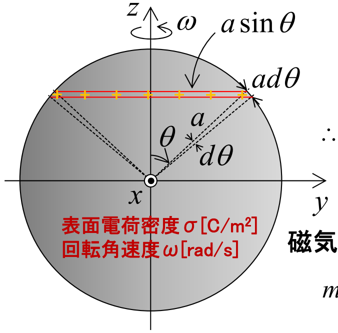
$$B=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega a\frac{1}{4}\left[-3\cos\theta+\frac{1}{3}\cos 3\theta\right]_0^\pi=\frac{1}{2}\mu_0\sigma\omega a\frac{1}{4}\cdot\frac{16}{3}=\frac{2}{3}\mu_0\sigma\omega a\ [\mathrm{T}]$$

回転帯電球の磁気モーメント

【演習】回転帯電球の磁気モーメントを求めよ。ただし、角速度ω[rad/s]、半径a[m]、表面電荷密度をσ[C/m²]とする。(教科書 章末6.14改)



1秒間に黄色塗りつぶし部分にある
電荷Q=asinθ ω(adθ)σ[C]が移動
⇒電流[A]=[C/s]の定義



$$\begin{cases} dI = \sigma a^2 \sin\theta\omega d\theta \ [\mathrm{C/s}] \\ S = \pi (a\sin\theta)^2 \ [\mathrm{m^2}] \end{cases}$$

微小ループ電流

微小ループの内部面積

微小ループ電流が作る磁気ダイポールモーメント

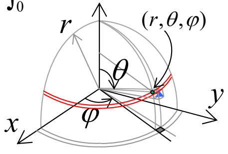
$$dm = dIS = \sigma a^2 \sin\theta\omega d\theta \cdot \pi (a\sin\theta)^2 = \pi\sigma\omega a^4 \sin^3\theta d\theta$$

表面電荷全体が作る磁気ダイポールモーメント

$$m = \int_0^\pi dm = \int_0^\pi \pi\sigma\omega a^4 \sin^3\theta d\theta = \pi\sigma\omega a^4 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

3倍角の公式を使わない方法

$$\sin^3\theta = \sin^2\theta\sin\theta$$
$$= (1-\cos^2\theta)\sin\theta$$
$$= \sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta$$
$$\therefore \int \sin^3\theta d\theta = \int(\sin\theta - \sin\theta\cos^2\theta)d\theta$$
$$= -\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta$$



【前提】導体球に電荷を与えてもお互いにクーロン力で反発するため、球内部には電荷は集まらない。お互いに反発する電荷同志が一番落ち着くのは、導体球の外側の殻の部分であり、この部分の表面電荷密度がσ [C/m²]。つまり、導体球自体は内部が空でも導体で埋まっていても同じ。

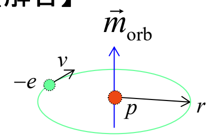
磁気ダイポールモーメント

$$m = \pi\sigma\omega a^4 \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi = \pi\sigma\omega a^4 \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\pi\sigma\omega a^4 \ [\mathrm{A\cdot m^2}]$$

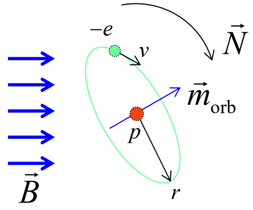
磁気ダイポールモーメント

【演習】水素原子の軌道電子による軌道電流 I_{orb} と軌道磁気ダイポールモーメント m_{orb} を求めよ。ただし、軌道半径は r = 0.53 Å とする。また、水素原子に外部から B = 1 TT(テラテスラ=10¹² T) の磁場を加えた場合の最大トルク N を求めよ。

【解答】



$$r = 0.53\times10^{-10}\ \mathrm{m}$$
$$m = 9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$$



クーロン力　向心力

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$
$$v^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mr}$$
$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}}$$
$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr^3}}$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{e}{\sqrt{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}}$$

軌道電流

$$I_{\rm orb} = ef = e\frac{\omega}{2\pi} = e\frac{v}{2\pi r}$$
$$= \frac{e^2}{\sqrt{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}}\ [\mathrm{A}]$$

磁気ダイポールモーメント

$$\vec{m} = I\vec{S}$$
$$= \frac{e^2\pi r^2}{\sqrt{16\pi^3\varepsilon_0 mr^3}} = \sqrt{\frac{e^4 r}{16\pi\varepsilon_0 m}}$$

トルク(最大)

$$\vec{N} = \vec{m}\times\vec{B} = \sqrt{\frac{e^4 r}{16\pi\varepsilon_0 m}}B$$

mの方向が外部磁場Bの方向に一致(追随)するようにトルクを生じる。

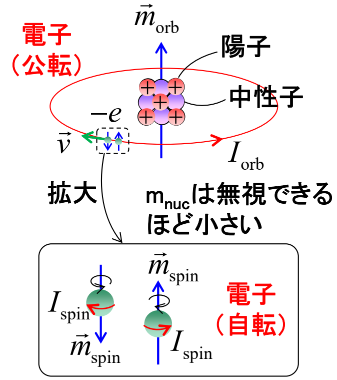
Answer: I=1.05 mA, m=9.26×10⁻²⁴ Am², N=9.26×10⁻¹² Nm

原子の磁気ダイポールモーメント

磁気モーメント　軌道磁気モーメント

$$\vec{m} = \vec{m}_{\rm orb} + \vec{m}_{\rm spin}$$

スピン
磁気モーメント



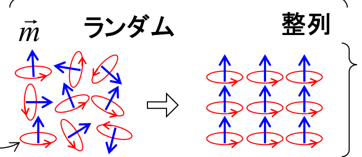
電子の電荷は負なので、スピンの方向と電流の向きは逆

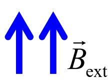
$$m_{\rm spin} = \mu_B = \frac{eh}{4\pi m} = 9.27\times10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2}$$

電子1つあたりのスピン磁気モーメント(ボーア磁子)

複数原子の集まり

原子1個あたり





自発磁場の発生

※外部磁場を切っても整列が崩れにくいものが永久磁石になる。

電子の公転軌道(電流ループ面)がランダムに変化していると捉えた方がよい。

外部磁場なし　外部磁場

$$\vec{B} = \vec{B}_{\rm ext} + \vec{B}_{\rm m}$$

原, 理工系のための電磁気学, p.112, 学術図書

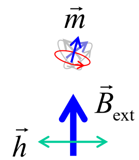
磁気共鳴 MR

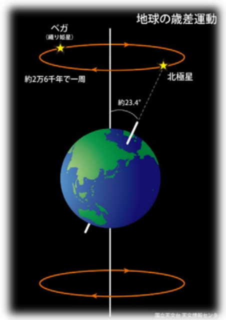
磁気共鳴 magnetic resonance

スピン共鳴ともいう。磁気モーメントmに静磁場H=B/μを一時的に加えるとN=m×Bのトルクが働き、mはBの周りを歳差運動(ラーモアの歳差運動)することが知られている。この歳差運動の角振動数はω=γHと表される。ここで、γは回転磁気比(gyromagnetic ratio)である。

このままだとmの歳差運動は減衰してしまう。しかし、Bと垂直に高周波磁界h(f=ω/2π)を加えるとω=γHが満たされる周波数で共鳴が起こり、mはhからエネルギーを得て歳差運動を続け高周波電力を吸収する(共鳴吸収)。共鳴吸収を観測するのに、ωを固定しBを変化させる場合とBを固定しωを変化させる場合とがある。共鳴周波数、共鳴磁場、共鳴半値幅などの値から物質のミクロな性質を研究することができ、物性物理学、化学、生物学、医学などの分野で広く利用されている。磁気モーメントが核スピンに伴う場合は核磁気共鳴であり、電子のスピンまたは軌道運動に伴う磁気モーメントの場合は電子スピン共鳴である。また μ 中間子を磁気探針とするものを μSR(muon spin resonance; rotation)と呼ぶ。

歳差運動





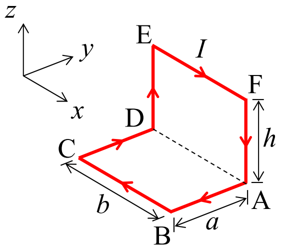
地球の歳差運動周期はT=1/f=2万6千年

東京理科大学理工学辞典編集委員会編, 理工学辞典, p.598, 日刊工業新聞社より引用

磁気ダイポールモーメントの演習

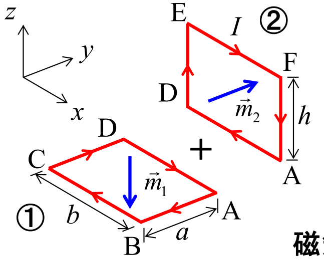
【演習】図に示すような導線の枠 ABCDEFA に電流 I [A]が流れている。磁気双極子モーメントの大きさと方向を求めよ。(演習書 応用6.12)

【解答】二つの長方形ループの重ね合わせとして考える。
①ABCDの面積をS_1、②DEFAの面積をS_2とする。



各ループ電流①②の磁気モーメントは

$$\begin{cases}\vec{m}_1 = I\vec{S}_1 = Iab(-\hat{z}) \\ \vec{m}_2 = I\vec{S}_2 = Ibh\hat{y}\end{cases}$$

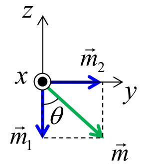


磁気モーメントの合成は

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2$$
$$= Iab(-\hat{z}) + Ibh\hat{y}$$

磁気モーメントの大きさは

$$|\vec{m}| = m = \sqrt{(Iab)^2 + (Ibh)^2}$$
$$= Ib\sqrt{a^2 + h^2}$$



磁気モーメント傾斜角度は

$$\tan\theta = \frac{m_2}{m_1}$$
$$\theta = \tan^{-1}\frac{m_2}{m_1}$$
$$= \tan^{-1}\frac{Ibh}{Iab} = \tan^{-1}\frac{h}{a}$$

磁気ダイポールモーメントの演習

【演習】無限長直線導線と円形導線があり、それぞれに I_1, I_2 [A] の電流が図のように流れている。円形導線を含む面と直線導線が直角の場合、円形導線に作用する回転力を求めよ。ただ し、直線導線と円形導線の中心との距離は d [m]で、円形導線の半径はa [m]である。また、a < d とする。(演習書 応用6.14)

【解答】無限長直線電流 I_1 が作る磁場は

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{\phi} \qquad (1)$$

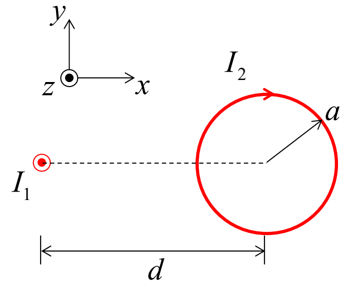
円形電流 I_2 の磁気ダイポールモーメントは

$$\vec{m} = I\vec{S} = I_2\pi a^2(-\hat{z}) \qquad (2)$$

a < d の条件であれば、I_1 が I_2 上に作る磁場はほぼ一様で方向は上向きになるので

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\hat{y} \qquad (3)$$

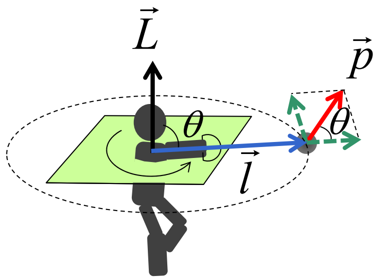
と見なせる。(注) a << d が成立しないケースでは(3)は成立しない。

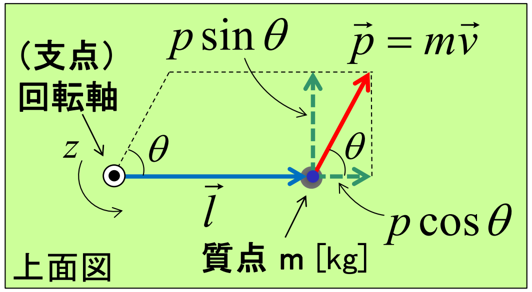


従って、円形電流にはたらくトルクは

$$\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$$
$$= I_2\pi a^2(-\hat{z}) \times \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\hat{y}$$
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 \pi a^2}{2\pi d}\hat{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a^2}{2d}\hat{x} \qquad (4)$$

角運動量とは？

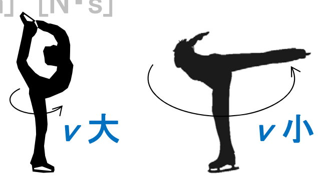




$$\vec{L} = lp\sin\theta\hat{z} = \vec{l} \times \vec{p}$$

[J・s] = [m] [kg・m/s] = [m] [N・s]

同じ角運動量Lなら、距離lが小さいほど運動量 p は大きくなる(速度vが大きくなる＝高速回転になる)。



マーク・レヴィ著, 森田由子訳, ひらめきの物理学, pp.304-305, SBクリエイティブ

角運動量とトルクの関係

角運動量の微分

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$
$$= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v})$$
$$= m\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v})$$
$$= m\left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}\right]$$
$$= m(\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a})$$
$$= 0 + \vec{r} \times m\vec{a}$$
$$= \vec{r} \times \vec{F}$$
$$= \vec{N} \quad \text{トルク}$$

(1) 運動量の微分＝力

(2) 角運動量の微分＝力のモーメント(トルク)

運動	並進運動	回転運動
式	$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$ (1)	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$ (2)
式の意味	運動量の時間変化が力に相当する。	角運動量の時間変化が力のモーメントに相当する。
式の解釈	加える力が大きいほど、運動量の変化は大きい。 運動量の大きな物体を急停止するには、大きな力が必要である。 小さな力であっても、時間をかければ、運動量の大きな物体を減速させることができる。	加える力のモーメントが大きいほど、角運動量の変化は大きい。 角運動量の大きな物体の回転を急停止するには、大きな力のモーメントが必要である。 小さな力のモーメントであっても、時間をかければ、角運動量の大きな物体の回転を減速させることができる。

物理解体新書 http://www.buturigaku.net/main01/RigidBody/RigidBody17.html