磁性体の境界条件

v1.5 Jul.2019　　番号:______________________　氏名:__________________________

1. 磁界の境界条件[*1]

図 1 に示すように領域 1 と領域 2 で挟まれた境界面 S_B を挟む薄い長方形の積分路 C を考える。領域 1 の磁界を $\vec{H}_1$，領域 2 の磁界を $\vec{H}_2$ とする。境界面では $h \to 0$ の極限を取った次の**アンペアの法則**が成り立つ[*2]。

$$\lim_{h\to 0} \oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{s} \tag{1}$$

式 (1) 左辺において境界 S_B に対して法線成分に関する線積分は $h \to 0$ の極限を取るのでゼロになる。一方，式 (1) 右辺の面積分は $h \to 0$ の極限より $S \to 0$ となるが，境界表面上の厚みを持たない面電流 J_S [A/m] は残る。即ち

$$\vec{H}_2 \bullet \hat{t}\Delta l + \vec{H}_1 \bullet (-\hat{t})\Delta l = \vec{J}_S \bullet \hat{s}\Delta l$$

$$\Rightarrow (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \bullet \hat{t} = \vec{J}_S \bullet \hat{s}$$

$$\Rightarrow \hat{t} \bullet (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = (\hat{t} \times \hat{n}) \bullet \vec{J}_S \tag{2}$$

ただし，式の見通しを良くするために $\hat{n}_{21} = \hat{n}$ と置いた。ここで右辺にスカラー三重積の公式[*3]を使うと

$$\hat{t} \bullet (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \hat{t} \bullet (\hat{n} \times \vec{J}_S)$$

$$\Rightarrow \vec{H}_2 - \vec{H}_1 = \hat{n} \times \vec{J}_S \tag{3}$$

が得られる。さらに両辺に $\hat{n}\times$ を掛けると

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{J}_S = -\vec{J}_S$$

$$\Rightarrow \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \tag{4}$$

が得られる[*4]。式 (4) を**ベクトル形の磁界接線成分に関する境界条件**と呼ぶ。式 (4) について具体的な 2 つのケースについて考えてみる。まず図 2(a) のような $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ のケースに式 (4) を適用すると

$$\hat{n} \times \vec{H}_1 - \hat{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_S$$

$$\Rightarrow |\hat{n}||\vec{H}_1| \sin\theta_1 \hat{s} - |\hat{n}||\vec{H}_2| \sin\theta_2 \hat{s} = J_S \hat{s}$$

$$\Rightarrow H_{1t}\hat{s} - H_{2t}\hat{s} = J_S\hat{s}$$

$$\Rightarrow H_{1t} - H_{2t} = J_S \tag{5}$$

が得られる。一方，図 2(b) の $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ のケースに式 (4) を適用すると

$$\hat{n} \times \vec{H}_1 - \hat{n} \times \vec{H}_2 = \vec{J}_S$$

$$\Rightarrow |\hat{n}||\vec{H}_1| \sin\theta_1 (-\hat{s}) - |\hat{n}||\vec{H}_2| \sin\theta_2 (-\hat{s}) = J_S \hat{s}$$

$$\Rightarrow -H_{1t}\hat{s} + H_{2t}\hat{s} = J_S\hat{s}$$

$$\Rightarrow H_{2t} - H_{1t} = J_S \tag{6}$$

が得られる。式 (5) および式 (6) を**スカラー形の磁界接線成分に関する境界条件**と呼ぶ。スカラー形式では $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ の取り方によって H_{1t}, H_{2t} の符号が逆になる。

2. 磁束密度の境界条件

今度は，図 3 に示すような領域 1 と領域 2 で挟まれた境界面 S_B を挟む薄い円柱形の閉面 S を考える。領域 1 の磁束密度を $\vec{B}_1$，領域 2 の磁束密度を $\vec{B}_2$ とする。境界面では $h \to 0$ の極限を取った次の**磁束密度に関するガウスの法則**が成り立つ。

$$\lim_{h\to 0} \oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \tag{7}$$

式 (7) において，接線成分 B_{1t}, B_{2t} に関する面積分は $h \to 0$ の極限を取るので 0 になり，法線成分 B_{1n}, B_{2n} の面積分だけが残る。即ち

$$\vec{B}_1 \bullet \hat{n}\Delta S - \vec{B}_2 \bullet \hat{n}\Delta S = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 \bullet \hat{n} - \vec{B}_2 \bullet \hat{n} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{n} \bullet (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \tag{8}$$

が得られる[*5]。式 (8) を**ベクトル形の磁束密度法線成分に関する境界条件**と呼ぶ。式 (8) の内積を計算すると次式が得られる。

$$B_1 \cos\theta_1 - B_2 \cos\theta_2 = 0$$

$$\Rightarrow B_{1n} - B_{2n} = 0 \tag{9}$$

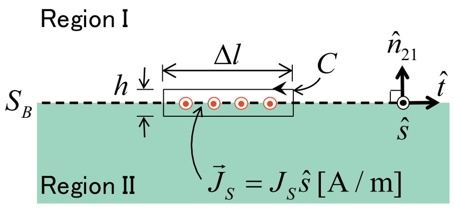

図 1　境界面 S_B を挟んで上側を領域 1，下側を領域 2 とした場合において境界面に沿った薄い長方形の積分路 C を考える。積分路で囲まれた面積は $S = h\Delta l$ である。境界 S_B 上の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{n}_{21}, \hat{t}, \hat{s}$ とする。面電流密度 $\vec{J}_S$ の方向は積分路 C に対して右ネジの方向を正にとる。

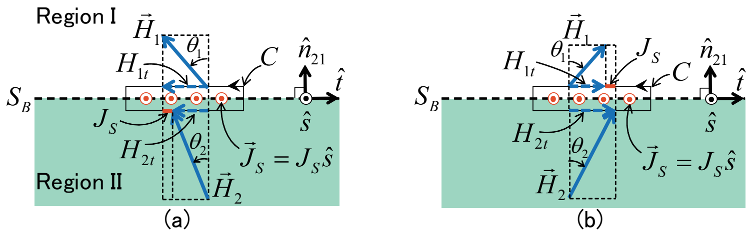

図 2　ケース (a) は H_{1t} が積分路 C の順方向，H_{2t} が逆方向を向いている場合を表し，ケース (b) は H_{1t} が積分路 C の逆方向、H_{2t} が順方向を向いている場合を表す。

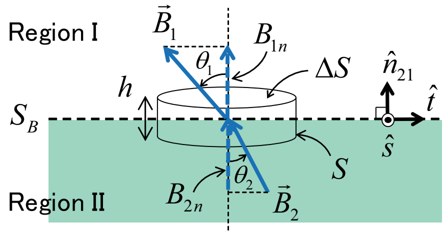

図 3　境界面 S_B を挟んで上側領域 1 の磁束密度を $\vec{B}_1$、下側領域 2 磁束密度を $\vec{B}_2$ のとした場合において，境界面に沿った薄い円柱状の積分面 (上下面積が ΔS で高さが h) を考える。境界 S_B 上の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{n}, \hat{t}, \hat{s}$ とする。

式 (9) を**スカラー形の磁束密度法線成分に関する境界条件**と呼ぶ。

3. 一般媒質の境界条件

先に導出した接線成分に関する境界条件 (4) 式と法線成分に関する境界条件 (8) 式より，損失のある (導電率 σ が有限で電流が流れる) 一般媒質については次のベクトル形の境界条件が成立する。

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \tag{10}$$

$$\hat{n} \bullet (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \tag{11}$$

これは磁界の接線成分の差に相当する面電流が境界上を流れ，磁束密度の法線成分は連続であることを示している。

4. 無損失媒質の境界条件

先に導出した接線成分に関する境界条件 (4) 式と法線成分に関する境界条件 (8) 式より，損失のない媒質については $\vec{J}_S = 0$ より，次のベクトル形の境界条件が成立する。

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \tag{12}$$

$$\hat{n} \bullet (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \tag{13}$$

これら 2 つの式は境界を挟んだ磁界の接線成分は等しく，磁束密度の法線成分は連続であることを示している。**最もよく使われるのは次式のスカラー形式**である。

$$H_{1t} = H_{2t} \tag{14}$$

$$B_{1n} = B_{2n} \tag{15}$$

[*1] 異なる媒質境界面においてのみ成立する条件 (boundary condition)

[*2] 電流 I [A] は電流密度 $\vec{J}$ [A/m^2] を使って表すと $I = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{s}$ となる。

[*3] $\vec{A} \bullet (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \bullet (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \bullet (\vec{C} \times \vec{A})$

[*4] あるベクトル $\vec{A}$ と法線ベクトル $\hat{n}$ との外積をとることは，境界に対する接線成分 A_t (tangential component) を求めることに等しい。

[*5] あるベクトル $\vec{A}$ と法線ベクトル $\hat{n}$ との内積をとることは，境界に対する法線成分 A_n (normal component) を求めることに等しい。