

1. 磁界の境界条件*1

図1に示すように領域1と領域2で挟まれた境界面 S_B を挟む薄い長方形の積分路 C を考える。領域1の磁界を \vec{H}_1 、領域2の磁界を \vec{H}_2 とする。境界面では $h \rightarrow 0$ の極限を取った次のアンペアの法則が成り立つ*2。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

式(1)左辺において境界 S_B に対して法線成分に関する線積分は $h \rightarrow 0$ の極限を取るのでゼロになる。一方、式(1)右辺の面積分は $h \rightarrow 0$ の極限より $S \rightarrow 0$ となるが、境界表面上の厚みを持たない面電流 J_S [A/m] は残る。即ち

$$\begin{aligned} \vec{H}_2 \cdot \hat{t} \Delta l + \vec{H}_1 \cdot (-\hat{t}) \Delta l &= \vec{J}_S \cdot \hat{s} \Delta l \\ \Rightarrow (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot \hat{t} &= \vec{J}_S \cdot \hat{s} \\ \Rightarrow \hat{t} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= (\hat{t} \times \hat{n}) \cdot \vec{J}_S \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、式の見通しを良くするために $\hat{n}_{21} = \hat{n}$ と置いた。ここで右辺にスカラー三重積の公式*3を使うと

$$\begin{aligned} \hat{t} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \hat{t} \cdot (\hat{n} \times \vec{J}_S) \\ \Rightarrow \vec{H}_2 - \vec{H}_1 &= \hat{n} \times \vec{J}_S \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。さらに両辺に $\hat{n} \times$ を掛けると

$$\begin{aligned} \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \hat{n} \times \hat{n} \times \vec{J}_S = -\vec{J}_S \\ \Rightarrow \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_S \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる*4。式(4)をベクトル形の磁界接線成分に関する境界条件と呼ぶ。式(4)について具体的な2つのケースについて考えてみる。まず図2(a)のような \vec{H}_1, \vec{H}_2 のケースに式(4)を適用すると

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{H}_1 - \hat{n} \times \vec{H}_2 &= \vec{J}_S \\ \Rightarrow |\hat{n}| |\vec{H}_1| \sin \theta_1 \hat{s} - |\hat{n}| |\vec{H}_2| \sin \theta_2 \hat{s} &= J_S \hat{s} \\ \Rightarrow H_{1t} \hat{s} - H_{2t} \hat{s} &= J_S \hat{s} \\ \Rightarrow H_{1t} - H_{2t} &= J_S \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる。一方、図2(b)の \vec{H}_1, \vec{H}_2 のケースに式(4)を適用すると

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \vec{H}_1 - \hat{n} \times \vec{H}_2 &= \vec{J}_S \\ \Rightarrow |\hat{n}| |\vec{H}_1| \sin \theta_1 (-\hat{s}) - |\hat{n}| |\vec{H}_2| \sin \theta_2 (-\hat{s}) &= J_S \hat{s} \\ \Rightarrow -H_{1t} \hat{s} + H_{2t} \hat{s} &= J_S \hat{s} \\ \Rightarrow H_{2t} - H_{1t} &= J_S \end{aligned} \quad (6)$$

が得られる。式(5)および式(6)をスカラー形の磁界接線成分に関する境界条件と呼ぶ。スカラー形式では \vec{H}_1, \vec{H}_2 の取り方によって H_{1t}, H_{2t} の符号が逆になる。

2. 磁束密度の境界条件

今度は、図3に示すような領域1と領域2で挟まれた境界面 S_B を挟む薄い円柱形の閉面 S を考える。領域1の磁束密度を \vec{B}_1 、領域2の磁束密度を \vec{B}_2 とする。境界面では $h \rightarrow 0$ の極限を取った次の磁束密度に関するガウスの法則が成り立つ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (7)$$

式(7)において、接線成分 B_{1t}, B_{2t} に関する面積分は $h \rightarrow 0$ の極限を取るので0になり、法線成分 B_{1n}, B_{2n} の面積分だけが残る。即ち

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 \cdot \hat{n} \Delta S - \vec{B}_2 \cdot \hat{n} \Delta S &= 0 \\ \Rightarrow \vec{B}_1 \cdot \hat{n} - \vec{B}_2 \cdot \hat{n} &= 0 \\ \Rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

が得られる*5。式(8)をベクトル形の磁束密度法線成分に関する境界条件と呼ぶ。式(8)の内積を計算すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} B_1 \cos \theta_1 - B_2 \cos \theta_2 &= 0 \\ \Rightarrow B_{1n} - B_{2n} &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

*1 異なる媒質境界面においてのみ成立する条件 (boundary condition)

*2 電流 I [A] は電流密度 \vec{J} [A/m²] を使って表すと $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ となる。

*3 $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$

*4 あるベクトル \vec{A} と法線ベクトル \hat{n} との外積をとることは、境界に対する接線成分 A_t (tangential component) を求めることに等しい。

*5 あるベクトル \vec{A} と法線ベクトル \hat{n} との内積をとることは、境界に対する法線成分 A_n (normal component) を求めることに等しい。

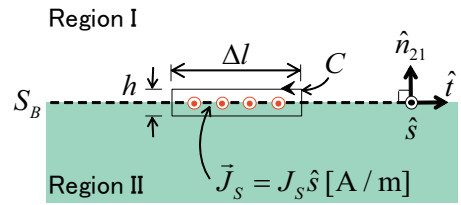


図1 境界面 S_B を挟んで上側を領域1, 下側を領域2とした場合において境界面に沿った薄い長方形の積分路 C を考える。積分路で囲まれた面積は $S = h\Delta l$ である。境界 S_B 上の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{n}_{21}, \hat{t}, \hat{s}$ とする。面電流密度 \vec{J}_S の方向は積分路 C に対して右ネジの方向を正にとる。

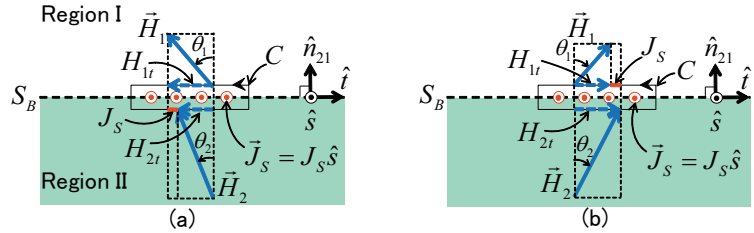


図2 ケース (a) は H_{1t} が積分路 C の順方向、 H_{2t} が逆方向を向いている場合を表し、ケース (b) は H_{1t} が積分路 C の逆方向、 H_{2t} が順方向を向いている場合を表す。

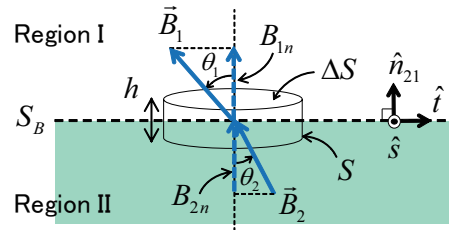


図3 境界面 S_B を挟んで上側領域1の磁束密度を \vec{B}_1 、下側領域2磁束密度を \vec{B}_2 のとした場合において、境界面に沿った薄い円柱状の積分面 (上下面積が ΔS で高さが h) を考える。境界 S_B 上の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{n}, \hat{t}, \hat{s}$ とする。

式(9)をスカラー形の磁束密度法線成分に関する境界条件と呼ぶ。

3. 一般媒質の境界条件

先に導出した接線成分に関する境界条件(4)式と法線成分に関する境界条件(8)式より、損失のある(導電率 σ が有限で電流が流れる)一般媒質については次のベクトル形の境界条件が成立する。

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \quad (10)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (11)$$

これは磁界の接線成分の差に相当する面電流が境界上を流れ、磁束密度の法線成分は連続であることを示している。

4. 無損失媒質の境界条件

先に導出した接線成分に関する境界条件(4)式と法線成分に関する境界条件(8)式より、損失のない媒質については $\vec{J}_S = 0$ より、次のベクトル形の境界条件が成立する。

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \quad (12)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (13)$$

これら2つの式は境界を挟んだ磁界の接線成分は等しく、磁束密度の法線成分は連続であることを示している。最もよく使われるのは次式のスカラー形式である。

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (14)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (15)$$