

磁性体の境界条件

1st. 2012/06/15Lst. 2022/01/24

境界条件とは？

異なる媒質どうしの境界面で生じる特別な条件
(静磁界の基本方程式の境界面限定版)

静磁界の 基本方程式	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$ アンペアの法則	$\hat{n}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$ 磁界の境界条件	$\hat{n}_{12} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_S$ 磁界の境界条件
静電界の 基本方程式	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ 保存場の性質	$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \hat{n}_{21} = 0$ 電界の境界条件	$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{12} = 0$ 電界の境界条件
静磁界の 基本方程式	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ 磁気ガウスの法則	$\hat{n}_{21} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$ 磁束密度の境界条件	$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ 磁束密度の境界条件
静電界の 基本方程式	$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = Q_m$ 磁界ガウスの法則	$\hat{n}_{21} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \sigma_m$ 磁界の境界条件2	$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \sigma_m$ 磁界の境界条件2
静電界の 基本方程式	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ ガウスの法則	$\hat{n}_{21} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma$ 電束密度の境界条件	$\hat{n}_{12} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma$ 電束密度の境界条件

境界面 S_B に引いた法線ベクトル \hat{n} の取り方が左右で逆になっていることに注意！

最もよく使う境界条件

$$E_{1t} = E_{2t}$$

保存場の性質

境界を挟んだ電界の接線成分は連続
(t: tangential, 接線成分の意味)

$$D_{1n} = D_{2n}$$

ガウスの法則

境界を挟んだ電束密度の法線成分は連続
(n: normal, 法線成分の意味)

※ただし、境界上の真電荷がゼロの場合

$$H_{1t} = H_{2t}$$

アンペアの法則

境界を挟んだ磁界の接線成分は連続
(t: tangential, 接線成分の意味)

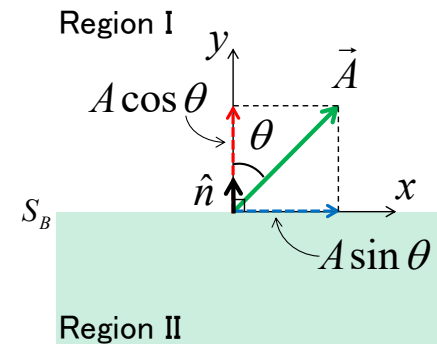
$$B_{1n} = B_{2n}$$

磁気ガウスの法則

境界を挟んだ磁束密度の法線成分は連続
(n: normal, 法線成分の意味)

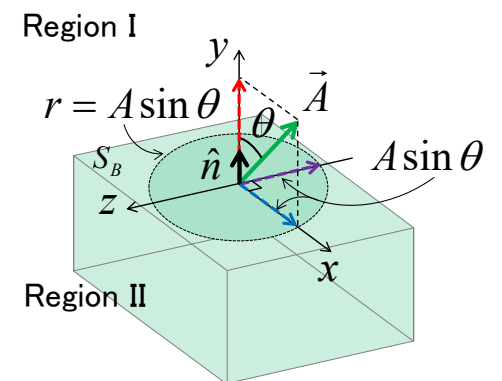
※ただし、境界上の伝導電流がゼロの場合

単位ベクトルとの内積, 外積



$$\hat{n} \cdot \vec{A} = |\hat{n}| |\vec{A}| \cos \theta = A \cos \theta$$

面に垂直な単位ベクトル \hat{n} とベクトル \vec{A} の内積を取れば、垂直成分が得られる



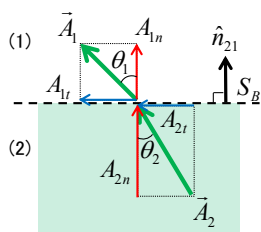
$$\hat{n} \times \vec{A} = |\hat{n}| |\vec{A}| \sin \theta (-\hat{z}) = A \sin \theta (-\hat{z})$$

面に垂直な単位ベクトル \hat{n} とベクトル \vec{A} の外積を取れば、90° 回転した接線成分ベクトルが得られる*

※ ベクトル \vec{A} から接線成分ベクトルを直接得るには $(\hat{n} \times \vec{A}) \times \hat{n}$ を計算する必要がある。

法線成分と接線成分の表現方法 ⁵

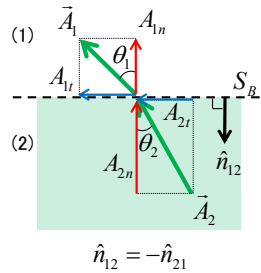
①単位法線ベクトルを上向きに取ったとき



$$\left\{ \begin{aligned} \hat{n}_{21} \cdot \vec{A}_1 &= |\hat{n}_{21}| |\vec{A}_1| \cos \theta_1 = A_1 \cos \theta_1 = A_{1n} \\ \hat{n}_{21} \cdot \vec{A}_2 &= |\hat{n}_{21}| |\vec{A}_2| \cos \theta_2 = A_2 \cos \theta_2 = A_{2n} \\ \hat{n}_{21} \times \vec{A}_1 &= |\hat{n}_{21}| |\vec{A}_1| \sin \theta_1 = A_1 \sin \theta_1 = A_{1t} \\ \hat{n}_{21} \times \vec{A}_2 &= |\hat{n}_{21}| |\vec{A}_2| \sin \theta_2 = A_2 \sin \theta_2 = A_{2t} \end{aligned} \right.$$

法線ベクトルと内積をとる = 法線成分の抽出
法線ベクトルと外積をとる = 接線成分の抽出

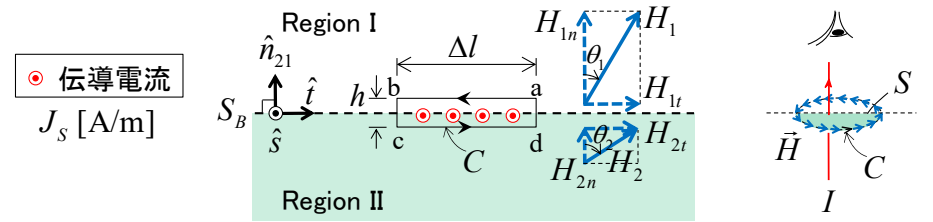
②単位法線ベクトルを下向きに取ったとき



$$\left\{ \begin{aligned} \hat{n}_{12} \cdot \vec{A}_1 &= |\hat{n}_{12}| |\vec{A}_1| \cos(\theta_1 + \pi) = -A_1 \cos \theta_1 = -A_{1n} \\ \hat{n}_{12} \cdot \vec{A}_2 &= |\hat{n}_{12}| |\vec{A}_2| \cos(\theta_2 + \pi) = -A_2 \cos \theta_2 = -A_{2n} \\ \hat{n}_{12} \times \vec{A}_1 &= |\hat{n}_{12}| |\vec{A}_1| \sin(\theta_1 + \pi) = -A_1 \sin \theta_1 = -A_{1t} \\ \hat{n}_{12} \times \vec{A}_2 &= |\hat{n}_{12}| |\vec{A}_2| \sin(\theta_2 + \pi) = -A_2 \sin \theta_2 = -A_{2t} \end{aligned} \right.$$

$\hat{n}_{12} = -\hat{n}_{21}$

磁界の境界条件(スカラー形) ⁶



境界面SB(h→0)におけるアンペールの法則より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad \text{ただし、} \vec{H} = \vec{H}_n + \vec{H}_t \quad (1)$$

積分経路 a → b → c → d → a に沿って線積分を実行すると、左辺は

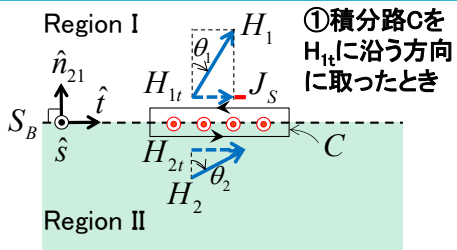
$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

$$= \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_a^b H_{1t} dl - \int_c^d H_{2t} dl \quad (3)$$

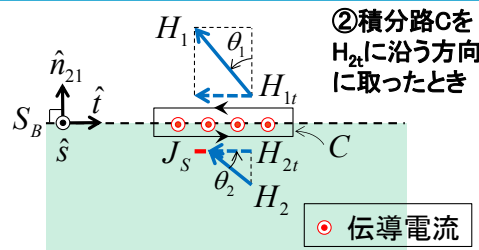
$$= -H_{1t} \Delta l + H_{2t} \Delta l = J_S \Delta l \quad \therefore \boxed{-H_{1t} + H_{2t} = J_S} \quad (4)$$

境界面SBを挟んだ磁界接線成分の差は境界上の線電流密度に等しい。

磁界の境界条件(ベクトル形) ⁷



①積分路CをH1tに沿う方向に取ったとき



②積分路CをH2tに沿う方向に取ったとき

スカラー形の磁界接線成分に関する境界条件

$$-H_{1t} + H_{2t} = J_S \quad (5) \quad H_{1t} - H_{2t} = J_S \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{n}_{21} \times \vec{H}_1 &= H_1 \sin \theta_1 (-\hat{s}) = H_{1t} (-\hat{s}) \\ \hat{n}_{21} \times \vec{H}_2 &= H_2 \sin \theta_2 (-\hat{s}) = H_{2t} (-\hat{s}) \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} \hat{n}_{21} \times \vec{H}_1 &= H_{1t} \sin \theta_1 \hat{s} = H_{1t} \hat{s} \\ \hat{n}_{21} \times \vec{H}_2 &= H_{2t} \sin \theta_1 \hat{s} = H_{2t} \hat{s} \end{aligned} \right.$$

$$\therefore -H_{1t} \hat{s} + H_{2t} \hat{s} = \hat{n}_{21} \times \vec{H}_1 - \hat{n}_{21} \times \vec{H}_2 = J_S \hat{s}$$

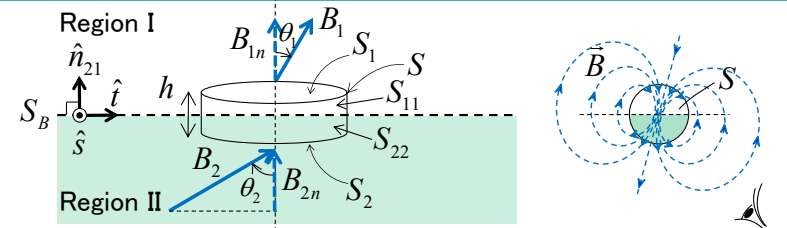
$$\Rightarrow \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S$$

ベクトル形の磁界に関する境界条件

$$\hat{n}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \quad [\text{A/m}] \quad (7)$$

左貝, メタマテリアルのための光学入門, p.22, 森北出版, 2017

磁束密度の境界条件(スカラー形) ⁸



境界面(h→0)における磁束密度に関するガウスの法則より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{ただし、} \vec{B} = \vec{B}_n + \vec{B}_t \quad (1)$$

積分面 S1, S11, S2, S22 上で面積分を実行すると

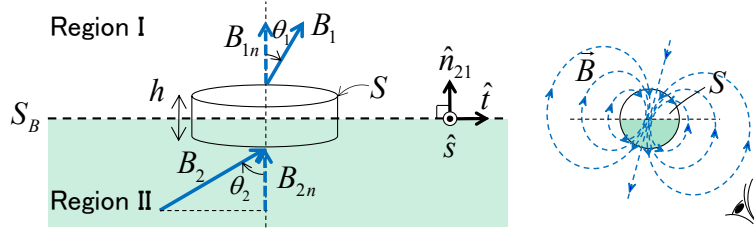
$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1 + S_{11}} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2 + S_{22}} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = 0 \quad (2)$$

$$= \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} B_{1n} ds + \int_{S_2} B_{2n} ds \quad (3)$$

$$= B_{1n} S - B_{2n} S = 0 \quad \therefore \boxed{B_{1n} - B_{2n} = 0} \quad (4)$$

境界面SBを挟んだ磁束密度法線成分は等しい。

磁束密度の境界条件(ベクトル形)⁹



境界面(h→0)における磁束密度に関するガウスの法則より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (5)$$

スカラー形の磁束密度法線成分に関する境界条件

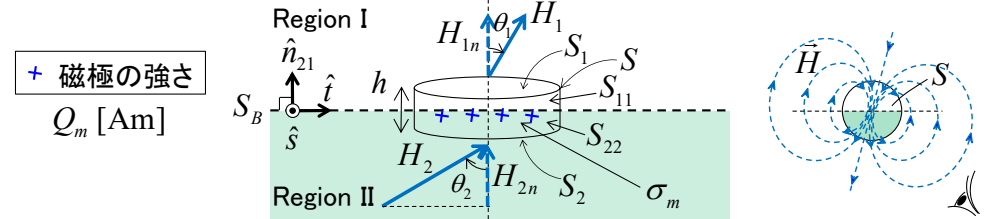
$$B_{1n} - B_{2n} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{cases} \hat{n}_{21} \cdot \vec{B}_1 = B_{1n} \\ \hat{n}_{21} \cdot \vec{B}_2 = B_{2n} \end{cases} \therefore B_{1n} - B_{2n} = \hat{n}_{21} \cdot \vec{B}_1 - \hat{n}_{21} \cdot \vec{B}_2$$

ベクトル形の磁束密度法線成分に関する境界条件

$$\hat{n}_{21} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad [\text{Wb/m}^2] \quad (7)$$

磁界の境界条件②(スカラー形)¹⁰



境界面(h→0)における磁束密度に関するガウスの法則より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = Q_m \quad \text{ただし、} \vec{H} = \vec{H}_n + \vec{H}_t \quad (1)$$

積分面 S₁, S₁₁, S₂, S₂₂上で面積分を実行すると

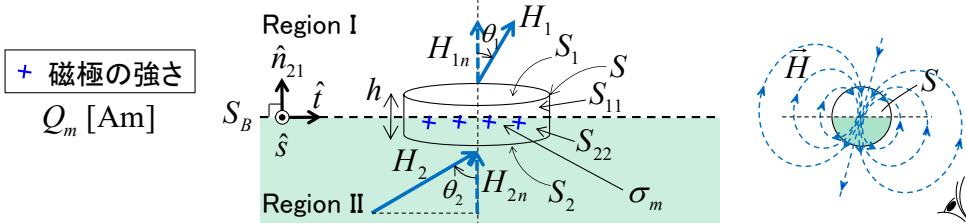
$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1+S_{11}} \vec{H}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2+S_{22}} \vec{H}_2 \cdot d\vec{s} \quad (2)$$

$$= \int_{S_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} H_{1n} ds + \int_{S_2} H_{2n} ds \quad (3)$$

$$= H_{1n}S - H_{2n}S = Q_m \quad \therefore \boxed{H_{1n} - H_{2n} = \sigma_m} \quad (4)$$

境界面S_Bを挟んだ磁界法線成分は、表面の磁荷面密度に等しい。

磁界の境界条件②(ベクトル形)¹¹



境界面(h→0)における磁界ガウスの法則より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = Q_m \quad (5)$$

スカラー形の磁界法線成分に関する境界条件

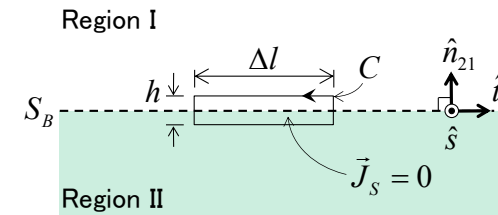
$$H_{1n} - H_{2n} = \sigma_m \quad (6)$$

$$\therefore H_{1n} - H_{2n} = \hat{n}_{21} \cdot \vec{H}_1 - \hat{n}_{21} \cdot \vec{H}_2 = \sigma_m \quad \therefore \begin{cases} \hat{n}_{21} \cdot \vec{H}_1 = H_{1n} \\ \hat{n}_{21} \cdot \vec{H}_2 = H_{2n} \end{cases}$$

ベクトル形の磁界法線成分に関する境界条件

$$\hat{n}_{21} \cdot (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \sigma_m \quad [\text{A/m}] \quad (7)$$

完全磁性体の境界条件¹²



スカラー形の境界条件

$$\begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = 0 \\ B_{1n} - B_{2n} = 0 \end{cases}$$

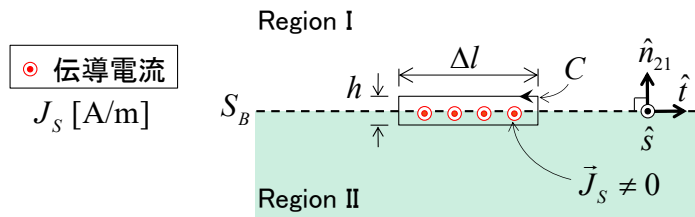
ベクトル形の境界条件

$$\begin{cases} \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0 \\ \hat{n}_{21} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} H_{1t} = H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}}$$

※ 境界を挟んだ磁界接線成分と磁束密度法線成分は常に連続になる。

損失性磁性体の境界条件



スカラー形の境界条件

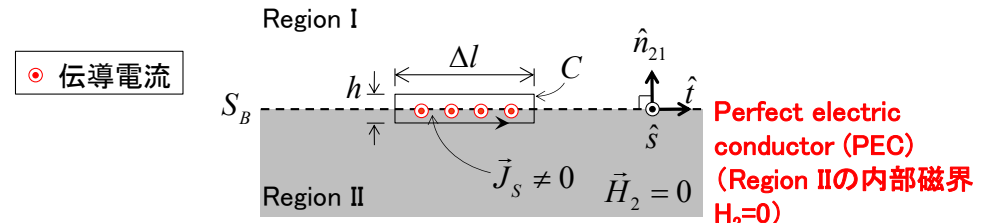
ベクトル形の境界条件

$$\begin{cases} H_{1t} - H_{2t} = J_S \\ B_{1n} - B_{2n} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{n}_{21} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \\ \hat{n}_{21} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{1t} \neq H_{2t} \\ B_{1n} = B_{2n} \end{cases}$$

※境界を挟んだ磁束密度法線成分は常に等しいが、磁界接線成分は等しくならず、その差は損失性磁性体表面電流密度に等しい。

完全電気導体の境界条件



スカラー形の境界条件

ベクトル形の境界条件

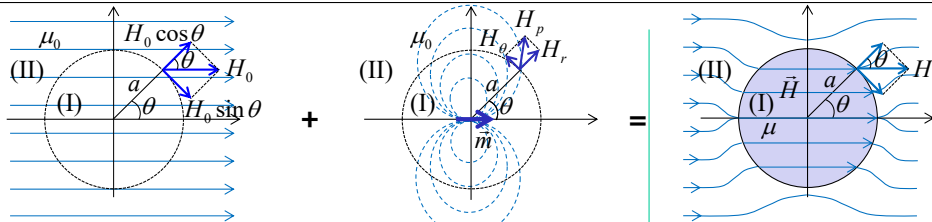
$$\begin{cases} H_{1t} = J_S \\ B_{1n} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{n}_{21} \times \vec{H}_1 = \vec{J}_S \\ \hat{n}_{21} \cdot \vec{B}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_{1t} = J_S \\ B_{1n} = 0 \end{cases}$$

※領域Iの磁束密度法線成分がゼロのため、磁界は導体に対して平行になる。このとき磁界の大きさは導体表面の面電流密度に等しい。

磁性体球の磁化

【演習】半径a、透磁率μの磁性体球が均様な磁界H₀の中に置かれている。磁性体球が磁化することにより、球内部には均様な磁界Hが生じるものとする。また、球外の磁界は、外部磁界H₀と球の中心にある磁気モーメントmの磁気ダイポールによる磁界の和として扱うことができるものとする。Hとmを求めよ。



領域(II)の外部印加磁界 + 領域(II)の磁化による磁界 = 領域(I)の球内部均様磁界

$$\begin{cases} H_r = H_0 \cos \theta & (1a) \\ H_\theta = -H_0 \sin \theta & (1b) \end{cases} \quad \begin{cases} H_r = \frac{m}{2\pi a^3} \cos \theta & (2a) \\ H_\theta = \frac{m}{4\pi a^3} \sin \theta & (2b) \end{cases} \quad \begin{cases} H_r = H \cos \theta & (3a) \\ H_\theta = -H \sin \theta & (3b) \end{cases}$$

未知数がHとmの二つなので条件が二つ必要

磁束密度法線の境界条件 $\mu_0(1a) + \mu_0(2a) = \mu(3a)$ より $\mu_0 H_0 \cos \theta + \frac{\mu_0 m}{2\pi a^3} \cos \theta = \mu H \cos \theta$ (a)

磁界接線の境界条件 $(1b) + (2b) = (3b)$ より $-H_0 \sin \theta + \frac{m}{4\pi a^3} \sin \theta = -H \sin \theta$ (b)

(a)(b)の連立方程式(未知数はHとmのみ)を解けばHとmが求まる。

$$H = \frac{3}{\mu_r + 2} H_0, \quad m = 4\pi a^3 \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} H_0$$

その他の境界条件 (参考)

1. 常微分方程式, 偏微分方程式を解析的に解く場合

- (1) 第1種境界条件(ディリクレDirichlet境界条件)
境界上で解となる関数の値が指定された条件
- (2) 第2種境界条件(ノイマンNeuman境界条件)
境界上で解となる関数の導関数の値が指定された条件
- (3) 第3種境界条件(ロビンRobin境界条件、混合境界条件)
ディリクレ、ノイマン境界条件の混合
- (4) 周期境界条件
周期的に同じ解が繰り返されるときに使用される条件

2. 有限要素法や差分法など領域メッシュ分割型数値解法の場合

- (1) ABC(Absorbing Boundary Condition)
有限要素法や差分法による数値計算において、計算領域外側に無限空間が広がるようにした仮想的な境界条件
- (2) RBC(Radiation Boundary Condition)
有限要素法や差分法による数値計算において、計算領域外側に無限空間が広がるようにした仮想的な境界条件(ABCの別称)
- (3) PML(Perfectly Matching Layer)
有限要素法や差分法による数値計算において、計算領域外側に無限空間が広がるように計算領域の外縁に沿って配置した人工電波吸収層