

# 目次

第 1 章	磁石と磁極	3
1.1	磁石	4
1.1.1	磁化曲線	4
1.1.2	磁化曲線と透磁率	5
1.1.3	ヒステリシスループ	6
1.1.4	反磁界と自己減磁力	8
1.2	磁極	10
1.2.1	磁界に関するガウスの法則	10
1.2.2	電荷と磁極の関係	11
1.2.3	電気ダイポールと磁気ダイポール	11

## 1.1 磁石

図 1.1 左に永久磁石<sup>\*1\*2</sup>と電磁石の比較イメージを示す。永久磁石は電源不要だが、極性は固定されており、高温になると<sup>\*3</sup>と磁石の性質を失う。一方、電磁石はコイルに電流を流すための電源が必要であるが、極性は流す電流の向きによって自由に変更できる。しかし、コイルのインピーダンスの大きさは  $\omega L$  であるから、周波数によって流れる電流の大きさは異なり、発生する磁場の大きさも異なるといった問題もある。空心電磁石よりも鉄心入り電磁石が強いのは、図 1.1 右に示すように、鉄心が磁化されることで生じる磁場と空心コイルに生じる磁場との重ね合わせによる<sup>\*4</sup>。

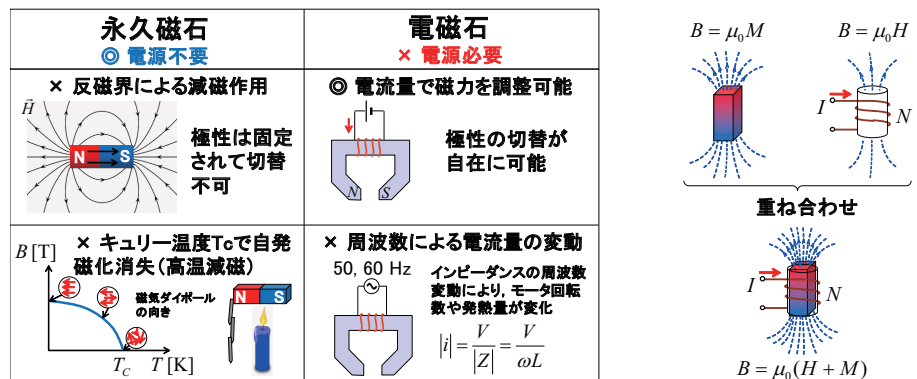


図 1.1 永久磁石と電磁石の違い

### 1.1.1 磁化曲線

図 1.2 左に示すような変圧器に似た測定系<sup>\*5</sup>を考える。アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I \quad (1.1)$$

となる。これを  $H$  について求めると磁路（積分路  $C$ ）上の磁界は

$$H = \frac{N_1 I}{l} \propto I \quad (1.2)$$

となる。つまり、式 (1.2) は発生する磁界  $H$  が 1 次コイルに流す電流  $I$  に比例することを示している。一方、2 次コイルに誘起される電圧はファラデーの法則より

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d(N_2 \Phi)}{dt} \quad (1.3)$$

<sup>\*1</sup> 例えば、永久磁石の同極同士を対向させて放置するとやがて磁石の性質が失われる。つまり、永久磁石は未来永劫何があっても「永久に磁石であり続ける」という訳ではない。

<sup>\*2</sup> 磁石の語源は慈（いつくしみ）が語源であり、磁極に吸い付く砂鉄の様子を、母親が赤子に乳を与え慈しんでいる様子に例えたと言われている。青野、いまさら電磁気学？, p.41, 丸善より。

<sup>\*3</sup> キュリー温度と呼び、鉄で  $1000^\circ\text{C}$ 、酸化鉄で  $850^\circ\text{C}$  程度である。永久磁石をライターで炙れば吸着していた釘が落ちるなど磁石の性質が消失することを簡単に確認できる。

<sup>\*4</sup> 鉄（強磁性）という心があるかないかで、強さが全く変わってしまう。これは芯（哲学）のある人間にも当てはまる。

<sup>\*5</sup> ローランドリングと呼ぶ。測定材料をドーナツ型のリング形状に加工し、1 次コイルと 2 次コイルを巻いた構造。1 次コイルに流れる電流が変化すると、ファラデーの法則から 2 次コイルに誘導電圧が生じる。

式 (1.3) の両辺を積分すると

$$\int e dt = -N_2 \Phi = -N_2 B S \quad (1.4)$$

となる。式 (1.4) を変形して  $B$  について求めると

$$B = -\frac{1}{N_2 S} \int e dt \quad (1.5)$$

が得られる。即ち、式 (1.5) は 2 次コイルに発生した誘導起電力  $e$  [V] を時間  $t$  [s] で積分して係数  $-1/N_2 S$  を掛ければ磁束密度  $B$  が求まることを示している。式 (1.2) と式 (1.5) の結果を使って、横軸を磁界  $H$ 、縦軸に磁束密度  $B$  として特性を描くと、磁性体の種類によって図 1.2 右に示すような磁化曲線が得られる\*6。リングが空気の場合は  $B = \mu_0 H$  より、傾き  $\mu_0$  の直線となる。また、リングが反磁性体の場合は、 $\mu = \mu_0 \mu_r < \mu_0$  より、傾き  $\mu_0$  よりも少し小さい傾きの直線となる。さらに、リングが常磁性体の場合は、 $\mu = \mu_0 \mu_r > \mu_0$  より、傾き  $\mu_0$  よりも少し大きな傾きの直線となる。一方、リングが鉄などの強磁性体の場合は傾きが桁違いに大きくなるだけでなく、磁束密度  $B$  が一旦飽和すると磁界  $H$  を弱めても（逆向きにしても）元に戻らない性質を示す。

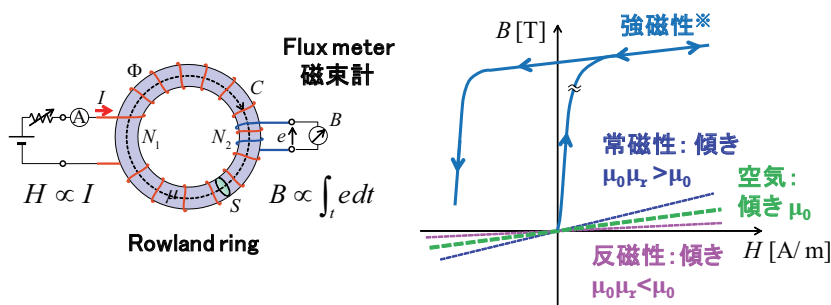


図 1.2 磁化曲線

### 1.1.2 磁化曲線と透磁率

次に、強磁性体の磁化曲線と透磁率の関係を図 1.3 に示す。図 1.3 上は、まだ磁化されていない（着磁されていない）強磁性体の磁化曲線の例を示しており、着目する点によって初期透磁率  $\mu_i$ 、最大透磁率  $\mu_m$ 、透磁率  $\mu$  の 3 つが定義できる。このうち、 $\mu_i$  のみが  $B$  の傾き  $dB/dH$  に等しいが、それ以外の  $\mu$  は磁束密度と磁界の単なる比  $B/H$  になっていることに注意する必要がある。図 1.3 下は横軸を磁界  $H$ 、縦軸を比透磁率  $\mu_r$  としたもので、強磁性体の比透磁率は一定ではなく、磁界の大きさによって変化することが分かる\*7。

さて、図 1.4 に示すような初磁化曲線を例にしてこれを数式で表現することを考える。横軸は磁界  $H$  [A/m]、縦軸は磁束密度  $B$  [T] 又は磁化  $M$  [A/m] を  $\mu_0$  倍した  $\mu_0 M$  [T] を示す\*8。 $M$  は非線形なので、テイラー級数を使って式 (1.6) のように書くことができる。

$$M = \chi_m H + \chi_m^{(2)} H^2 + \chi_m^{(3)} H^3 + \dots \quad (1.6)$$

\*6 磁化曲線の横軸は一般に磁界  $H$  [A/m]、縦軸は磁束密度  $B$  [T] であるが、縦軸に磁化  $M$  もしくは磁化を  $\mu_0$  倍した値  $\mu_0 M$  が使われることもある。

\*7 このような媒質を非線形媒質と呼ぶ。比透磁率を定数として扱える線形媒質に比べると当然難しくなる。

\*8  $M$  でなく  $\mu_0 M$  を使う理由は、縦軸の次元を  $B$  と同じ [T]（テスラ）に合わせるためである。

もしも、常磁性体や反磁性体のような線形媒質ならば、式 (1.6) の第 1 項だけを採用して、

$$M = \chi_m H \quad (1.7)$$

で十分である。まず、式 (1.6) を磁化された磁性体の磁束密度を表す次式 (1.8)

$$B = \mu_0 H + \mu_0 M \quad (1.8)$$

に代入すると、

$$B = \mu_0 H + \mu_0(\chi_m H + \chi_m^{(2)} H^2 + \chi_m^{(3)} H^3 + \dots) \quad (1.9)$$

となる。これを式変形して

$$B = \mu_0 H(1 + \chi_m + \chi_m^{(2)} H + \chi_m^{(3)} H^2 + \dots) \quad (1.10)$$

が得られる。式 (1.10) は次のように書くこともできる。

$$B = \mu_0 \mu_r H \quad (1.11)$$

ここで、非線形媒質の比透磁率  $\mu_r$  は次式で与えられる。

$$\mu_r = 1 + \chi_m + \chi_m^{(2)} H + \chi_m^{(3)} H^2 + \dots \quad (1.12)$$

常磁性体や反磁性体のような線形媒質であれば、式 (1.12) の最初の 2 項だけを採用して次式 (1.13) で表現できる。式 (1.13) は磁性体を含むアンペアの法則において比透磁率の定義として既出の式である。

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad (1.13)$$

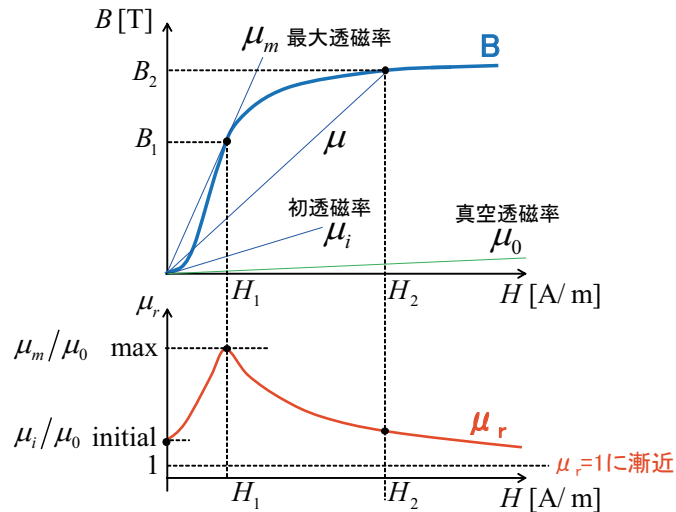


図 1.3 初磁化曲線と透磁率

### 1.1.3 ヒステリシスループ

図 1.5 に強磁性体のヒステリシスループのイメージを示す。磁性体に加えられる磁界  $H$  の大きさによって磁束密度  $B$  の履歴が異なる（行きと帰りで経路が異なる）ことをヒステリシスと呼ぶ。破線は空気の磁束密度  $B = \mu_0 H$  を示し、実線の 2 種類の曲線は磁束

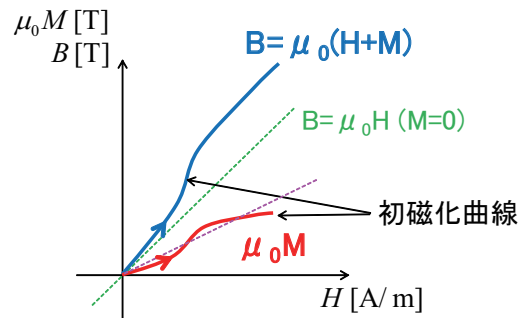


図 1.4 強磁性体の透磁率

密度  $B = \mu_0(H + M)$  のヒステリシス特性と  $\mu_0 M$  単独のヒステリシス特性を示す。強磁性体では、初磁化曲線を通して飽和した後は、磁界を弱めても元の初磁化曲線に戻ることはなく、磁界  $H$  を交流にすれば図 1.5 のようなループを描く。前述の透磁率は初磁化曲線でのみ定義されるもので、強磁性体のヒステリシスループ上では定義できないことに注意が必要である。ヒステリシスループの横幅が大きいもの ( $H_{cb}$  や  $H_{cj}$  が大きいもの) は硬鋼と呼ばれ、永久磁石のように簡単に極性が変わらない用途に向いている。一方、ヒステリシスループの横幅が狭いもの ( $H_{cb}$  や  $H_{cj}$  が小さいもの) は軟鉄と呼ばれ、電磁石のように強い磁場は必要だが、極性を常に変化させたい用途に向いている。

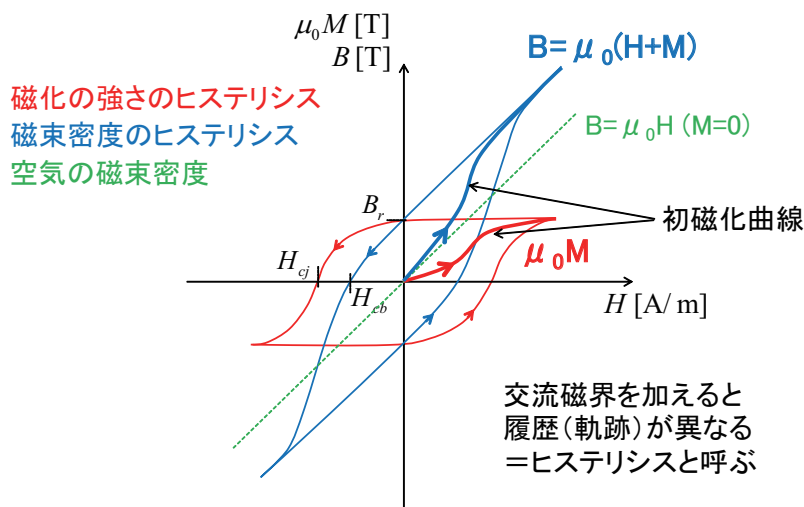


図 1.5 強磁性体のヒステリシスループ

磁界の大きさによって磁束密度の履歴が異なる理由は図 1.6 のように説明することができる\*<sup>9</sup>。なお、図 1.5 のヒステリシスループのうち、第 2 象限にあるものを減磁曲線と呼ぶ。まず、磁化されていない状態 (①) から、外部磁界に追随して磁区\*<sup>10</sup>が揃い始める状態 (②) を経由して、飽和状態では磁石内部の磁区がすべて磁界  $\vec{H}$  の方向に揃った状態になり、これ以上磁化  $\vec{M}$  が大きくなることはない (③)。次に、磁界を弱くしてゼロにしたとき、磁性体の磁区はほぼ揃ったままなので残留磁化  $\vec{M}_r$  が得られる。外部磁場を

\*<sup>9</sup> 宝野, 本丸, “すごい! 磁石,” p.101, 日本実業出版社, 2015. より。

\*<sup>10</sup> 磁気ダイポールモーメントの向きが予め揃った集合体・コロニーのようなもので、ある程度数が揃って大きくなると周囲に影響を与えるほどの力を持つようになる。向きが異なる境界は磁壁と呼ばれる。

切っているのに、磁束密度が内部から勝手に出ているのでこれが永久磁石の大本である(④)。さらに磁界を反対向きに強くしていくと、それに倣って一部の磁区が向きを変える(⑤)<sup>\*11</sup>。その領域はさらに拡大して全体の磁化が拮抗する(⑥)。そして、さらに磁界を強くすると逆方向に磁化が飽和する(⑦)。なお、一旦飽和した磁区が磁化されていない初期状態(①)に戻ることはない。初期状態に戻すには、キュリー温度以上の高温にさらすか、交流消磁という方法<sup>\*12</sup>で徐々に塊になった磁区を分解していく方法がある。

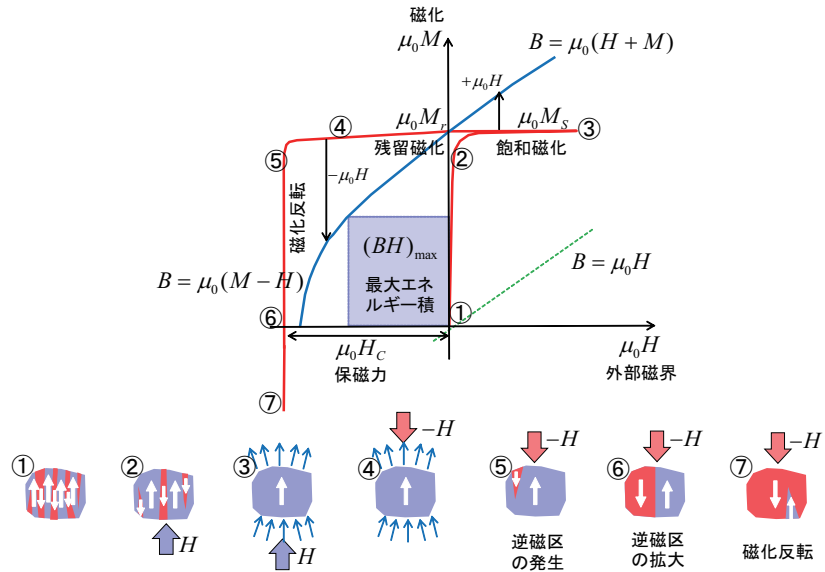


図 1.6 強磁性体の減磁曲線

### 1.1.4 反磁界と自己減磁力

図 1.7 にリング状ソレノイド<sup>\*13</sup>の 4 つのパターンを示す。(A) はギャップのない場合で、アンペアの法則から磁界は次式となる。

$$H = \frac{NI}{l} \tag{1.14}$$

(B) はギャップがなく電流も流れていない状態で、アンペアの法則から当然磁界は  $H = 0$  である<sup>\*14</sup>。(C) はギャップ付きの場合で、アンペアの法則から磁束密度は次式となる。

$$B = -\frac{\mu_0 l}{\delta} H + \frac{\mu_0}{\delta} NI \tag{1.15}$$

(D) はギャップ付きで電流が流れていない場合で、アンペアの法則から磁束密度は、

$$B = -\frac{\mu_0 l}{\delta} H \tag{1.16}$$

<sup>\*11</sup> 人間でいえば、外圧に屈した造反コロニーのようなイメージである。

<sup>\*12</sup> 減衰振動電流を流して、ヒステリシスループ面積を少しずつ小さくして原点に戻す方法。

<sup>\*13</sup> 環状ソレノイド、無端ソレノイドとも呼ぶ。

<sup>\*14</sup> 伝導電流  $I$  はゼロであることは明らかなが、磁性体が磁化されていれば磁化電流  $\vec{J}_{Sm} = \vec{M} \times \hat{n}$  [A/m] は流れている。

となるが、磁化された磁性体の磁束密度を表す次式

$$B = \mu_0(H + M) \tag{1.17}$$

に式 (1.16) を代入すると、

$$-\frac{\mu_0 l}{\delta} H = \mu_0 H + \mu_0 M \tag{1.18}$$

これを、 $H$  について求めると

$$H = -\frac{\delta}{\delta + l} M = -NM \tag{1.19}$$

が得られる。ここで、 $N = \delta/(\delta + l)$  を減磁係数と呼び、その値は永久磁石の形状によって異なる\*15。式 (1.19) には負号が付いているため、磁化（された方向）と磁性体内部の磁界が逆向きであることを示している。「逆向き」を強調してこれを反磁界と呼ぶ\*16。

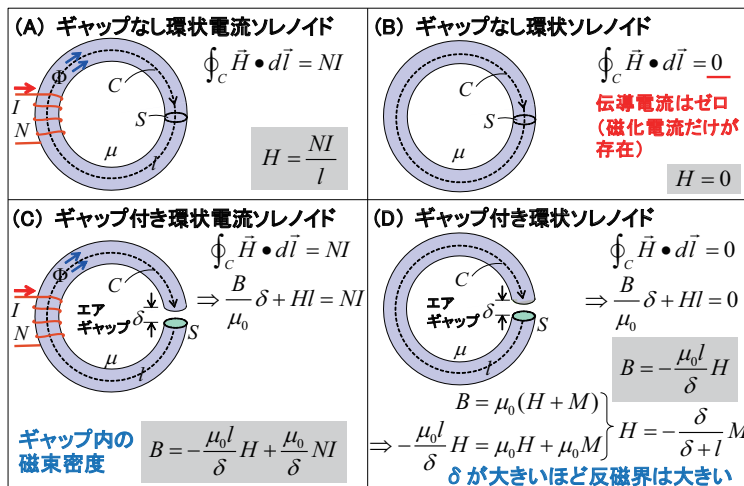


図 1.7 反磁界と自己減磁力

永久磁石内部の磁束密度  $\vec{B}$ 、反磁界  $\vec{H}$ 、磁化  $\vec{M}$  の関係を図 1.8 に示す。磁性体外部に相当するエアギャップ部分については、 $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  より  $B$  と  $H$  は同じ方向を示す\*17。

\*15 例えば、 $\delta$  が大きく  $l$  が小さいとき、即ち  $l/\delta \ll 1$  の薄い板磁石のとき  $N$  は 1 に近づく。逆に、 $\delta$  が小さく  $l$  が大きいとき、即ち  $l/\delta \gg 1$  の非常に長い棒磁石のとき  $N$  は 0 に近づく。

\*16 反磁界が大きいということは内部から造反が出ていることを示しており、時間が経つとやがて磁石の性質を失うことになる。従って、永久磁石を保存する場合は保持片を使って磁力線の還流構造（磁界に切れ目を作らない形）を形成し、磁極が直接露出するのを防いでいる。

\*17 磁化された環状ソレノイドを永久磁石として使うには、ドーナツ形状の一部にギャップを空けて使うしかない。しかし、ギャップを空けると反磁界を生じて磁化  $M$  を弱らせるというトレードオフの関係がある。

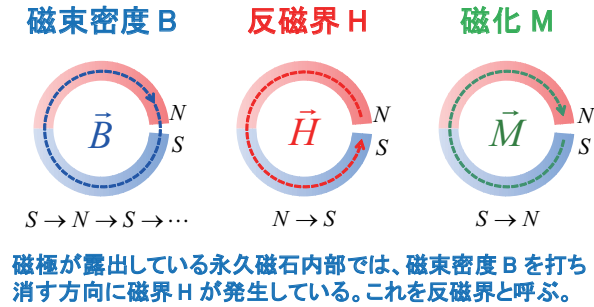


図 1.8 永久磁石内部の磁界

## 1.2 磁極

### 1.2.1 磁界に関するガウスの法則

式 (1.17) を  $H$  について求めると次式となる。

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (1.20)$$

ここで、式 (1.20) の磁界  $H$  を図 1.9 左に示すように永久磁石の  $N$  極を囲むように取った閉面  $S_1 = S_{11} + S_{12} + S_{13}$  で面積分すると、

$$\oint_{S_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \oint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} - \oint_{S_1} \vec{M} \cdot d\vec{s} \quad (1.21)$$

簡単のために側面  $S_{13}$  から出る磁束密度は無視すると<sup>\*18</sup>、右辺第 1 項目は

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \int_{S_{12}} B ds \cos 90^\circ + \int_{S_{11}} B ds \cos 0^\circ + \int_{S_{13}} 0 ds \right] \quad (1.22)$$

右辺第 2 項目は、

$$\oint_{S_1} \vec{M} \cdot d\vec{s} = - \left[ \int_{S_{12}} M ds \cos 90^\circ + \int_{S_{11}} 0 ds + \int_{S_{13}} 0 ds \right] \quad (1.23)$$

となるから、式 (1.22) と (1.23) の結果より式 (1.21) は

$$\oint_{S_1} \vec{H} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{\mu_0} BS + \frac{1}{\mu_0} BS + MS = +MS \quad (1.24)$$

となる。つまり、磁界  $H$  の面積分は  $N$  極近傍では  $+MS$  に等しい。同様にして、磁界  $H$  の面積分は  $S$  極近傍では次式 (1.25) のように  $-MS$  に等しくなる。

$$\oint_{S_2} \vec{H} \cdot d\vec{s} = -MS \quad (1.25)$$

所で、式 (1.24) と式 (1.25) を、既出の誘電体を含むガウスの法則である次式 (1.26)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \quad (1.26)$$

<sup>\*18</sup> 磁石がの断面積  $S$  に比べて長さ  $l$  が十分に長ければ、十分に成立する近似である。



と比較すると、その類似性から

$$MS = Q_m \quad (1.27)$$

を磁極の強さと定義する\*19。式 (1.24) と式 (1.25) を、ここでは磁界に関するガウスの法則または磁極に関するガウスの法則と呼ぶ。

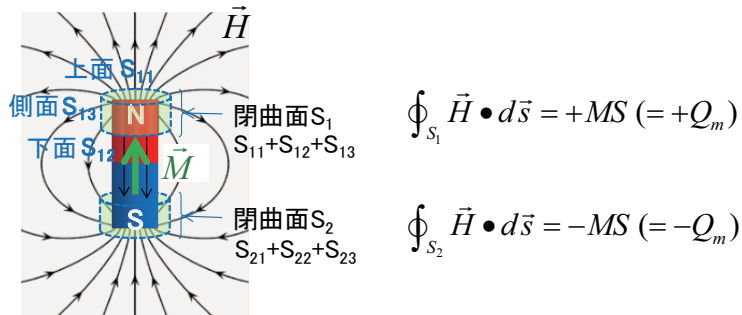


図 1.9 磁極

### 1.2.2 電荷と磁極の関係

図 1.10 に電荷と磁極（磁荷は  $\mu_0 Q_m$ ）の関係をまとめる。左列はまず、ガウスの法則から電束密度  $D$  が求まり、 $D = \epsilon_0 E$  の関係より電界  $E$  が求まる。そして、電界  $E$  を線積分すれば電位  $V$  が求まり、電位  $V$  を微分すれば電界  $E$  が求まる。同様にして右列は、磁界に関するガウスの法則から磁界  $H$  が求まり、 $B = \mu_0 H$  の関係より磁束密度  $B$  が求まる。電位  $V$  との類推によって、磁位  $V_m$  が求まる\*20。

### 1.2.3 電気ダイポールと磁気ダイポール

既出の電気ダイポールが作る電界  $\vec{E}$ 、電束密度  $\vec{D}$ 、電位  $V$  に図 1.10 の対応関係を使うことで、磁気ダイポールの作る磁界  $\vec{H}$ 、磁束密度  $\vec{B}$ 、磁位  $V_m$  を類推で求めることができる。図 1.11 に電気ダイポールと磁気ダイポールの対応関係をまとめる。

v1.3, Nov.2019

\*19 【混同しやすい磁極と磁荷の違いについて】インダクタンスの定義は「単位電流を流したときの磁束鎖交数」 $[H]=[Wb/A]$  であるから、磁極の強さ  $[Am]$  に透磁率  $\mu_0 [H/m]$  を掛けると  $[Am][H/m]=[Wb]$  となり、馴染みある電荷に対応した磁気版の言葉「磁荷」の単位になる。即ち、磁界に関するガウスの法則の両辺を  $\mu_0$  倍すれば、磁荷に関するガウスの法則  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 MS$  になる。

\*20 電荷と磁極には対応関係があるが、 $D-H$  対応または  $E-B$  対応もしくは、 $E-H$  対応のように電磁界の対応のさせ仕方によって混乱が生じるので注意が必要である。

電束密度 [C/m <sup>2</sup> ]	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$ ガウスの法則 $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$	$D \leftrightarrow H$ 対応	$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = Q_m$ 磁気ガウスの法則 $H = \frac{Q_m}{4\pi r^2} \times \mu_0$	磁界 [A/m] or [N/Wb]
電界 [V/m] or [N/C]	$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$E \leftrightarrow B$ 対応 $1/\epsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$	$B = \frac{\mu_0 Q_m}{4\pi r^2}$	磁束密度 [Wb/m <sup>2</sup> ] or [T]
電位 [V] or [J/C]	$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$	$V \leftrightarrow V_m$ 対応 $1/\epsilon_0 \leftrightarrow 1$	$V_m = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{1}{r}$	磁位 [A] or [J/Wb]
電界 [V/m] or [N/C]	$E = -\nabla V$	$E \leftrightarrow H$ 対応 $V \leftrightarrow V_m$	$H = -\nabla V_m$	磁界 [A/m] or [N/Wb]

図 1.10 電荷と磁極の関係

電束密度 [C/m <sup>2</sup> ]	$D_r = \frac{Ql \cos \theta}{2\pi r^3}$ $D_\theta = \frac{Ql \sin \theta}{4\pi r^3}$ $D_\phi = 0$	$D \leftrightarrow H$ 対応	$H_r = \frac{Q_m l \cos \theta}{2\pi r^3} = \frac{m \cos \theta}{2\pi r^3}$ $H_\theta = \frac{Q_m l \sin \theta}{4\pi r^3} = \frac{m \sin \theta}{4\pi r^3}$ $H_\phi = 0$	磁界 [A/m] or [N/Wb]
電界 [V/m] or [N/C]	$E_r = \frac{Ql \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}$ $E_\theta = \frac{Ql \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ $E_\phi = 0$	$E \leftrightarrow B$ 対応 $1/\epsilon_0 \leftrightarrow \mu_0$	$B_r = \frac{\mu_0 Q_m l \cos \theta}{2\pi r^3}$ $B_\theta = \frac{\mu_0 Q_m l \sin \theta}{4\pi r^3}$ $B_\phi = 0$	磁束密度 [Wb/m <sup>2</sup> ] or [T]
電位 [V] or [J/C]	$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l}{r^2} \cos \theta$	$V \leftrightarrow V_m$ 対応 $1/\epsilon_0 \leftrightarrow 1$	$V_m = \frac{Q_m}{4\pi} \frac{l}{r^2} \cos \theta$	磁位 [A] or [J/Wb]

図 1.11 電気ダイポールと磁気ダイポール