

ファラデーの法則

1st. 2011/04/01
Lst. 2021/11/11

電磁気学の偉人マップ

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$
アンペア-マクスウェルの法則

$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$
ファラデーの法則

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$
ガウスの法則

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$
ビオ-サバルの法則

$c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] 光速
 $e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ [C] 素電荷

$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$ フレミング左手則
 $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ フレミング右手則

$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$ ローレンツカ

$R = \rho \frac{l}{S}$ $C = \frac{Q}{V}$ $L = \frac{\phi}{I}$

$I = \frac{dQ}{dt}$ $E = IR$ オームの法則

$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$ クーロンの法則

ミリカン 1868-1953 (85)
ヘルツ 1857-1894 (37)
テスラ 1856-1943 (87)
トムソン 1856-1940 (84)
ローレンツ 1853-1928 (75)
フレミング 1849-1945 (96)
マクスウェル 1831-1879 (48)
キルヒホッフ 1824-1887 (63)
レンツ 1804-1865 (61)
ヘンリー 1797-1878 (81)
ファラデー 1791-1867 (76)
サバル 1791-1841 (50)
オーム 1789-1854 (65)
ガウス 1777-1855 (78)
エルステッド 1777-1851 (74)
アンペール 1775-1836 (61)
ビオ 1774-1862 (88)
ボルタ 1745-1827 (82)
クーロン 1736-1806 (70)
キャベンディッシュ 1731-1810 (79)
平賀源内 1728-1780 (52)
フランクリン 1706-1790 (84)
デュ・フェ 1698-1739 (41)
ギルバート 1544-1603 (59)

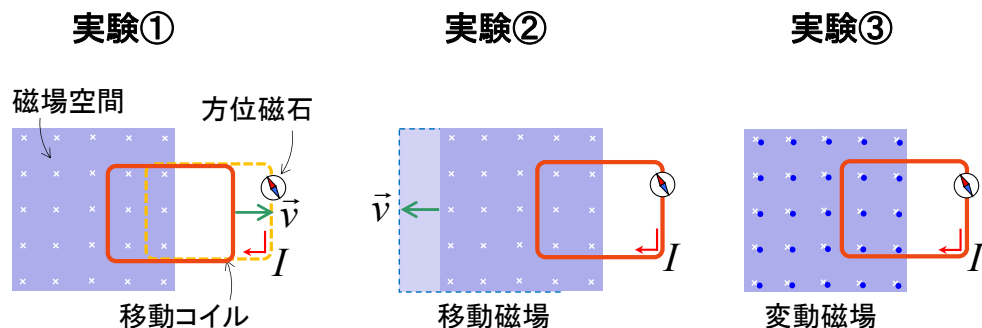
1639 宗教・外交・貿易制限 (いわゆる鎖国) 1854

ミクロの観察/観測

どんな偉人も先達の努力・知恵・発見を利用させてもらっている

ファラデーの実験

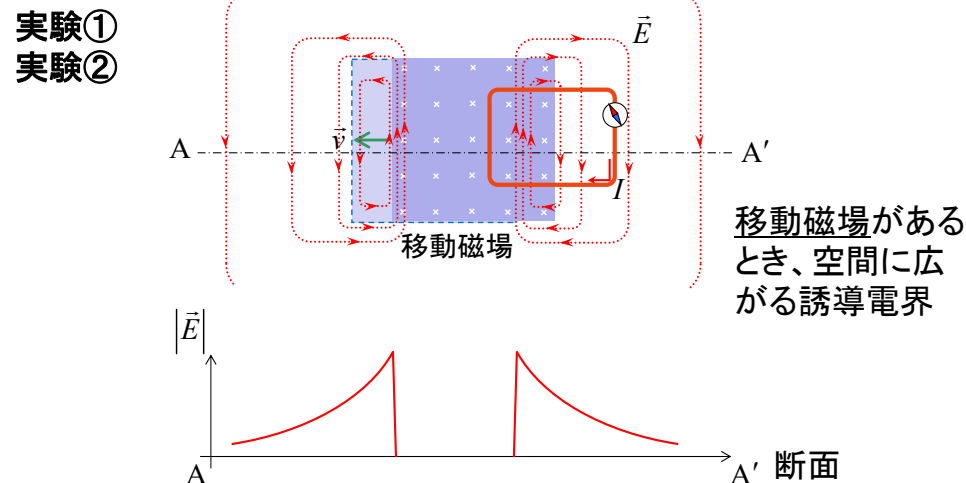
問: 電流(電界)から磁界が作られるように、磁界から電流(電界)を作れるのでは?



3つの実験の共通点は?

コイルを貫く磁束が時間的に変化したときのみ、コイルに電流が流れる=コイルに起電力が発生する。(コイル導体がなくても、空間には電界が発生している)

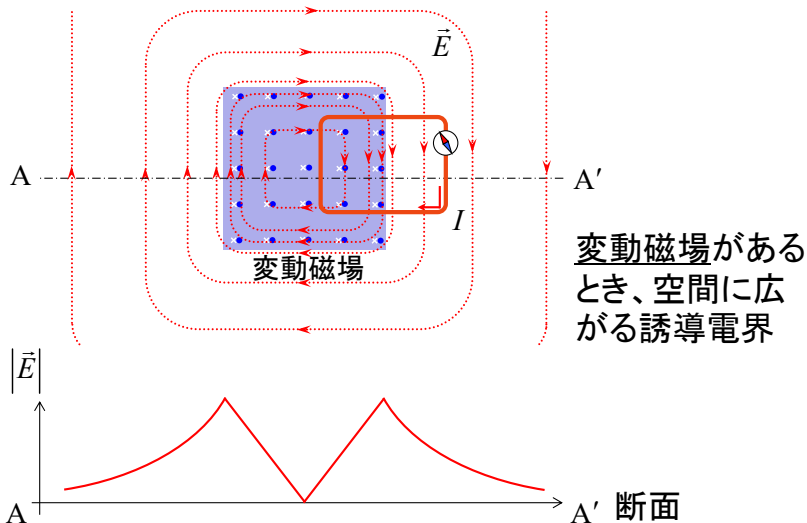
誘導電界の発生①②



磁場を検出するのに方位磁石を使ったように、導体ループの役割は電界を検出する、即ち電界を電流に変換するためのものである。実際の電界は空間全体に広がっている。

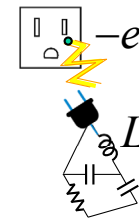
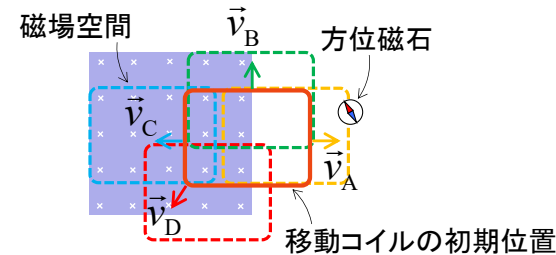
誘導電界の発生③

実験③



磁場を検出するのに方位磁石を使ったように、導体ループの役割は電界を検出する、即ち電界を電流に変換するためだけのものである。実際の電界は空間全体に広がっている。

電流の向きは？



実験①の数値実験

移動後のコイル	磁束 (前)	磁束 (後)	増減	電流方向	電流量
A	6	3	-3	右回	$\propto v_A$
B	6	6	0	なし	0
C	6	12	+6	左回	$\propto v_C$
D	6	6	0	なし	0

コンセントを急に抜いたとき火花が飛ぶのは、コイルの磁束変化が原因

急激な変化は自然が最も嫌う現象の1つ

ファラデーの実験装置

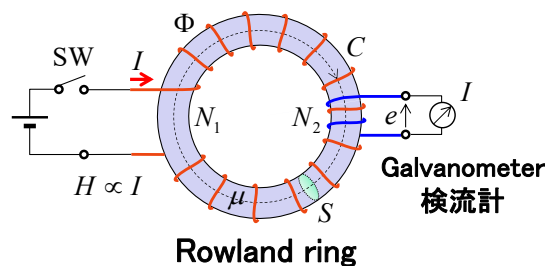
図のような磁気回路を考える。1次コイル側において成立するアンペアの法則(1820年)では、次のことが分かっていた。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I$$

$$H = \frac{N_1 I}{l}$$

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I}{l}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I S}{l}$$



即ち、発生する磁束Φは1次コイルを流れる電流の大きさに比例する。これに対して、2次コイル側において成立するファラデーの実験装置(1831年)では、次のことが分かった。

- SWがONの瞬間とOFFの瞬間だけ、2次コイルの検流計が振れた。
- 検流計を流れる電流の向きは、1次コイルで発生した磁束を打ち消す方向であった。
- SWが定常状態では検流計は振れない。

ファラデーの実験の数式化

① 2次コイルに発生する起電力eは、2次コイルを貫く磁束Φの時間変化に比例した。

$$e \propto \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

② 2次コイルに発生する起電力eは、2次コイルの巻数N₂に比例した。

$$e \propto N_2 \quad (2)$$

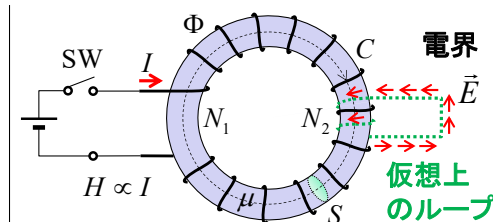
③ 2次コイルに発生する起電力の向きは、2次コイルを貫く磁束の変化を打ち消す方向であった。(レンツの法則 1834年)

$$e \propto - \quad (3)$$

以上をまとめて、

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\varphi}{dt} \quad (4)$$

をファラデーの法則と呼ぶ。ただし、 $\varphi = N\Phi$ を磁束鎖交数と呼ぶ。

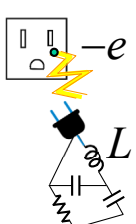


導体は導電率σが高く、 $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ であるから、電界Eが加わると電流密度J [A/m²]の電流が流れる。ノイマンは、2次コイルが物理的に閉じた導体ループでなく、仮想ループ上に生じている電界について考えても同じ起電力になることを示した。これを式で示すと次式となる。

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (7)$$

ファラデーの法則

起電力 $e = - \frac{d\phi}{dt}$ 磁束鎖交数 ϕ 変化を妨げる向き $-$ 時間 dt



単位系 $[V] = [Wb] \div [s]$

ファラデーの法則(積分形)

最上位互換バージョン(保存場の性質の拡張)

積分路が閉じていることを示す記号 \oint_C 電界 \vec{E} 積分路を構成する微小線素 $d\vec{l}$ 時間(偏)微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ 積分路を構成する微小面素 $d\vec{s}$ 磁束密度 \vec{B} 内積記号 \cdot 内積記号 \cdot

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

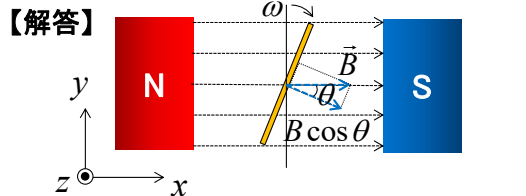
積分が積分路Cに沿った線積分であることを示す記号 \oint_C 積分が左辺積分路Cの内側に囲まれた開いた面積分であることを示す記号 \int_S

単位系 $[V] = [V/m] \times [m] = [Wb/m^2] \times [m^2] \div [s]$

電気エネルギーが磁界のエネルギーに変換されているので、保存場の性質は成り立たない

ファラデーの法則の問題

【例題】図に示すように一様な磁束密度 B [T] の磁界中で、巻数 n 、面積 S [m²] のコイルが z 軸まわりを角速度 ω [rad/s] で回転しているとき、コイルに誘導される起電力を求めよ。(教科書, p.118) ... 発電機の原理



【解答】
 コイルを貫く磁束は $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS \cos \theta = BS \cos \omega t$
 磁束鎖交数は $\phi = N\Phi = nBS \cos \omega t$
 ファラデーの法則より $e = - \frac{d\phi}{dt} = nBS \sin \omega t$
 Φ と e の位相は90度ずれる。

ベクトル演算すると $\vec{B} = B\hat{x}$
 $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$
 $\phi = N\Phi = n \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$
 $e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (n \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s})$
 $= -n \frac{d}{dt} BS \cos \omega t$
 $= +n\omega BS \sin \omega t$

ファラデーの法則の問題

【演習】図に示すような半径 a [m] の円形ループに一様な磁束密度 B [T] が通っている。この磁束密度 B が図のように時間変化している。ループに発生する起電力とループに接続された抵抗 R [Ω] を流れる電流を求めよ。さらに図中に起電力 e と電流 i の様子を書き入れよ。ただし、ループを構成している導線抵抗は無視するものとし、起電力、電流ともに時計回りを正とする。(演習書, 基礎問題 8.2)

【解答】

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = - \frac{d}{dt} (B(t)\pi a^2) = -\pi a^2 B'(t)$$

$$i = \frac{e}{R} = - \frac{\pi a^2}{R} B'(t)$$

$$\begin{cases} B_1(t) = \frac{B_0}{t_1} t \\ B_2(t) = B_0 \\ B_3(t) = -\frac{B_0}{t_3 - t_2} t + \alpha \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} e_{\max} = -\pi a^2 \frac{B_0}{t_1} \\ e_{\min} = \pi a^2 \frac{B_0}{t_3 - t_2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} i_{\max} = \frac{e_{\max}}{R} \\ i_{\min} = \frac{e_{\min}}{R} \end{cases} \quad (3)$$