

ファラデーの法則

1st. 2011/04/01
Lst. 2023/11/13

電磁気学の偉人マップ

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s}$
アンペア-マクスウェルの法則

$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$
ファラデーの法則

$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q$
ガウスの法則

$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$
ビオ-サバルの法則

$c = 2.99792458 \times 10^8$ [m/s] 光速

$e = 1.60217733 \times 10^{-19}$ [C] 素電荷

$\vec{F} = \vec{I} \times \vec{B}$ フレミング左手則

$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ フレミング右手則

$R = \rho \frac{l}{S}$ $C = \frac{Q}{V}$ $L = \frac{\phi}{I}$

$I = \frac{dQ}{dt}$ $E = IR$ オームの法則

$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \hat{r}$ クーロンの法則

ミクロの観察/観測

ミリカン 1868-1953 (85)
ヘルツ 1857-1894 (37)
テスラ 1856-1943 (87)
トムソン 1856-1940 (84)
ローレンツ 1853-1928 (75)
フレミング 1849-1945 (96)
マクスウェル 1831-1879 (48)
キルヒホッフ 1824-1887 (63)
レンツ 1804-1865 (61)
ヘンリー 1797-1878 (81)
ファラデー 1791-1867 (76)
サバル 1791-1841 (50)
オーム 1789-1854 (65)
ガウス 1777-1855 (78)
エルステッド 1777-1851 (74)
アンペール 1775-1836 (61)
ビオ 1774-1862 (88)
ボルタ 1745-1827 (82)
クーロン 1736-1806 (70)
キャベンディッシュ 1731-1810 (79)
平賀源内 1728-1780 (52)
フランクリン 1706-1790 (84)
デュ・フェ 1698-1739 (41)
ギルバート 1544-1603 (59)

1639 宗教・外交・貿易制限

1854

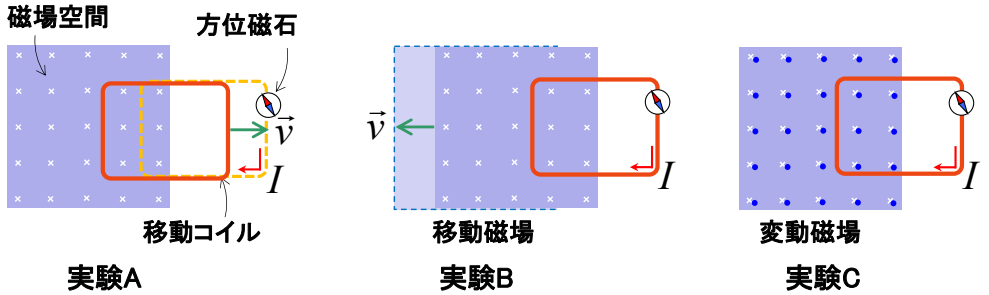
マクロの観察/観測

どんな偉人も先達の努力・知恵・発見を利用している。

ファラデーの実験

問: 電流(電界)から磁界が作られるように、磁界から電流(電界)を作れるのでは?

$\vec{J} = \sigma \vec{E}, I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$ ※導電率σが大きい場所に電界Eが加わると電流Iが流れる。
すなわち、電流が流れる現象の大元は導体中の電界である。
(電荷が常に静止している静電界では導体中の電界はゼロ)

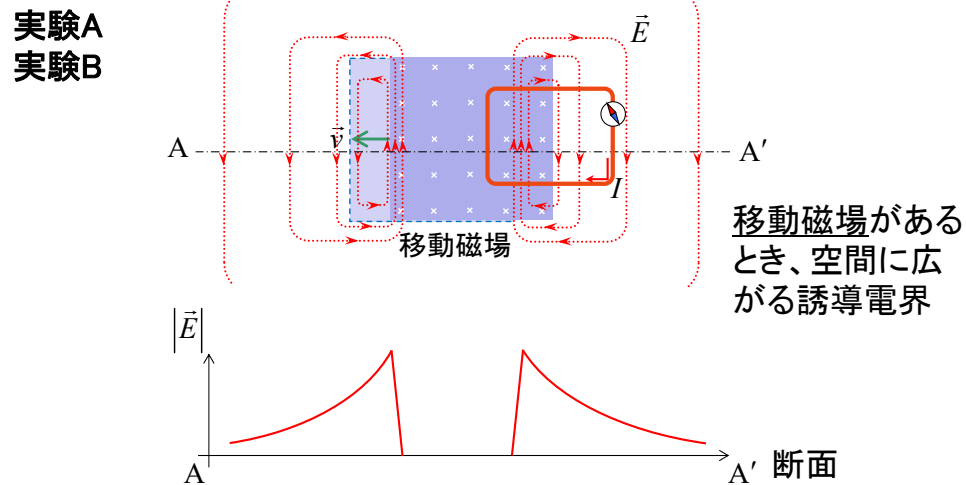


3つの実験の共通点は?

コイルを貫く磁束が時間的に変化したときのみ、
コイルに電流が流れる=コイルに起電力が発生する。
(コイル導体がなくても、空間には電界が発生している。)

J. D. Griffiths, Introduction to electrodynamics, 3rd ed., p.301

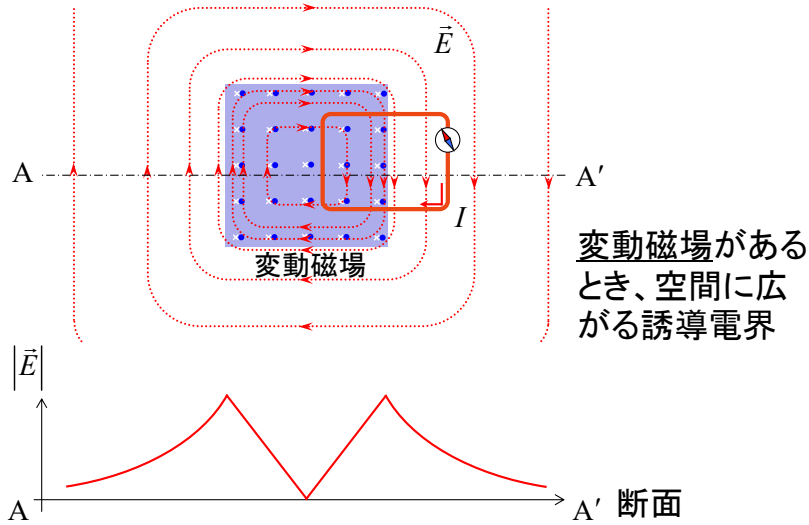
誘導電界の発生1



磁場を検出するのに方位磁石を使ったように、**導体ループの役割は電界を検出する、すなわち電界を電流に変換するためのものである。** 実際の電界は空間全体に広がっている。この電界を誘導電界と呼ぶ。

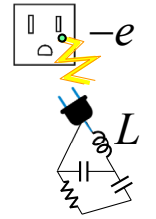
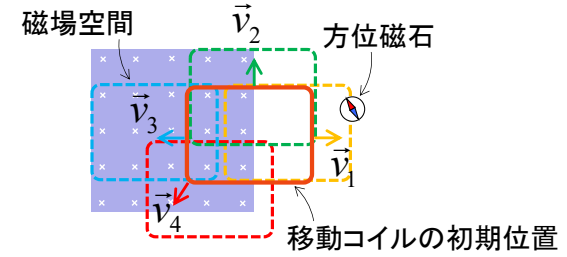
誘導電界の発生2

実験C



磁場を検出するのに方位磁石を使ったように、**導体ループの役割は電界を検出する、即ち電界を電流に変換するためのもの**である。実際の電界は空間全体に広がっている。この電界を誘導電界と呼ぶ。

誘導電界(電流)の向きは？



実験Aの数値思考実験

移動後のコイル	磁束(前)	磁束(後)	増減	電流方向	電流量
1	6	3	-3	右回	$\propto v_1$
2	6	6	0	なし	0
3	6	12	+6	左回	$\propto v_3$
4	6	6	0	なし	0

コンセントを急に抜いたとき火花が飛ぶのは、コイルを貫く急激な磁束変化が原因

急激な変化は自然が最も嫌う現象の1つ

ファラデーの実験装置

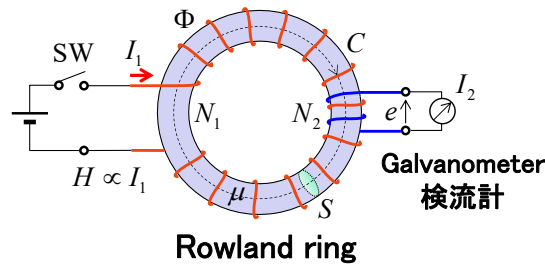
図のような磁気回路を考える。1次コイル側において成立する**アンペールの法則(1820年)**では、次のことが分かっていた。

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I_1$$

$$\Rightarrow H = \frac{N_1 I_1}{l}$$

$$\Rightarrow B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 I_1}{l}$$

$$\Rightarrow \Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS = \frac{\mu_0 \mu_r N_1 I_1 S}{l}$$



すなわち、発生する磁束Φは1次コイルを流れる電流の大きさ I_1 に比例する。これに対して、2次コイル側において成立する**ファラデーの実験装置(1831年)**では、次のことが分かった。

- SWが定常状態では検流計は振れず、SWがONの瞬間とOFFの瞬間だけ、2次コイルの検流計が振れた。
- 巻き数 N_2 を増やすと検流計の振れ幅が大きくなった。
- 検流計を流れる電流の向きは、1次コイルで発生した磁束Φを打ち消す方向であった。

ファラデーの実験の定式化

① 2次コイルに発生する起電力 e は、2次コイルを貫く**磁束Φの時間変化に比例**した。

$$e \propto \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

② 2次コイルに発生する起電力 e は、2次コイルの**巻数 N_2 に比例**した。

$$e \propto N_2 \quad (2)$$

③ 2次コイルに発生する起電力の向きは、2次コイルを貫く**磁束の変化を打ち消す方向**であった。(レンツの法則1834年)

$$e \propto - \quad (3)$$

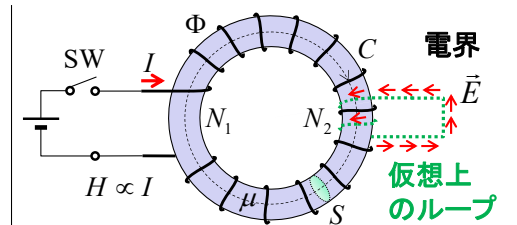
以上をまとめて、

$$e = -N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\varphi}{dt} \quad (4)$$

を**ファラデーの法則**と呼ぶ。ただし、

$$\varphi = N\Phi \quad (5)$$

を**磁束鎖交数**と呼ぶ。



도체は導電率 σ が高く、構成方程式より $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (6)

であるから、電界 E が加わると電流密度 J [A/m²]の伝導電流 I が流れる。ノイマンは、**2次コイルが物理的に閉じた導体ループでなく、仮想ループ上に生じている電界について考えても同じ起電力になることを示した(ノイマンの法則1845年)**。これを式で示すと次式となる。

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (7)$$

ファラデーの法則

起電力 $e = - \frac{d\phi}{dt}$ 磁束鎖交数

変化を妨げる向き

時間

単位系 [V] = [Wb] ÷ [s]

ファラデーの法則(積分形)

最上位互換バージョン(保存場の性質の拡張)

積分路が閉じていることを示す記号

電界 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

積分路を構成する微小線素

時間(偏)微分

磁束密度

積分面を構成する微小面素

積分が積分路Cに沿った線積分であることを示す記号

積分が左辺積分路Cの内側に囲まれた開いた面積分であることを示す記号

単位系 [V] = [V/m] × [m] = [Wb/m²] × [m²] ÷ [s]

電界のエネルギーが磁界のエネルギーに変換されているので、保存場の性質は成立しない。

保存場の性質

別名: エネルギー保存の法則

位置エネルギー(ポテンシャルエネルギー)が運動エネルギー(電荷の加速)に変化するだけ

積分路が閉じていることを示す記号

単位電荷あたりの力 電界

積分路を構成する微小線素

$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

内積記号

仕事 { した仕事(発) される仕事(受) }

積分が積分路Cに沿った線積分であることを示す記号

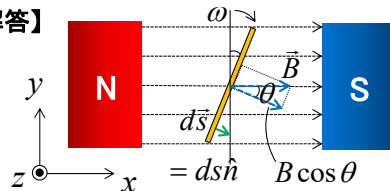
[J/C] = [V/m] × [m]

電荷は、電場では荷物に相当する。

ファラデーの法則の問題

【例題】図に示すように一様な磁束密度 B [T]の磁界中で、巻数 n、面積 S [m²]のコイルが z 軸まわりを角速度 ω [rad/s]で回転しているとき、コイルに誘導される起電力を求めよ。(教科書 p.118) ... 発電機の原理

【解答】



コイルを貫く磁束は

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = BS \cos \theta = BS \cos \omega t$$

磁束鎖交数は

$$\phi = N\Phi = nBS \cos \omega t$$

ファラデーの法則より

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = nBS \sin \omega t$$

磁束Φと起電力eの位相は90度ずれる。

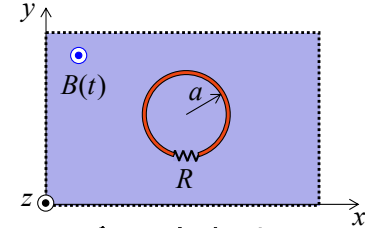
ベクトル演算すると

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B\hat{x} & \Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ \varphi &= N\Phi = n \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \\ e &= - \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(n \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} \right) \\ &= -n \frac{d}{dt} \int_S B\hat{x} \cdot ds\hat{n} \\ &= -n \frac{d}{dt} BS \cos \theta \\ &= -n \frac{d}{dt} BS \cos \omega t \\ &= +n\omega BS \sin \omega t \end{aligned}$$

ファラデーの法則の問題

【演習】図に示すような半径 a [m] の円形ループに一様な磁束密度 B [T] が通っている。この磁束密度 B が図のように時間変化している。ループに発生する起電力とループに接続された抵抗 R [Ω] を流れる電流を求めよ。さらに図中に起電力 e と電流 i の様子を書き入れよ。ただし、ループを構成している導線抵抗は無視するものとし、起電力、電流ともに時計回りを正とする。(演習書 基礎8.2)

【解答】

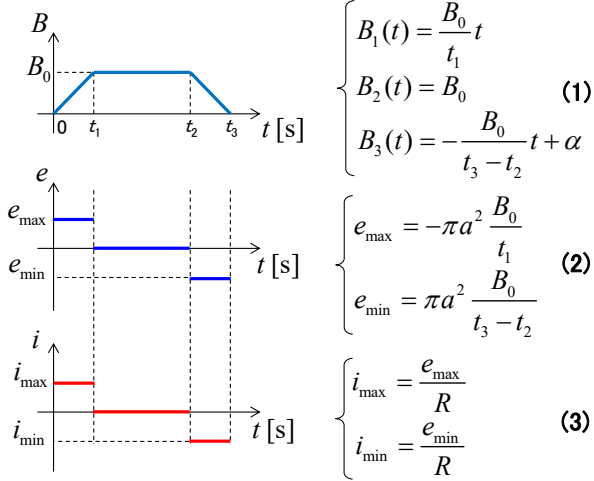


ファラデーの法則より

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B(t)\pi a^2)$$

$$= -\pi a^2 B'(t)$$

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{\pi a^2}{R} B'(t)$$



ファラデーの法則の問題

【演習】半径 R 、単位長さあたりの巻き数 n の非常に長いソレノイドに、 $I = I_0 \cos \omega t$ で時間変化する電流が流れている。ここで、 I_0 は最大電流であり、 ω は電流源の角振動数である。ソレノイドの軸線からの距離 r の位置における電界を求めよ。(R. A. Serway, 科学者と技術者のための物理学Ⅲ電磁気学, p.909, 例題31.7)

【解答】積分形のファラデーの法則より

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

(1) $r > R$ のとき

$$E(2\pi r) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mu_0 n I \hat{z} \cdot ds \hat{z}$$

$$= -\pi R^2 \mu_0 n I_0 \frac{d}{dt} (\cos \omega t)$$

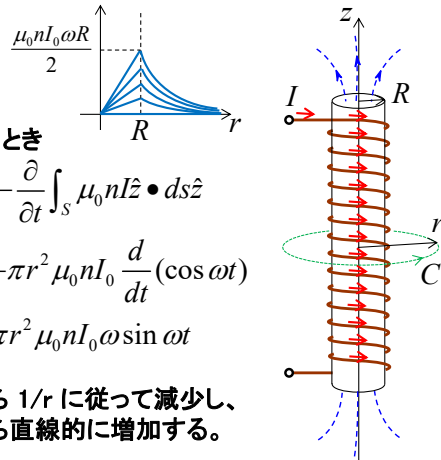
$$= \pi R^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$

(2) $r < R$ のとき

$$E(2\pi r) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mu_0 n I \hat{z} \cdot ds \hat{z}$$

$$= -\pi r^2 \mu_0 n I_0 \frac{d}{dt} (\cos \omega t)$$

$$= \pi r^2 \mu_0 n I_0 \omega \sin \omega t$$



ソレノイド外部の電界は正弦関数で変化しながら $1/r$ に従って減少し、ソレノイド内部の電界は正弦関数で変化しながら直線的に増加する。

答え $E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega R^2}{2r} \sin \omega t \quad (r > R), \quad \frac{\mu_0 n I_0 \omega r}{2} \sin \omega t \quad (r < R)$

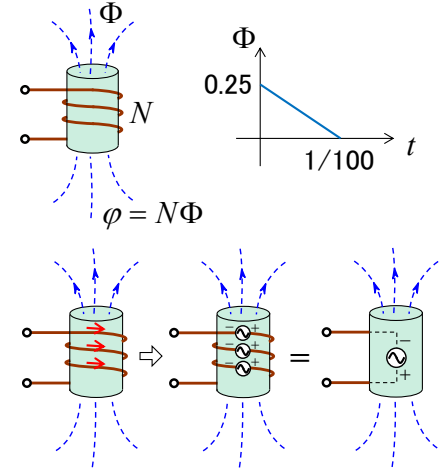
ファラデーの法則の問題

【演習】巻数 10 回のコイルに 0.25 Wb の磁束が通っている。この磁束を直線的に減少させて 1/100 秒間に 0 としたとき、このコイルに発生する誘導起電力を求めよ。(教科書 章末8.1)

【解答】ファラデーの法則より

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(N\Phi)}{\Delta t}$$

$$= -\frac{(10 \cdot 0.25) - (10 \cdot 0)}{1/100}$$



急激な磁束の減少を妨げるように誘導電流が流れる。誘導電流を流そうとする逆起電力のイメージ。

答え $e = -250 \text{ V}$

電磁誘導の実験(変動磁場)

【実験】磁石を高さ h [m] から自由落下させ、コイルに発生する誘導起電力 V [V] の最大値 V_{\max} をオシロスコープで観察する。

- h の値を 10, 40, 90, 160 cm と変化させて誘導起電力の最大値を求める。実験はバラツキを考慮して数回測定した平均をとる。
- h を固定してコイルの巻数を 10, 20, 30, 40 と変化させたとき、誘導起電力の最大値を求める。実験はバラツキを考慮して数回の平均をとる。

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad [\text{m/s}]$$

