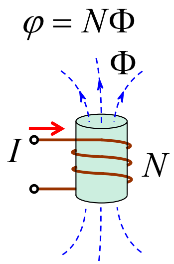
自己インダクタンスと相互インダクタンス

1st. 2011/04/01
Lst. 2021/11/29

自己インダクタンスの定義

Joseph Henry, 1797–1878 (81)

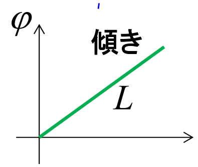


【インダクタンス L の定義】
<u>単位電流 1A を自身に流したとき</u>
<u>の磁束鎖交数</u> φ [Wb/A] = [H] ヘンリー

磁束鎖交数　磁束　電流

$$\varphi = N\Phi = LI$$

巻数　比例定数
インダクタンスと呼ぶ



空芯であれば際限なく
磁束鎖交数は増える。

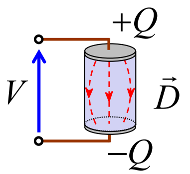
[Wb] = [Wb/A] × [A]

※流れる電流 I が大きいほど磁束鎖交数 φ は大きくなる

問：導線抵抗は非常に小さいので、電圧降下はほとんど生じないはず。しかし、導線をループ状に変形しただけでφの時間微分に相当する非常に大きな逆起電力が発生する(ファラデーの法則)のは不思議ではありませんか？

キャパシタンスの定義

Michael Faraday, 1791–1867 (76)

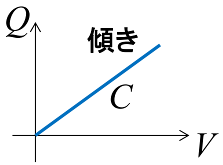


【キャパシタンス C の定義】
<u>単位電圧 1V を加えたときの</u>
<u>蓄積電荷量</u> Q [C/V] = [F] ファラッド

電荷　電圧

$$Q = CV$$

比例定数
キャパシタンスと呼ぶ



耐圧を超えると放電して
絶縁破壊が起きる。

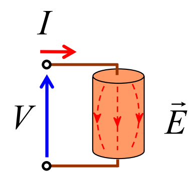
[C] = [C/V] × [V]

※加える電圧 V が大きいほど蓄積電荷 Q は大きくなる

問： キャパがないとすぐにキレてしまう。キレると絶縁・破壊が起きる。人間関係と良く似ていませんか？

レジスタンスの定義

Georg Simon Ohm, 1789–1854 (65)

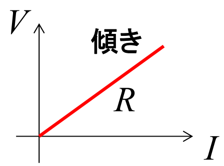


【レジスタンスR の定義】
<u>単位電流 1A を流したときの</u>
<u>降下電圧</u> V [V/A] = [Ω] オーム

電圧　電流

$$V = RI$$

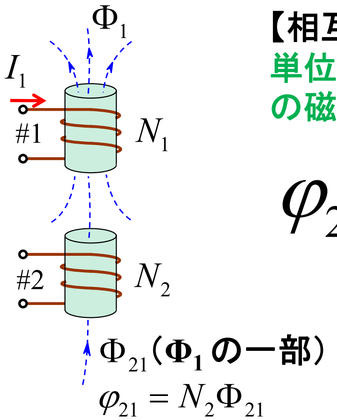
比例定数
レジスタンスと呼ぶ



[V] = [V/A] × [A]

※流れる電流 I が大きいほど電圧 E は大きくなる

相互インダクタンス(1)



【相互インダクタンス M の定義】
単位電流 1A を別のコイルに流したときの磁束鎖交数 φ [Wb/A] = [H]

$$\varphi_{21} = N_2\Phi_{21} = MI_1$$

比例定数
相互インダクタンスと呼ぶ

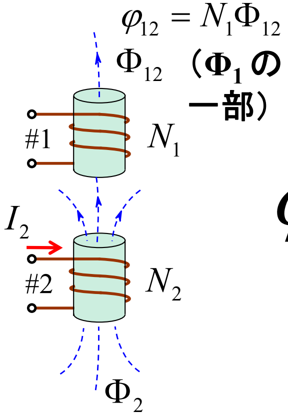
[Wb] = [Wb/A] × [A]

ファラデーの法則より2次コイルに生じる逆起電力は

$$e_2 = -\frac{d\varphi_{21}}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt}$$

問： Mutualうどんの店、Mutualスタンドとはどんな店舗形態でしょうか？

相互インダクタンス(2)



【相互インダクタンス M の定義】
単位電流 1A を別のコイルに流したときの磁束鎖交数 φ [Wb/A] = [H]

$$\varphi_{12} = N_1\Phi_{12} = MI_2$$

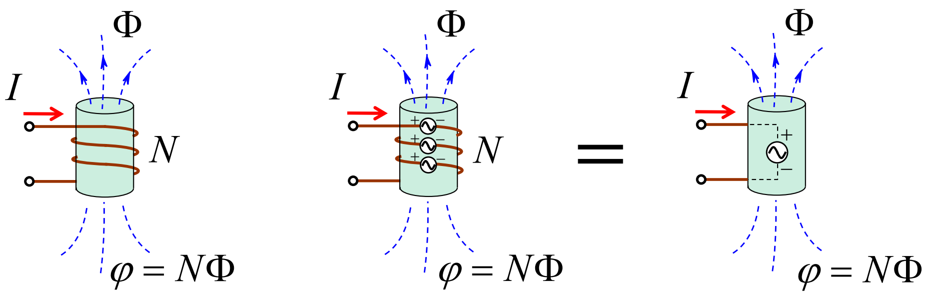
比例定数
相互インダクタンスと呼ぶ

[Wb] = [Wb/A] × [A]

ファラデーの法則より1次コイルに生じる逆起電力は

$$e_1 = -\frac{d\varphi_{12}}{dt} = -M\frac{dI_2}{dt}$$

逆起電力のイメージ



	1巻あたり	N巻あたり
起電力の大きさ	$\lvert e\rvert = \frac{d\Phi}{dt}$	$\lvert e_{\text{total}}\rvert = N\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}$
起電力の方向	もとの電流 I を打ち消す方向	もとの電流 I を打ち消す方向

急激な変化を好まない自然界のルールがここ(電磁気学の法則の一つ)にも垣間見える。

自己-相互インダクタンスの関係

$$\begin{cases} \varphi_1 = N_1\Phi_1 = L_1I_1 \quad \cdots(1) \\ \varphi_2 = N_2\Phi_2 = L_2I_2 \quad \cdots(2) \\ \varphi_{21} = N_2\Phi_{21} = MI_1 \quad \cdots(3) \\ \varphi_{12} = N_1\Phi_{12} = MI_2 \quad \cdots(4) \end{cases}$$

$$L_1 = \frac{N_1\Phi_1}{I_1} \quad \cdots(1)'$$

$$L_2 = \frac{N_2\Phi_2}{I_2} \quad \cdots(2)'$$

コイル間の結合定数を k (0≦k≦1) とすれば

$$\begin{cases} \Phi_{21} = k\Phi_1 \quad (0 \le k \le 1) \quad \cdots(5) \\ \Phi_{12} = k\Phi_2 \quad (0 \le k \le 1) \quad \cdots(6) \end{cases}$$

$$M = \frac{N_2(k\Phi_1)}{I_1} \quad \cdots(3)'$$

$$M = \frac{N_1(k\Phi_2)}{I_2} \quad \cdots(4)'$$

(1)’×(2)’×k²=(3)’×(4)’の関係があることに着目すると

$$L_1L_2k^2 = \frac{N_1\Phi_1}{I_1}\frac{N_2\Phi_2}{I_2}k^2 = M^2$$

$$\boxed{M = k\sqrt{L_1L_2}}$$

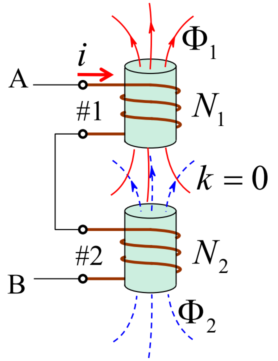
【例題】相互インダクタンスM = 0.3 Hで自己インダクタンスがそれぞれL_1 = 0.45 H, L_2 = 0.8 Hの二つのコイルがある。結合係数kを求めよ。(教科書 例題9.1)

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} = \frac{0.3}{\sqrt{0.45(0.8)}} = 0.5, \quad 50\%$$

インダクタンスの直列接続

Φ_1　コイル #1 に電流 i が流れたことによる磁束（実線）

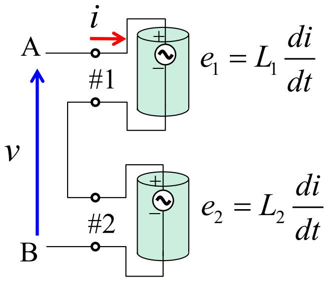
Φ_2　コイル #2 に電流 i が流れたことによる磁束（破線）



$$v = \underbrace{L_1 \frac{di}{dt}}_{e_1} + \underbrace{L_2 \frac{di}{dt}}_{e_2}$$

$$= (L_1 + L_2)\frac{di}{dt}$$

$$= L\frac{di}{dt}$$



逆起電力の向き

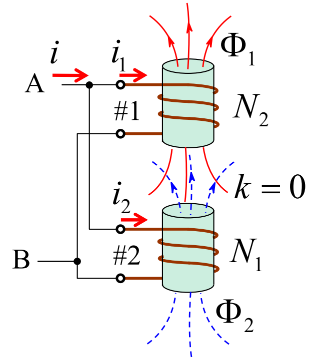
AB間の合成インダクタンス

$$\boxed{L_{AB} = L_1 + L_2}$$

インダクタンスの並列接続

Φ_1　:　コイル #1 に電流 i_1 が流れたことによる磁束（実線）

Φ_2　:　コイル #2 に電流 i_2 が流れたことによる磁束（破線）

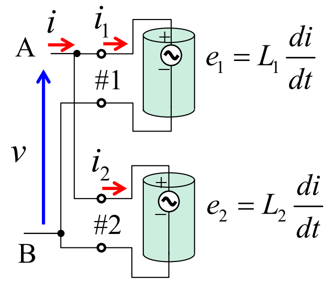


$$v = \underbrace{L_1 \frac{di_1}{dt}}_{e_1} = \underbrace{L_2 \frac{di_2}{dt}}_{e_2}$$

$i = i_1 + i_2$ を t で微分すると

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

$$= \frac{v}{L_1} + \frac{v}{L_2} = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)v$$



逆起電力の向き

$$v = \frac{1}{\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)}\frac{di}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

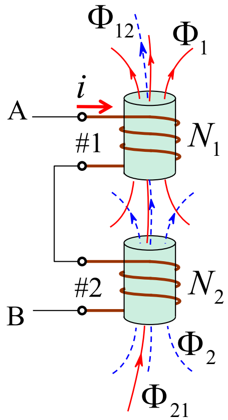
$$\boxed{L_{AB} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}}$$

AB間の合成インダクタンス

結合インダクタンスの直列接続１

Φ_1　:　コイル #1 に電流 i が流れたことによる磁束（実線）

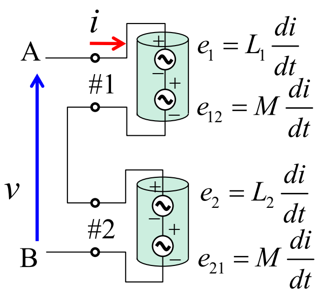
Φ_2　:　コイル #2 に電流 i が流れたことによる磁束（破線）



$$v = \underbrace{L_1 \frac{di}{dt}}_{e_1} + \underbrace{M \frac{di}{dt}}_{e_{12}} + \underbrace{L_2 \frac{di}{dt}}_{e_2} + \underbrace{M \frac{di}{dt}}_{e_{21}}$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M)\frac{di}{dt}$$

$$= L\frac{di}{dt}$$



逆起電力の向き

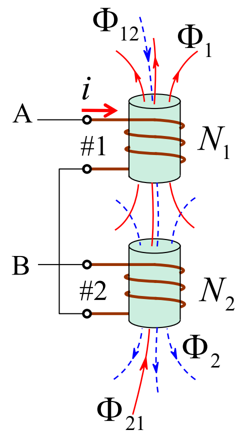
AB間の合成インダクタンス

$$\boxed{L_{AB} = L_1 + L_2 + 2M}$$

結合インダクタンスの直列接続２

Φ_1　:　コイル #1 に電流 i が流れたことによる磁束（実線）

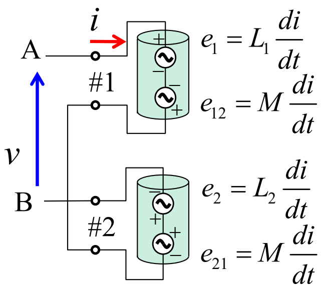
Φ_2　:　コイル #2 に電流 i が流れたことによる磁束（破線）



$$v = \underbrace{L_1 \frac{di}{dt}}_{e_1} - \underbrace{M \frac{di}{dt}}_{e_{12}} + \underbrace{L_2 \frac{di}{dt}}_{e_2} - \underbrace{M \frac{di}{dt}}_{e_{21}}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}$$

$$= L\frac{di}{dt}$$

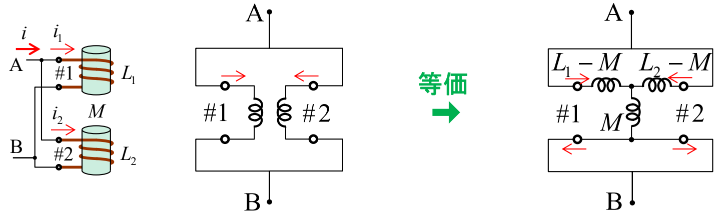


逆起電力の向き

AB間の合成インダクタンス

$$\boxed{L_{AB} = L_1 + L_2 - 2M}$$

結合インダクタンスの並列接続1



左の回路

$$\begin{cases} v = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} & \cdots (1) \\ v = M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} & \cdots (2) \end{cases}$$

同じものを足して引く

右の等価回路

$$\begin{cases} v = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \boxed{- M \dfrac{di_1}{dt}} + M \dfrac{di_2}{dt} \boxed{+ M \dfrac{di_1}{dt}} \\ \quad = (L_1 - M) \dfrac{di_1}{dt} + M \left(\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{di_2}{dt} \right) \quad \cdots (1)' \\ v = M \dfrac{di_1}{dt} \boxed{+ M \dfrac{di_2}{dt}} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \boxed{- M \dfrac{di_2}{dt}} \\ \quad = M \left(\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{di_2}{dt} \right) + (L_2 - M) \dfrac{di_2}{dt} \quad \cdots (2)' \end{cases}$$

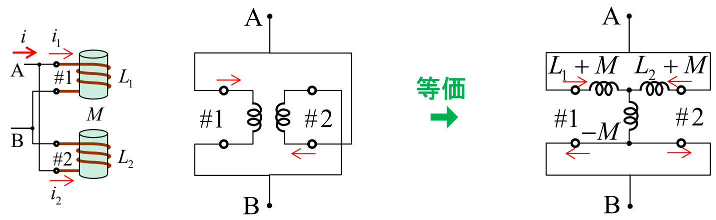
AB間の合成インダクタンス

$$\boxed{L_{\mathrm{AB}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}}$$

$$L_{\mathrm{AB}} = \underbrace{(L_1 - M) \| (L_2 - M)}_{\text{並列}} \underbrace{+ M}_{\text{直列}}$$

例えば，末武，``基礎電気回路1,'' p.253, 培風館, 1971

結合インダクタンスの並列接続2



左の回路

$$\begin{cases} v = L_1 \dfrac{di_1}{dt} - M \dfrac{di_2}{dt} & \cdots (3) \\ v = -M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} & \cdots (4) \end{cases}$$

同じものを足して引く

右の等価回路

$$\begin{cases} v = L_1 \dfrac{di_1}{dt} \boxed{+ M \dfrac{di_1}{dt}} - M \dfrac{di_2}{dt} \boxed{- M \dfrac{di_1}{dt}} \\ \quad = (L_1 + M) \dfrac{di_1}{dt} - M \left(\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{di_2}{dt} \right) \quad \cdots (3)' \\ v = -M \dfrac{di_1}{dt} \boxed{- M \dfrac{di_2}{dt}} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \boxed{+ M \dfrac{di_2}{dt}} \\ \quad = -M \left(\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{di_2}{dt} \right) + (L_2 + M) \dfrac{di_2}{dt} \quad \cdots (4)' \end{cases}$$

AB間の合成インダクタンス

$$\boxed{L_{\mathrm{AB}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}}$$

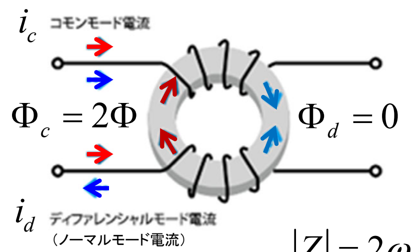
$$L_{\mathrm{AB}} = \underbrace{(L_1 + M) \| (L_2 + M)}_{\text{並列}} \underbrace{+ (-M)}_{\text{直列}}$$

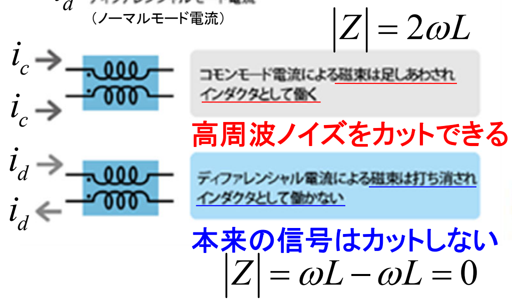
例えば，末武，``基礎電気回路1,'' p.253, 培風館, 1971

インダクタンス接続のまとめ

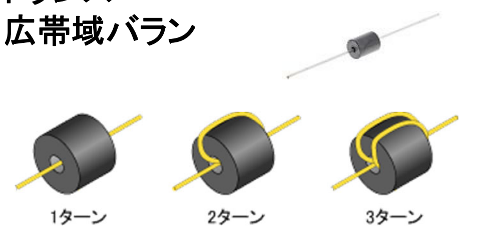
	強め合い +	打ち消し合い −
直列接続（M=0）	$L_S = L_1 + L_2$	$L_S = L_1 + L_2$
直列接続（M≠0）	$L_S^+ = L_1 + L_2 + 2M$	$L_S^- = L_1 + L_2 - 2M$
並列接続（M=0）	$L_P = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$	$L_P = \dfrac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$
並列接続（M≠0）	$L_P^+ = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$	$L_P^- = \dfrac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$

その他のインダクタンス





コモンモードチョークコイル
フェライトコア、フェライトビーズ
トランス
広帯域バラン

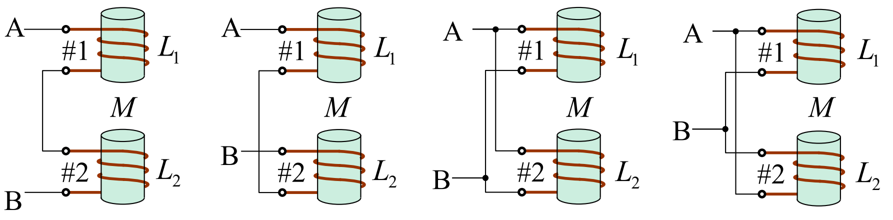


村田製作所 ノイズ対策の基礎【第6回】
https://www.murata.com/ja-jp/products/emiconfun/emc/2011/10/28/en-20111028-p1
北川工業 https://www.techno-kitagawa.com/techinfo/tech/ferrite.html

インダクタンスの計算演習1

【演習】インダクタンス L_1, L_2 が図のように接続されている。巻き方に注意して合成インダクタンス L_{AB} を求めよ。ただし、相互インダクタンスは M である。また、コイル全体に蓄えられる磁気エネルギーを求めよ。ただし、コイルは空芯である。

【解答】



(1)　(2)　(3)　(4)

合成インダクタンス

(1)	(2)	(3)	(4)
$L_{AB}=L_1+L_2+2M$	$L_{AB}=L_1+L_2-2M$	$L_{AB}=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}$	$L_{AB}=\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}$

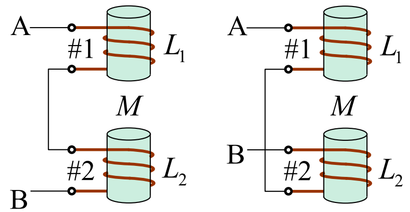
磁気エネルギー

(1)	(2)	(3)	(4)
$\frac{1}{2}(L_1+L_2+2M)I^2$	$\frac{1}{2}(L_1+L_2-2M)I^2$	$\frac{1}{2}\left(\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2-2M}\right)I^2$	$\frac{1}{2}\left(\dfrac{L_1L_2-M^2}{L_1+L_2+2M}\right)I^2$

インダクタンスの計算演習2

【例題】コイルを直列に接続するとき、巻き方が同じ方向になるようにしたときの合成インダクタンスは30 mHで、巻き方が逆になるように接続したときは14 mHとなった。相互インダクタンスを求めよ。（教科書，例題9.2）

【解答】 直列接続なので、次の2パターンが考えられる。



① 強め合いの直列合成インダクタンス

$$L_S^+=L_1+L_2+2M$$

② 打ち消しあいの直列合成インダクタンス

$$L_S^-=L_1+L_2-2M$$

直列合成インダクタンスの式より、次の連立方程式が得られる。

$$\begin{cases} L_1+L_2+2M=30 & (1) \\ L_1+L_2-2M=14 & (2) \end{cases}$$

(1)−(2)より、L_1とL_2を消去して

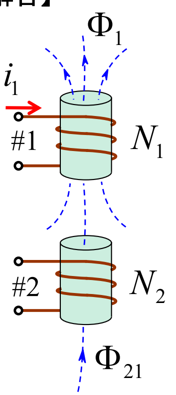
$$4M=16\ \mathrm{mH}$$

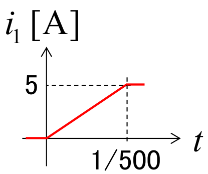
$$\therefore M=4\ \mathrm{mH}$$

インダクタンスの計算演習3

【演習】#1と#2の2つのコイルがある。#1のコイルに流れる電流が1/500秒間に5 A変化したとき、#1, #2のコイルにそれぞれ120 V, 40 Vの電圧が誘導された。#1の自己インダクタンスと相互インダクタンスを求めよ。（演習書，基礎9.2類題）

【解答】





① ファラデーの法則より、#1に発生する起電力は

$$e_1=L_1\frac{di_1}{dt}$$

$$L_1=\frac{e_1}{\dfrac{di_1}{dt}}=\frac{120}{\dfrac{5}{1/500}}=0.048\ \mathrm{H}$$

② ファラデーの法則より、#2に発生する起電力は

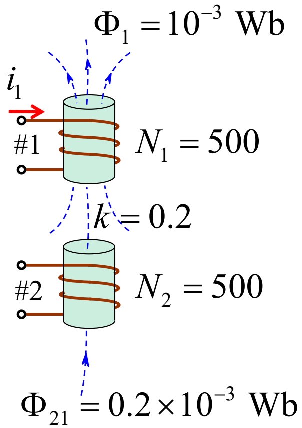
$$e_2=M\frac{di_1}{dt}$$

$$M=\frac{e_2}{\dfrac{di_1}{dt}}=\frac{40}{\dfrac{5}{1/500}}=0.016\ \mathrm{H}$$

インダクタンスの計算演習4

【演習】巻数が500回のまったく同じ形のコイルA, Bがある。コイルAに5 Aの電流をながしたとき10^{-3} Wbの磁束が生じ、その20%がコイルBに鎖交したとすれば、A, B両コイルの自己インダクタンスと相互インダクタンスは幾らか。（演習書，基礎9.3 類題）

【解答】



① 自己インダクタンスの定義より

$$\varphi_1=L_1I_1$$

$$L_1=\frac{\varphi_1}{I_1}=\frac{N_1\Phi_1}{I_1}=\frac{500\cdot10^{-3}}{5}=100\ \mathrm{mH}$$

② 相互インダクタンスの定義より

$$\varphi_{21}=MI_1$$

$$M=\frac{\varphi_{21}}{I_1}=\frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}=\frac{500(0.2\times10^{-3})}{5}$$

$$=20\ \mathrm{mH}$$