

1.1 磁気エネルギー

1.1.1 電気エネルギー

回路の電気エネルギー

図 1.1 左上に示すようなコンデンサ C に直流電圧 V を加えた場合を考える。ただし、 R はコンデンサの抵抗分*1である。キルヒホッフの電流則より

$$I = I_C + I_R \quad (1.1)$$

ここで、以下の関係

$$I_C = \frac{dQ}{dt}, \quad I_R = \frac{v}{R} = Gv, \quad Q = Cv \quad (1.2)$$

を式 (1.1) に代入すると

$$I = \frac{dQ}{dt} + Gv = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad (1.3)$$

式 (1.3) の両辺に vdt を掛けると

$$vIdt = Cv dv + \frac{v^2}{R} dt \quad (1.4)$$

となる。ここで、式 (1.4) の左辺は電源がした仕事 [J]、右辺第 1 項は dv 増えたことで蓄えられた電気エネルギー [J] で図 1.1 左下の面積 $Cv dv$ に等しい。また、右辺第 2 項は抵抗の発熱 (ジュール熱) [J] である。コンデンサに加える電圧 v を $0 \rightarrow V$ まで増やしたとき、コンデンサ全体の蓄積エネルギーは式 (1.4) 右辺第 1 項を v で積分して

$$W_e = \int_0^V Cv dv = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad [\text{J}] \quad (1.5)$$

となる。式 (1.5) を回路素子に蓄えられる電気エネルギーと呼ぶことにする。

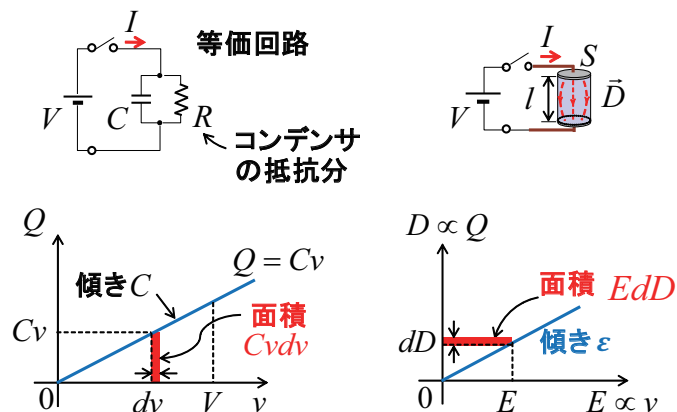


図 1.1 コンデンサと電気エネルギー

*1 漏れ抵抗又は、漏れコンダクタンス $G = 1/R$ と呼ぶ。

誘電体の電気エネルギー

さて、式 (1.3) は次式のように書くこともできる。

$$I = \frac{dQ}{dt} + \frac{v}{R} \quad (1.6)$$

式 (1.6) の両辺に vdt を掛けると、

$$vIdt = vdQ + \frac{v^2}{R}dt \quad (1.7)$$

ここで、左辺は電源がした仕事 dW_s [J]、右辺第 1 項は電荷が dQ [C] 増えたことで蓄えられたエネルギー dW_e [J]、右辺第 2 項は抵抗の発熱（ジュール熱） dW_j [J] である。さらに、ガウスの法則より

$$\oint_C \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q. \Rightarrow DS = Q, \quad E = \frac{Q}{\epsilon S} \quad (1.8)$$

であるから、コンデンサの電位差 v は

$$v = - \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = El = \frac{Ql}{\epsilon S} \quad (1.9)$$

となる。式 (1.6) の右辺第 1 項目は、式 (1.8) と式 (1.9) より

$$dW_e = vdQ = \frac{Ql}{\epsilon S}dQ = EldQ = ElSdD \quad (1.10)$$

となる。誘電体の全体積は Sl [m^3] であるから、単位体積あたりの蓄積エネルギー*2は

$$du_e = EdD \quad [J/m^3] \quad (1.11)$$

となる。これは図 1.1 右下の面積 EdD に等しい。電荷を $0 \rightarrow Q$ に増やしたとき、即ち、電束密度が $0 \rightarrow D$ に増えたとき、式 (1.11) を D で積分して

$$u_e = \int du_e = \int_0^D EdD \quad (1.12)$$

となる。通常の誘電体*3のように ED 特性に線形性がある場合は

$$u_e = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D}{\epsilon}D = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon} \quad [J/m^3] \quad (1.13)$$

となる。式 (1.13) を誘電体に蓄えられる単位体積あたりの電気エネルギーと呼ぶ。式 (1.5) と式 (1.13) は、コンデンサを回路素子（電極上の真電荷）として見るか、電極に挟まれた内部の誘電体として見るかの違いで同一のものである。

*2 大文字の W [J] と区別するため、単位体積あたりのエネルギーには小文字の w [J/m^3] を使いたいですが、手書きでは大文字と小文字の区別が付きにくいので、小文字の w の代わりに u (unit) を使うことにする。

*3 ヒステリシス特性のある強誘電体を除く。

1.1.2 磁気エネルギー

回路の磁気エネルギー

図 1.2 左上に示すコイル L に直流電流 I を加えた場合を考える。ただし、 R はコイルの抵抗分*4である。キルヒホッフの電圧則より

$$V = \frac{d\varphi}{dt} + Ri \quad (1.14)$$

ここで、線形コイル（常磁性、反磁性）の場合に成立する次式

$$\varphi = Li \quad (1.15)$$

を式 (1.14) に代入すると

$$V = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (1.16)$$

式 (1.16) の両辺に idt を掛けると

$$Vidt = Lidi + Ri^2dt \quad (1.17)$$

となる。ここで、式 (1.17) の左辺は電源がした仕事 [J]、右辺第 1 項は di 増えたことで蓄えられた磁気エネルギー [J] で図 1.2 左下の面積 $Lidi$ に等しい。また、右辺第 2 項は抵抗の発熱（ジュール熱）[J] である。コイルに流す電流 i を $0 \rightarrow I$ まで増やしたとき、コイル全体の蓄積エネルギーは式 (1.17) 右辺第 1 項を i で積分して

$$W_m = \int_{i=0}^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\varphi I \quad [\text{J}] \quad (1.18)$$

となる。式 (1.18) を回路素子に蓄えられる磁気エネルギーと呼ぶことにする。

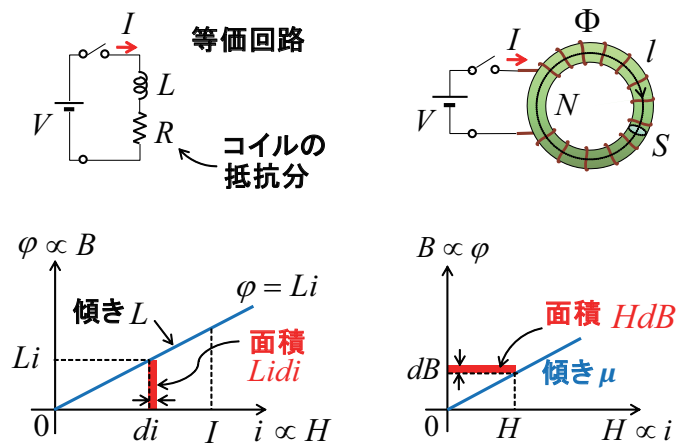


図 1.2 コイルと磁気エネルギー

*4 導線抵抗と呼ぶ。

磁性体の磁気エネルギー

さて、式 (1.14) は $\varphi = N\Phi = NBS$ より、次式のように書くこともできる。

$$V = NS \frac{dB}{dt} + Ri \quad (1.19)$$

式 (1.19) の両辺に idt を掛けると、

$$Vidt = NSidB + Ri^2dt \quad (1.20)$$

ここで、左辺は電源がした仕事 dW_s [J]、右辺第 1 項は dB 増えたことで蓄えられた磁気エネルギー dW_m [J]、右辺第 2 項は抵抗の発熱（ジュール熱） dW_j [J] である。さらに、アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni \quad (1.21)$$

であるから、コイル内の磁界 H は

$$Hl = Ni \quad (1.22)$$

で求められる。式 (1.19) の右辺第 1 項目は、式 (1.22) より

$$dW_m = NSidB = SHldB = SlHdB \quad [J] \quad (1.23)$$

となる。磁性体の全体積は Sl [m^3] であるから、単位体積あたりの蓄積エネルギー*5は

$$du_m = HdB \quad [J/m^3] \quad (1.24)$$

となる。これは図 1.2 右下の面積 HdB に等しい。磁束密度を $0 \rightarrow B$ に増やしたとき、単位体積あたりの蓄積エネルギーは式 (1.24) を B で積分して

$$u_m = \int du_m = \int_0^B HdB \quad (1.25)$$

となる。通常の磁性体*6のように BH 特性に線形性がある場合は

$$u_m = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}H(\mu H) = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B}{\mu}B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \quad [J/m^3] \quad (1.26)$$

となる。式 (1.26) を磁性体に蓄えられる単位体積当たりの磁気エネルギーと呼ぶことにする。式 (1.18) と式 (1.26) は、コイルを回路素子（巻線電流）として見るか、巻線に包まれた内部の磁性体として見るかの違いで同一のものである。これをまとめると図 1.3 のようになる。単位体積あたりのエネルギー [J/m^3] は $[J] = [N \cdot m]$ の関係より、圧力（応力） [N/m^2] = [Pa] に等しい*7。

*5 大文字の W [J] と区別するため、単位体積あたりのエネルギーには小文字の w [J/m^3] を使いたいが、手書きでは大文字と小文字の区別が付きにくいので、小文字の w の代わりに u (unit) を使うことにする。

*6 ヒステリシス特性のある強磁性体を除く。

*7 エネルギーがあるということは圧力があるということの意味している。

	電気エネルギー	磁気エネルギー
回路素子 電極又は導線	$W_e = \int_0^V Cvdv = \frac{1}{2}CV^2 \quad \text{---} C$ $= \frac{1}{2}QV \quad [\text{J}]$	$W_m = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2}LI^2 \quad \text{---} L$ $= \frac{1}{2}\phi I \quad [\text{J}]$
誘電体・磁性体 電極又は巻線 内部のコア材料	$u_e = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \quad \text{---} \vec{D}$ $= \frac{1}{2}\frac{D}{\epsilon}D = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\epsilon} \quad \begin{matrix} [\text{J/m}^3] \\ = [\text{N/m}^2] \\ = [\text{Pa}] \end{matrix}$	$u_m = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}\mu H^2 \quad \text{---} \vec{B}$ $= \frac{1}{2}\frac{B}{\mu}B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \quad \begin{matrix} [\text{J/m}^3] \\ = [\text{N/m}^2] \\ = [\text{Pa}] \end{matrix}$

図 1.3 電磁気エネルギーのまとめ

1.1.3 ヒステリシス損

図 1.4 に示すヒステリシス特性を有する強磁性体に交流磁界を加えた場合に蓄えられる磁気エネルギーについて考える。単位体積当たりの蓄積エネルギーは式 (1.25) で与えられるので、面積 S_1, S_2, S_3, S_4 を図 1.4 のように定義すると

$$\int_a^b HdB = \int_{B=B_m}^{B_r} HdB = - \int_{B_r}^{B_m} HdB = S_1 < 0 \quad (1.27)$$

$$\int_b^d HdB = \int_{B=B_r}^{-B_m} HdB = - \int_{-B_m}^{B_r} HdB = S_2 + S_3 > 0 \quad (1.28)$$

$$\int_d^e HdB = \int_{B=-B_m}^{-B_r} HdB = S_3 < 0 \quad (H < 0) \quad (1.29)$$

$$\int_e^a HdB = \int_{B=-B_r}^{B_m} HdB = S_4 + S_1 > 0 \quad (1.30)$$

となる。図 1.4 において $a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow a$ の順に交流磁界が 1 周期変化したときに蓄えられる全エネルギーは、式 (1.27) から式 (1.30) の符号に注意して

$$u_m = -S_1 + S_2 + S_3 - S_3 + S_4 + S_1 = S_2 + S_4 \quad [\text{J/m}^3] \quad (1.31)$$

となる。従って、ヒステリシスループをもつ強磁性体に交流磁界を加えたとき、これを磁化するのに要する 1 周期当たりのエネルギーはループによって囲まれる面積に等しいことが分かる。これをヒステリシス損と呼ぶ*8。

1.2 力

1.2.1 仮想変位の仕事

エネルギー保存則より、

$$dW_m + dW_k = dW_s \quad (1.32)$$

*8 鉄に代表される磁性体を使った回路の損失には 2 種類あり、1 つは銅損（巻線のジュール熱による損失）、もう 1 つは鉄損（磁性損または磁気損失）である。後者はヒステリシス損と渦電流損に分けられる。

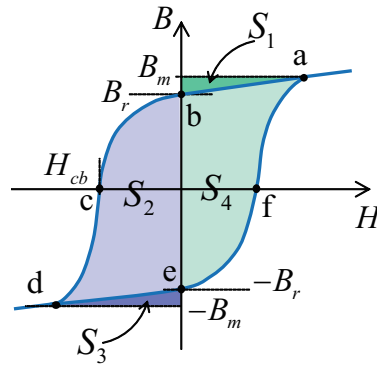


図 1.4 ヒステリシス損

ここで、左辺第 1 項は磁気エネルギー、左辺第 2 項は機械エネルギー、右辺は電源のエネルギーを示す。機械的な応力によって磁性体の形状が変形するとき（変位するとき）、式 (1.32) 左辺第 1 項の磁気エネルギーは

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial x} dx + \frac{\partial W_m}{\partial y} dy + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz \quad (1.33)$$

と書ける。ただし、 dx, dy, dz は直角座標系における変位置量である。式 (1.33) をベクトルで表記すると

$$dW_m = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x} \quad \frac{\partial W_m}{\partial y} \quad \frac{\partial W_m}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \nabla W_m \cdot d\vec{l} \quad (1.34)$$

となる。一方、式 (1.32) 左辺第 2 項の機械エネルギーは

$$dW_k = (F_x \ F_y \ F_z) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1.35)$$

と書ける。式 (1.34) と式 (1.35) を式 (1.32) 左辺に代入すると

$$dW_m + dW_k = \nabla W_m \cdot d\vec{l} + \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1.36)$$

従って、式 (1.32) は次のように書ける。

$$(\nabla W_m + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = dW_s \quad (1.37)$$

磁束鎖交数が $d\varphi$ 増えると、ファラデーの法則より $e = -d\varphi/dt$ 、即ち $d\varphi = edt$ の大きさの起電力が発生するので、電源は

$$dW_s = Iedt = Id\varphi \quad (1.38)$$

の仕事をする（エネルギーを供給する）。ここで、磁気エネルギーの増分は式 (1.18) より

$$dW_m = \frac{1}{2} d\varphi I = \frac{1}{2} dW_s \quad (1.39)$$

となる。式 (1.39) を式 (1.37) に代入して、

$$(\nabla W_m + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = 2dW_m \quad (1.40)$$

さらに、式 (1.40) に式 (1.34) を代入して、

$$(\nabla W_m + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = 2\nabla W_m \cdot d\vec{l} \quad (1.41)$$

従って、働く力は式 (1.41) の左辺と右辺を比較して

$$\vec{F} = \nabla W_m \quad (1.42)$$

となる。式 (1.42) は式 (1.37) の結果より、電源がした仕事の半分が磁気エネルギーになり、残りの半分が機械エネルギーに変換されることを意味している。一方、電源が仕事をしないときは式 (1.37) において $W_s = 0$ とすれば

$$\vec{F} = -\nabla W_m \quad (1.43)$$

となる。即ち、式 (1.43) は磁気エネルギーの変化分が仮想変位の仕事に変換されることを意味している。

■