

磁気エネルギーと力

1st. 2011/04/01

Lst. 2021/01/17

電磁気エネルギーのまとめ

	電気エネルギー	磁気エネルギー
回路素子 電極又は導線	$W_e = \int_0^V Cvdv = \frac{1}{2} CV^2$ $= \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad [J] \quad (1)$ <p>(1)=(1)' が成立することを確認せよ。</p>	$W_m = \int_0^I Lidi = \frac{1}{2} LI^2$ $= \frac{1}{2} \phi I = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L} \quad [J] \quad (2)$ <p>(2)=(2)' が成立することを確認せよ。</p>
誘電体・磁性体 電極又は巻線 内部のコア材料	$u_e = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \epsilon E^2$ $= \frac{1}{2} \frac{D}{\epsilon} D = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad [J/m^3]$ $W_e = u_e Sl \quad (1)'$ <p>= [N/m²]</p>	$u_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} \mu H^2$ $= \frac{1}{2} \frac{B}{\mu} B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad [J/m^3]$ $W_m = u_m Sl \quad (2)'$ <p>= [Pa]</p>

※ 単位体積あたりのエネルギー [J/m³] は [J] = [N・m] の関係より、圧力(応力) [N/m²] = [Pa] に等しい。

電磁エネルギー密度 $u = u_e + u_m \quad [J/m^3]$

回路の電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$I = I_C + I_R$ (1)

ここで、

$I_C = \frac{dQ}{dt}, I_R = \frac{v}{R} = Gv, Q = Cv$ (2)

式(2)を式(1)に代入すると

$I = \frac{dQ}{dt} + Gv = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$ (3)

両辺に vdt を掛けると

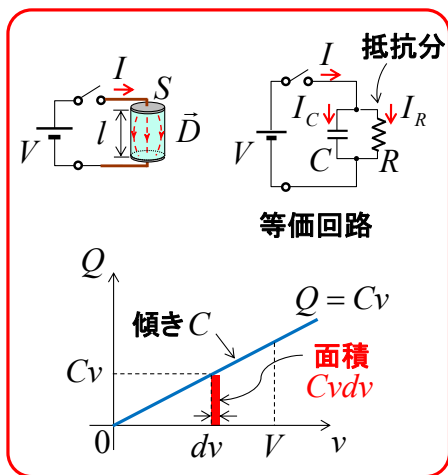
$vIdt = Cv dv + (v^2/R)dt$ (4)

電源が 電圧が dv 増えた 抵抗の発熱した仕事 ことで蓄えられた (ジュール熱) dW_j [J]
dW_s [J] エネルギー dW_e [J]

(右図の面積 Cv dv に等しい)

コンデンサに加わる電圧 v が 0 → V に増えたとき、コンデンサ全体の蓄積エネルギーは

$W_e = \int_0^V Cvdv = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad [J] \quad (5)$



ただし、電池のした仕事は電源が一定値なので、 $W_s \neq W_e$ であり

$W_s = QV \quad [J] \quad (6)$

問: Q [C] の電荷を V [V] の電位差の中で移動させるのに必要な仕事は?

誘電体の電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$I = \frac{dQ}{dt} + \frac{v}{R}$ (1)

電源が微小時間 dt の間にする仕事は $dW_s = vIdt$ (2)

式(1)の両辺に vdt を掛けると $vIdt = vdQ + (v^2/R)dt$ (3)

電源が dQ 増えたこと 抵抗の発熱した仕事 でCに蓄えられた (ジュール熱) dW_s [J] エネルギー dW_e [J] dW_j [J]

ここで、ガウスの法則より

$\oint_C \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q, \Rightarrow DS = Q, E = \frac{Q}{\epsilon S}$ (4)

コンデンサの電位差 v は $v = -\int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = El = \frac{Ql}{\epsilon S}$ (5)

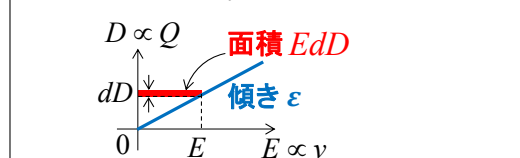
式(3)の右辺第1項目は $dW_e = vdQ = \frac{Ql}{\epsilon S} dQ = ElSdD$ (6)

誘電体単位体積あたりの蓄積エネルギーは、全体積 SI [m³] で除して

$du_e = EdD \quad [J/m^3] \quad (7)$

電荷を 0 → Q に増やしたとき、即ち、電束密度が 0 → D に増えたとき

$u_e = \int du_e = \int_0^D EdD$ (8)



強誘電体を除く通常の誘電体のように ED特性に線形性がある場合は

$u_e = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
 $= \frac{1}{2} \frac{D}{\epsilon} D = \frac{1}{2} \frac{D^2}{\epsilon} \quad [J/m^3] \quad (9)$

回路の磁気エネルギー

キルヒホッフの電圧則より

$$V = \frac{d\phi}{dt} + Ri \quad (1)$$

線形コイル(常磁性, 反磁性)の場合
 $\phi = Li$ (2)

(2)を(1)に代入すると

$$V = L \frac{di}{dt} + Ri \quad (3)$$

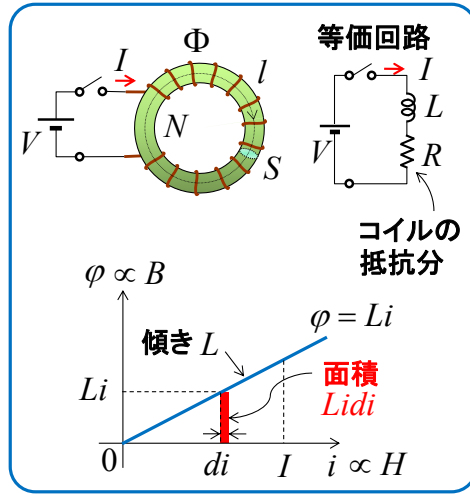
両辺に idt を掛けると

$$\int Vidt = \int Lidi + \int Ri^2 dt \quad (4)$$

電源が di 増えたこと 抵抗の発熱した仕事 で蓄えられた (ジュール熱) dW_j [J]
 dW_s [J] エネルギー dW_m [J] (右図の面積 $Lidi$ に等しい)

コイルに流れる電流 i が $0 \rightarrow I$ まで増えたとき、コイル全体の蓄積エネルギーは

$$W_m = \int_{i=0}^I Lidi = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \phi I \quad [J] \quad (5)$$



磁性体の磁気エネルギー

キルヒホッフの電圧則より

$$V = \frac{d\phi}{dt} + Ri = NS \frac{dB}{dt} + Ri \quad (1)$$

電源が微小時間 dt の間にする仕事は
 $dW_s = Vidt$ (2)

式(1)の両辺に idt を掛けると

$$\int Vidt = \int NSidB + \int Ri^2 dt \quad (3)$$

電源が dB 増えたこと 抵抗の発熱した仕事 で蓄えられた (ジュール熱) dW_j [J]
 dW_s [J] エネルギー dW_m [J]

ここで、アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = Ni \quad (4)$$

コイル内の磁界は

$$Hl = Ni \quad (5)$$

式(5)を式(3)の右辺第1項に代入すると

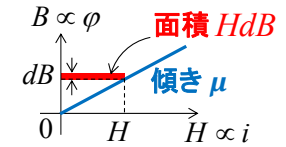
$$dW_m = SHldB = SHdB \quad [J] \quad (6)$$

磁性体単位体積あたりの蓄積エネルギーは、全体積 S [m^3] で除して

$$du_m = HdB \quad [J/m^3] \quad (7)$$

磁束密度が $0 \rightarrow B$ に増えたとき、単位体積あたりの蓄積エネルギーは

$$u_m = \int_0^B du_m = \int_0^B HdB \quad (8)$$



強磁性体を除いた常磁性や反磁性のようにBH曲線に線形性がある場合は

$$u_m = \frac{1}{2} HB = \frac{1}{2} H(\mu H) = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \frac{B}{\mu} B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad [J/m^3] \quad (9)$$

結合のあるコイルの磁気エネルギー

【演習】自己インダクタンス L_1, L_2 [H] の二つのコイルが相互インダクタンス M [H] で結合されている。 L_1 に I_1 [A], L_2 に I_2 [A] を流したとき、二つのコイル全体に蓄えられる磁気エネルギーを求めよ。(教科書, 演習9.5)

【解答】

① 結合が同方向の場合

$$W_{m1} = \frac{1}{2} \phi_{11} I_1 + \frac{1}{2} \phi_{12} I_1 = \frac{1}{2} (L_1 I_1) I_1 + \frac{1}{2} (M I_2) I_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} M I_1 I_2$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2} \phi_{22} I_2 + \frac{1}{2} \phi_{21} I_2 = \frac{1}{2} (L_2 I_2) I_2 + \frac{1}{2} (M I_1) I_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \frac{1}{2} M I_1 I_2$$

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad [J]$$

② 結合が逆方向の場合

$$W_{m1} = \frac{1}{2} \phi_{11} I_1 - \frac{1}{2} \phi_{12} I_1 = \frac{1}{2} (L_1 I_1) I_1 - \frac{1}{2} (M I_2) I_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 - \frac{1}{2} M I_1 I_2$$

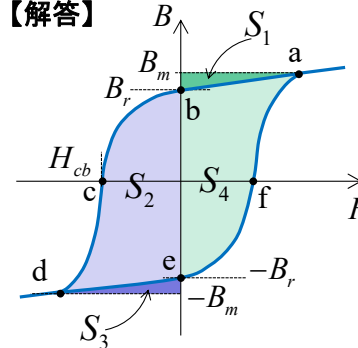
$$W_{m2} = \frac{1}{2} \phi_{22} I_2 - \frac{1}{2} \phi_{21} I_2 = \frac{1}{2} (L_2 I_2) I_2 - \frac{1}{2} (M I_1) I_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - \frac{1}{2} M I_1 I_2$$

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \quad [J]$$

強磁性体の磁気エネルギー

【演習】ヒステリシスループをもつ強磁性体に交流磁界を加えたとき、これを磁化するのに要する1周期当たりのエネルギーはループによって囲まれる面積となることを示せ。(教科書, 例題9.3)

【解答】



$$u_m = \int_0^B du_m = \int_0^B HdB \quad \dots (8)$$

面積 S_1, S_2, S_3, S_4 を図のように定義すると

$$S_1 = \int_a^b HdB = \int_{B=B_m}^{B_r} HdB = - \int_{B_r}^{B_m} HdB < 0$$

$$S_2 + S_3 = \int_b^d HdB = \int_{B=B_r}^{-B_m} HdB = - \int_{-B_m}^{B_r} HdB > 0$$

$$S_3 = \int_d^e HdB = \int_{B=-B_m}^{-B_r} HdB < 0 \quad (\because H < 0)$$

$$S_4 + S_1 = \int_e^a HdB = \int_{B=-B_r}^{B_m} HdB > 0$$

$$\therefore u_m = -S_1 + S_2 + S_3 - S_4 + S_1 = S_2 + S_4 \quad [J/m^3]$$

ヒステリシス損(スタインメッツの式) ⁹

交流1周期を加えたときの単位体積あたりの損失エネルギー[J/m³]

$$p_m = \frac{u_m}{T} \approx \eta f B_m^{1.6} \text{ [W/m}^3\text{]}$$

交流1周期 [s]

ここで,

η : ヒステリシス定数

B_m : 飽和磁束密度(最大磁束密度)

上式のように理論解析ではなく、実験的に導出された式を**実験式(Empirical equation)**と呼ぶ。

磁気損失の種類 ¹⁰

損失

銅損(巻線のジュール熱による損失)

鉄損(磁性損失または、磁気損失)

ヒステリシス損(磁気履歴による)

渦電流損(ジュール熱による)

銅損は、その巻線の抵抗成分により発生する損失であり(理想的なインダクタに交流を掛けた場合、損失はゼロ)、これもジュール熱となる。

変圧器の鉄芯などのように、交流磁束が流れている磁性体中でエネルギーが失われる現象。磁性体の磁気履歴によるヒステリシス損失と、渦電流のジュール熱による渦電流損失とに分けられる。いずれも熱エネルギーとして失われ、その磁性体の温度は上昇する。

仮想変位の仕事 ¹¹

エネルギー保存則より,

$$dW_m + dW_k = dW_s \quad (1)$$

磁気エネルギー 機械エネルギー 電源のエネルギー

磁気エネルギーは

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial x} dx + \frac{\partial W_m}{\partial y} dy + \frac{\partial W_m}{\partial z} dz$$

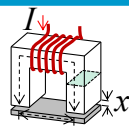
$$= \left(\frac{\partial W_m}{\partial x} \quad \frac{\partial W_m}{\partial y} \quad \frac{\partial W_m}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \nabla W_m \cdot d\vec{l} \quad (2)$$

機械エネルギーは

$$dW_k = (F_x \ F_y \ F_z) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

(2)+(3)と(1)より,

$$dW_m + dW_k = \nabla W_m \cdot d\vec{l} + \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (\nabla W_m + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = dW_s \quad (4)$$



磁束鎖交数が $d\phi$ 増えるということは,

ファラデーの法則より

$$e = -d\phi/dt \quad d\phi = edt \quad (5)$$

なる起電力が発生するので,

$$dW_s = Iedt = Id\phi \quad (6)$$

の仕事をする(エネルギーを供給する)。

ここで、磁気エネルギーの増分は

$$dW_m = \frac{1}{2} d\phi I = \frac{1}{2} dW_s \quad (7)$$

(4)に(7)を代入して,

$$(\nabla W_m + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = 2dW_m \quad (8)$$

(8)に(2)を代入して,

$$(\nabla W_m + \vec{F}) \cdot d\vec{l} = 2\nabla W_m \cdot d\vec{l} \quad (9)$$

従って、働く力は

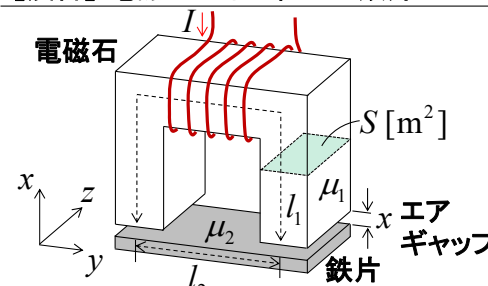
$$\vec{F} = \nabla W_m \quad (10)$$

一方、電源が仕事をしないとき、(4)より

$$\vec{F} = -\nabla W_m \quad (11)$$

磁気エネルギーと力 ¹²

【演習】電磁石の下に置いた鉄片にはたらく力および、空隙の磁束密度を求めよ。



所で、アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

$$\int_0^{l_1} H_1 dl + \int_0^{l_2} H_2 dl + 2 \int_0^x H_0 dl = NI$$

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_0 x = NI$$

$$\frac{B_1}{\mu_1} l_1 + \frac{B_2}{\mu_2} l_2 + \frac{2B_0}{\mu_0} x = NI$$

磁束密度の連続性より $B = B_1 = B_2 = B_0$

$$B \left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2} + \frac{2x}{\mu_0} \right) = NI$$

従って、磁束密度は

$$B = \frac{NI}{\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2} + \frac{2x}{\mu_0}} \approx \frac{\mu_0 NI}{2x}$$

ギャップの磁気エネルギーは単位体積あたり、次式となる。これは圧力(応力または単位面積あたりの力)の単位に等しい。

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \text{ [J/m}^3\text{]} = \text{[N/m}^2\text{]} = \text{[Pa]}$$

吸引力はこれに断面積 $2S$ [m²] を掛けて

$$F_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} 2S = \frac{B^2}{\mu_0} S \text{ [N]}$$

$\mu_1, \mu_2 \gg \mu_0$ のときの近似