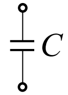
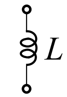
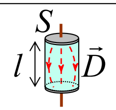
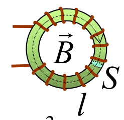
# 磁気エネルギーと力

1st. 2011/04/01
Lst. 2023/12/18



# 電磁気エネルギーのまとめ

| | 電気エネルギー | 磁気エネルギー |
|---|---|---|
| 回路素子 電極又は導線 | $W_e=\int_0^V Cvdv=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ [J] (1)  C=εS/lとして(1)=(1)' が成立することを確認せよ。 | $W_m=\int_0^I Lidi=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}\varphi I=\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{L}$ [J] (2)  L=μN²S/lとして(2)=(2)' が成立することを確認せよ。 |
| 誘電体・磁性体 電極又は巻線 内部のコア材料 | $u_e=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\frac{D}{\varepsilon}D=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon}$ $[\mathrm{J/m^3}]=[\mathrm{N/m^2}]=[\mathrm{Pa}]$  $W_e=u_eSl$ (1)' | $u_m=\frac{1}{2}HB=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\frac{B}{\mu}B=\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu}$ $[\mathrm{J/m^3}]=[\mathrm{N/m^2}]=[\mathrm{Pa}]$  $W_m=u_mSl$ (2)' |

※ 単位体積あたりのエネルギー [J/m³] は [J] = [N・m] の関係より、圧力(応力) [N/m²] = [Pa] に等しい。

電磁エネルギー密度 $u=u_e+u_m$ $[\mathrm{J/m^3}]$



# 回路の電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$$I=I_C+I_R \quad (1)$$

ここで

$$I_C=\frac{dQ}{dt},\ I_R=\frac{v}{R}=Gv,\ Q=Cv \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入すると

$$I=\frac{dQ}{dt}+Gv=C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R} \quad (3)$$

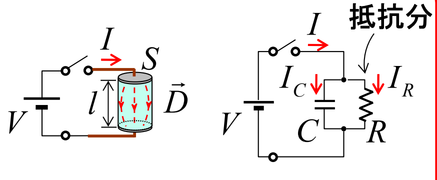
両辺にvdtを掛けてエネルギーで考えると

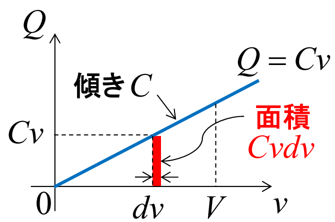
$$\underbrace{vIdt}_{\text{電源がした仕事 }dW_s\text{[J]}}=\underbrace{Cvdv}_{\text{電圧がdv増えたことで蓄えられたエネルギー}dW_e\text{[J]}}+\underbrace{(v^2/R)dt}_{\text{抵抗の発熱(ジュール熱)}dW_j\text{[J]}} \quad (4)$$

(面積Cvdvに等しい)

コンデンサに加わる電圧vが0→Vに増えたとき、コンデンサ全体の蓄積エネルギーは

$$W_e=\int_0^V Cvdv=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}QV \quad [\mathrm{J}] \quad (5)$$




ただし、電池のした仕事は、電源が一定値VなのでW<sub></sub>

ただし、電池のした仕事は、電源が一定値Vなので$W_s \neq W_e$であり

$$W_s=QV \quad [\mathrm{J}] \quad (6)$$

問:Q [C]の電荷をV [V]の電位差の中で移動させるのに必要な仕事は?





# 誘電体の電気エネルギー

キルヒホッフの電流則より

$$I=\frac{dQ}{dt}+\frac{v}{R} \quad (1)$$

電源が微小時間dtの間にする仕事は

$$dW_S=vIdt \quad (2)$$

式(1)の両辺にvdtを掛けると

$$\underbrace{vIdt}_{\text{電源がした仕事 }dW_s\text{[J]}}=\underbrace{vdQ}_{\text{dQ増えたことでCに蓄えられたエネルギー}dW_e\text{[J]}}+\underbrace{(v^2/R)dt}_{\text{抵抗の発熱(ジュール熱)}dW_j\text{[J]}} \quad (3)$$

ここで、ガウスの法則より

$$\oint_C \vec{D}\bullet d\vec{s}=Q,\ \Rightarrow DS=Q,\ E=\frac{Q}{\varepsilon S} \quad (4)$$

コンデンサの電位差vは

$$v=-\int_0^l \vec{E}\bullet d\vec{l}=El=\frac{Ql}{\varepsilon S} \quad (5)$$

式(3)の右辺第1項目は

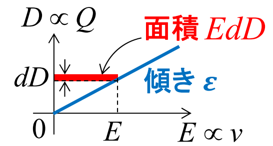
$$dW_e=vdQ=\frac{Ql}{\varepsilon S}dQ=ElSdD \quad (6)$$

誘電体単位体積あたりの蓄積エネルギーは、誘電体の全体積Sl [m³]で除して

$$du_e=EdD \quad [\mathrm{J/m^3}] \quad (7)$$

電荷を0→Qに増やしたとき、すなわち、電束密度が0→Dに増えたとき

$$u_e=\int du_e=\int_0^D EdD \quad (8)$$




強誘電体を除く通常の誘電体のように ED特性に線形性がある場合は

$$u_e=\frac{1}{2}ED=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} \quad [\mathrm{J/m^3}] \quad (9)$$

# 回路の磁気エネルギー

キルヒホッフの電圧則より

$$V = \frac{d\varphi}{dt} + Ri \qquad (1)$$

線形コイル（常磁性、反磁性）の場合

$$\varphi = Li \qquad (2)$$

(2)を(1)に代入すると

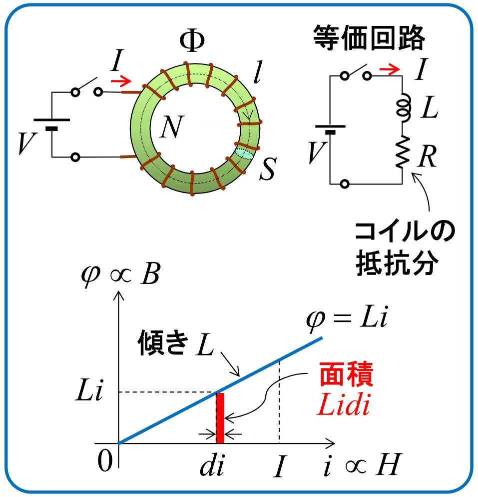
$$V = L\frac{di}{dt} + Ri \qquad (3)$$

両辺にidtを掛けてエネルギーで考えると

$$\underbrace{Vidt}_{\text{電源がした仕事 } dW_s\,[\mathrm{J}]} = \underbrace{Lidi}_{\text{di増えたことで蓄えられたエネルギー } dW_m\,[\mathrm{J}]\ \text{（面積 Lidi に等しい）}} + \underbrace{Ri^2dt}_{\text{抵抗の発熱（ジュール熱）} dW_j\,[\mathrm{J}]} \qquad (4)$$

コイルに流れる電流iが0→Iまで増えたとき、コイル全体の蓄積エネルギーは

$$W_m = \int_{i=0}^{I} Lidi = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}\varphi I \quad [\mathrm{J}] \qquad (5)$$






# 磁性体の磁気エネルギー

キルヒホッフの電圧則より

$$V = \frac{d\varphi}{dt} + Ri = NS\frac{dB}{dt} + Ri \qquad (1)$$

電源が微小時間dtの間にする仕事は

$$dW_S = Vidt \qquad (2)$$

式(1)の両辺にidtを掛けると

$$\underbrace{Vidt}_{\text{電源がした仕事 } dW_s\,[\mathrm{J}]} = \underbrace{NSidB}_{\text{dB増えたことで蓄えられたエネルギー } dW_m\,[\mathrm{J}]} + \underbrace{Ri^2dt}_{\text{抵抗の発熱（ジュール熱） } dW_j\,[\mathrm{J}]} \qquad (3)$$

ここで、アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = Ni \qquad (4)$$

であるから、コイル内の磁界は

$$Hl = Ni \qquad (5)$$

式(5)を式(3)の右辺第1項に代入すると

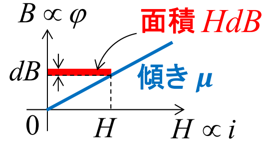
$$dW_m = SHldB = SlHdB \quad [\mathrm{J}] \qquad (6)$$

磁性体単位体積あたりの蓄積エネルギーは、磁性体の全体積Sl [m³]で除して

$$du_m = HdB \quad [\mathrm{J/m^3}] \qquad (7)$$

磁束密度が0→Bに増えたとき、単位体積あたりの蓄積エネルギーは

$$u_m = \int_0^B du_m = \int_0^B HdB \qquad (8)$$




強磁性体を除いた常磁性や反磁性のように<u>BH曲線に線形性がある場合</u>は

$$u_m = \frac{1}{2}HB = \frac{1}{2}\mu H^2 = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} \quad [\mathrm{J/m^3}] \qquad (9)$$

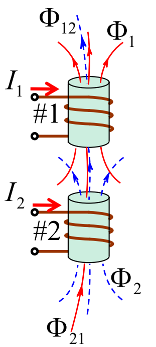


# 結合のあるコイルの磁気エネルギー

【演習】自己インダクタンス$L_1$, $L_2$ [H]の二つのコイルが相互インダクタンスM [H]で結合されている。$L_1$に$I_1$ [A], $L_2$に$I_2$ [A]を流したとき、二つのコイル全体に蓄えられる磁気エネルギーを求めよ。（教科書，演習9.5）

【解答】

① 結合が同方向の場合



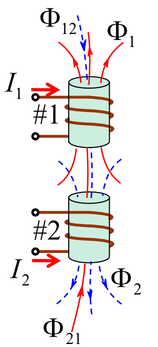

$$W_{m1} = \frac{1}{2}\varphi_1 I_1 + \frac{1}{2}\varphi_{12} I_1 = \frac{1}{2}(L_1I_1)I_1 + \frac{1}{2}(MI_2)I_1 = \frac{1}{2}L_1{I_1}^2 + \frac{1}{2}MI_1I_2$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2}\varphi_2 I_2 + \frac{1}{2}\varphi_{21} I_2 = \frac{1}{2}(L_2I_2)I_2 + \frac{1}{2}(MI_1)I_2 = \frac{1}{2}L_2{I_2}^2 + \frac{1}{2}MI_1I_2$$

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \frac{1}{2}L_1{I_1}^2 + \frac{1}{2}L_2{I_2}^2 + MI_1I_2 \ [\mathrm{J}]$$

【別解】結合があるコイルの並列接続のT型等価回路を使う。

② 結合が逆向きの場合




$$W_{m1} = \frac{1}{2}\varphi_1 I_1 - \frac{1}{2}\varphi_{12} I_1 = \frac{1}{2}(L_1I_1)I_1 - \frac{1}{2}(MI_2)I_1 = \frac{1}{2}L_1{I_1}^2 - \frac{1}{2}MI_1I_2$$

$$W_{m2} = \frac{1}{2}\varphi_2 I_2 - \frac{1}{2}\varphi_{21} I_2 = \frac{1}{2}(L_2I_2)I_2 - \frac{1}{2}(MI_1)I_2 = \frac{1}{2}L_2{I_2}^2 - \frac{1}{2}MI_1I_2$$

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \frac{1}{2}L_1{I_1}^2 + \frac{1}{2}L_2{I_2}^2 - MI_1I_2 \ [\mathrm{J}]$$

【別解】結合があるコイルの並列接続のT型等価回路を使う。



# 強磁性体の磁気エネルギー

【演習】ヒステリシスループをもつ強磁性体に交流磁界を加えたとき、これを磁化するのに要する1周期当たりのエネルギーはループによって囲まれる面積となることを示せ。（教科書，例題9.3）

【解答】磁束密度が0 → Bに増えたとき、単位体積あたりの蓄積エネルギーは

$$u_m = \int_0^B du_m = \int_0^B HdB$$

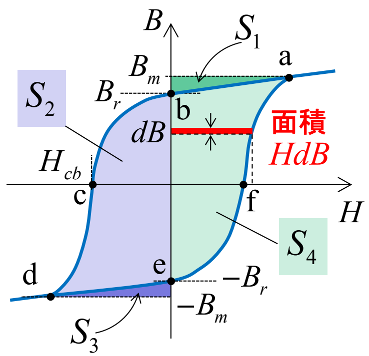
面積 $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ を図のように定義すると

$$S_1 = \int_a^b HdB = \int_{B_m}^{B_r} HdB = -\int_{B_r}^{B_m} HdB < 0$$

$$S_2 + S_3 = \int_b^d HdB = \int_{B_r}^{-B_m} HdB = -\int_{-B_m}^{B_r} HdB > 0$$

$$S_3 = \int_d^e HdB = \int_{-B_m}^{-B_r} HdB < 0 \quad (\because H < 0)$$

$$S_4 + S_1 = \int_e^a HdB = \int_{-B_r}^{B_m} HdB > 0$$




$B_m$：最大磁束密度
$B_r$：残留磁気

1周期当たりのエネルギー

$$\therefore u_m = -\cancel{S_1} + S_2 + \cancel{S_3} - \cancel{S_3} + S_4 + \cancel{S_1} = S_2 + S_4 \ [\mathrm{J/m^3}]$$

# ヒステリシス損（スタインメッツの式）



（教科書, p.111）

交流1周期を加えたときの単位体積あたりの損失エネルギー[J/m³]

$$p_m = \frac{u_m}{T} \simeq \eta f B_m^{1.6}\ [\mathrm{W/m^3}]$$

交流1周期 [s]

ここで、
$\eta$：ヒステリシス定数
$B_m$：飽和磁束密度（最大磁束密度）

理論解析ではなく、実験的に導出された式を**実験式**（Empirical equation）と呼ぶ。

# 磁気損失の種類



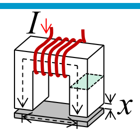
- 損失
  - 銅損（巻線のジュール熱による損失）
  - 鉄損（磁性損失または、磁気損失）
    - ヒステリシス損（磁気履歴による）
    - 渦電流損（ジュール熱による）

銅損・・・その巻線の抵抗成分により発生する損失であり（理想的なインダクタに交流を掛けた場合、損失はゼロ）、これもジュール熱となる。

鉄損・・・変圧器の鉄芯などのように、交流磁束が流れている磁性体中でエネルギーが失われる現象。磁性体の磁気履歴によるヒステリシス損失と、渦電流のジュール熱による渦電流損失とに分けられる。いずれも熱エネルギーとして失われ、その磁性体の温度は上昇する。

# 仮想変位の仕事






エネルギー保存則より

$$dW_m + dW_k = dW_s \quad (1)$$

磁気エネルギー　機械エネルギー　電源のエネルギー

磁気エネルギーは

$$dW_m = \frac{\partial W_m}{\partial x}dx + \frac{\partial W_m}{\partial y}dy + \frac{\partial W_m}{\partial z}dz = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\ \frac{\partial W_m}{\partial y}\ \frac{\partial W_m}{\partial z}\right)\bullet\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix} = \nabla W_m \bullet d\vec{l} \quad (2)$$

機械エネルギーは

$$dW_k = \left(F_x\ F_y\ F_z\right)\bullet\begin{pmatrix}dx\\dy\\dz\end{pmatrix} = \vec{F}\bullet d\vec{l} \quad (3)$$

(2)+(3)と(1)より、

$$dW_m + dW_k = \nabla W_m \bullet d\vec{l} + \vec{F}\bullet d\vec{l}$$
$$(\nabla W_m + \vec{F})\bullet d\vec{l} = dW_s \quad (4)$$

磁束鎖交数が$d\phi$増えるということは、ファラデーの法則より

$$e = -d\varphi/dt \qquad d\varphi = edt \quad (5)$$

なる起電力が発生するので、電源は

$$dW_s = Iedt = Id\varphi \quad (6)$$

の仕事をする（エネルギーを供給する）。
ここで、磁気エネルギーの増分は

$$dW_m = \frac{1}{2}d\varphi I = \frac{1}{2}dW_s \quad (7)$$

(7)を(4)に代入して$dW_S$を消すと

$$(\nabla W_m + \vec{F})\bullet d\vec{l} = 2dW_m \quad (8)$$

さらに、(2)を(8)に代入すると

$$(\nabla W_m + \vec{F})\bullet d\vec{l} = 2\nabla W_m \bullet d\vec{l} \quad (9)$$

従って、働く力は

$$\vec{F} = \nabla W_m \quad (10)$$

働く力は磁気エネルギーの勾配に等しい。

一方、電源が仕事をしないときは(4)より

$$\vec{F} = -\nabla W_m \quad (11)$$

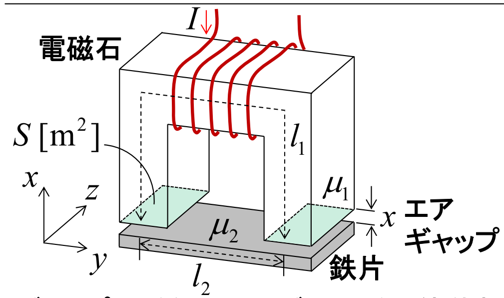
働く力は磁気エネルギーの負の勾配に等しい。

D. K. Cheng, Field and wave for electromagnetics 2nd ed., p.289, Addison Wesley

# 磁気エネルギーと力



【演習】電磁石の下に置いた鉄片にはたらく力および、空隙の磁束密度を求めよ。




ギャップの磁気エネルギーは単位体積あたり、次式となる。これは圧力（応力または単位面積あたりの力）の単位に等しい。

$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\quad [\mathrm{J/m^3}] = [\mathrm{N/m^2}] = [\mathrm{Pa}]$$

吸引力はこれに断面積2S [m²]を掛けて

$$F_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}2S = \frac{B^2}{\mu_0}S\quad [\mathrm{N}]$$

所で、アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = NI$$
$$\int_0^{l_1} H_1 dl + \int_0^{l_2} H_2 dl + 2\int_0^{x} H_0 dl = NI$$
$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2H_0 x = NI$$
$$\frac{B_1}{\mu_1}l_1 + \frac{B_2}{\mu_2}l_2 + \frac{2B_0}{\mu_0}x = NI$$

磁束密度の連続性より $B=B_1=B_2=B_0$

$$B\left(\frac{l_1}{\mu_1} + \frac{l_2}{\mu_2} + \frac{2x}{\mu_0}\right) = NI$$

従って、磁束密度は

$$B = \frac{NI}{\dfrac{l_1}{\mu_1} + \dfrac{l_2}{\mu_2} + \dfrac{2x}{\mu_0}} \simeq \frac{\mu_0 NI}{2x}$$

$\mu_1, \mu_2 >> \mu_0$ のときの近似

尾崎, ほか, 電磁気学の基礎, p.143, 培風館