

1. アンペアの法則の適用

図1に示す内導体の半径 a [m], 外導体の内半径が b [m], 外導体の外半径が c [m], 長さ 1 [m] の同軸線路がある。導体間の空洞は磁性体であり, その透磁率は μ [H/m] である。内導体に $I\hat{z}$ [A], 外導体に $I(-\hat{z})$ [A] の電流を流す場合を考える*1。アンペアの法則を解析的に適用できるのは, 無限長直線電流, 無限長円柱電流, 平行2線, 同軸線路, 無限平板電流, 環状ソレノイド (無端ソレノイド), 無限長ソレノイドに限られる。また, 適用するアンペアの法則には2つの形があり, 1つは図2に示すような磁性体を含まないアンペアの法則であり, もう1つは図3に示すような磁性体を含むアンペアの法則である。そして適用手順には次のパターンがある。【手順1】伝導電流 I によって生じる磁束密度 \vec{B} または磁界 \vec{H} 分布のパターンを右ネジの法則からイメージする。【手順2】磁束密度 \vec{B} または磁界 \vec{H} と平行に閉じた積分路 C を決める*2。【手順3】積分路 C 上で \vec{B} または \vec{H} が一定と考えて積分方程式を解く。

このケースでは導体間の空洞が磁性体で満たされていることを想定しているのので, 磁性体を含むアンペアの法則を適用する*3。先の手順1に従って内導体と外導体に往復電流 $\pm I$ を流せば, 円周方向に合成磁界 \vec{H} が生じる。手順2に従って積分路 C の半径を r と置けば, (ア) $r < a$ (イ) $a < r < b$ (ウ) $b < r < c$ (エ) $c < r$ の4つの場合が考えられる。そこで, 手順3に従って次のような積分方程式 (アンペア

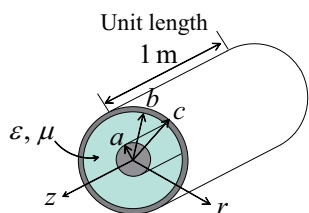


図1 単位長さあたりの同軸線路モデル

積分路が閉じていることを示す記号 \oint_C

積分路上の磁束密度 \vec{B}

積分路を構成する微小線素 $d\vec{l}$

真空の透磁率 $4\pi \times 10^{-7}$

内積記号 \cdot

積分が積分路Cに沿った線積分であることを示す記号

積分路内部に含まれる電流 (右ねじ方向が正) I

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

図2 アンペアの法則

積分路が閉じていることを示す記号 \oint_C

積分路上の磁束密度 \vec{H}

積分路を構成する微小線素 $d\vec{l}$

内積記号 \cdot

積分が積分路Cに沿った線積分であることを示す記号

積分路内部に含まれる電流 (右ねじ方向が正) I

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

図3 磁性体を含むアンペアの法則

の法則) を各場合について順番に考える。

(ア) $r < a$ の場合

往路電流 $+I$ [A] が内導体の断面積 πa^2 [m²] に一様分布していると考えれば, その電流密度は $I/\pi a^2$ [A/m²] となる。積分路 C の断面積は πr^2 [m²] であるから, 磁性体を含むアンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{\pi a^2} \pi r^2 \quad (1)$$

ここで $\vec{H} = H\hat{\phi}$, $d\vec{l} = dl\hat{\phi}$ であるから, 式(1)のベクトル積分方程式は式(2)のように簡単になる。($\hat{\phi}$ は z 軸に対して反時計回り方向)

$$\oint_C H\hat{\phi} \cdot dl\hat{\phi} = \oint_C H dl \cos 0 = \oint_C H dl = \frac{I}{a^2} r^2 \quad (2)$$

さらに, この同軸線路は z 軸に対して軸対称であるから, H の大きさは半径 r の円周上では同じ大きさになる。即ち, 積分には寄与しない定数とみなせる。さらに, 微小線素 dl を閉路 C で総和した値は, 半径 r の円周 $2\pi r$ に相当するので式(3)となる。

$$H \oint_C dl = \frac{I}{a^2} r^2 \Rightarrow H 2\pi r = \frac{I}{a^2} r^2 \quad (3)$$

したがって, $r < a$ のときの H と $B (= \mu H)$ は次式(4)となる。

$$H = \frac{I}{2\pi a^2} r, \quad B = \frac{\mu I}{2\pi a^2} r \quad (4)$$

(イ) $a < r < b$ の場合

この場合, 閉路 C 内部に含まれるのは往路電流 $+I$ のみであるため,

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \quad (5)$$

となる。先の式(2)および式(3)と同様にして $a < r < b$ のときの H と B を求めると次のようになる。

$$H = \frac{I}{2\pi r}, \quad B = \frac{\mu I}{2\pi r} \quad (6)$$

(ウ) $b < r < c$ の場合

復路電流 $-I$ は外導体の断面積 $\pi(c^2 - b^2)$ [m²] に一様分布していると考えれば, その電流密度は $-I/\pi(c^2 - b^2)$ [A/m²] となる。閉路 C の断面積のうち, 外導体と交差している面積は $\pi(r^2 - b^2)$ であるから

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)} \pi(r^2 - b^2) \quad (7)$$

先の式(2)および式(3)と同様にして $b < r < c$ のときの H と B を求めると次のようになる。

$$H = \frac{I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad B = \frac{\mu I}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \quad (8)$$

(エ) $c < r$ の場合

閉路 C の内部に含まれる電流は $I + (-I) = 0$ である。従って

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (9)$$

となるから, $c < r$ の場合は $H = B = 0$ となる。なお, 磁界 H と磁束密度 B の大きさを図示すると図4のようになる。

2. 磁束鎖交数の導出

導体間 ($a < r < b$) の磁束密度は式(6)で与えられることが分かったので, 内導体と外導体との間の磁束鎖交数 φ は次式となる。

$$\varphi = \Phi = \int_{z=0}^1 \int_{r=a}^b B dr dz = \int_0^1 \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad (10)$$

3. インダクタンスの導出

インダクタンス L [H/m] の定義は, 導体に単位電流 [A] を流したときに発生する磁束鎖交数 [Wb] である。即ち, $\varphi = LI$ の関係を式(10)に適用することで次式(11)が求まる。

$$L = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{b}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (11)$$

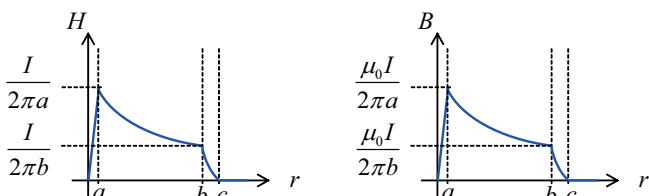


図4 同軸線路内の磁界・磁束密度分布

*1 マラソンに例えると, 内導体が往路で外導体が復路になっており, 負荷がちょうど折り返し地点である。このような電流を往復電流と呼ぶ。

*2 積分路の方向は右ネジの方向を正にとる。

*3 伝導電流 I とは別に, 磁性体表面の磁化電流 I_b を考慮すれば, 1つ目のアンペアの法則でも同じ結果を導くことができる。