インダクタンスの導出

1st. 2011/04/01
Lst. 2023/12/22

インダクタンスの導出手順

これまでは自己インダクタンスLの値と、相互インダクタンスM（または結合定数k）の値が与えられていた。
今度は自己インダクタンスLと相互インダクタンスMを与えられた物理形状から導出すること※を考える。

【導出手順】
1. 往復電流Iを流す
2. アンペアの法則より磁界Hを導出
3. B=μHより磁束密度Bを導出
4. Φ=∫Bdsより磁束Φを導出
5. φ=NΦより磁束鎖交数φを導出
6. φ=LI からLを導出

（W=LI²/2からLを求める方法もある）

Lを求める（目的）ため、公式（手段）を一つずつ遡って芋づる式に大本の法則まで戻るという逆操作をする。

※与えられた素子定数Lで回路特性を計算するよりも、この方がはるかに重要で役に立つ。

キャパシタンスの導出手順

キャパシタンスCの値が与えられたとき、直列接続や並列接続の合成容量を使えば、回路の電圧・電流特性を計算することができた。今度はキャパシタンスCを与えられた物理形状から導出すること※を考える。

【導出手順】
1. 正負電極に電荷±Qを与える
2. ガウスの法則より電界Eを導出
3. V=−∫Edlより電位差Vを導出
4. Q=CVからキャパシタンスCを導出

（W=CV²/2からCを求める方法もある）

Cを求める（目的）ため、公式（手段）を一つずつ遡って大本の法則まで戻るという逆操作をする。

※与えられた素子定数Cで回路特性を計算するよりも、この方がはるかに重要で役に立つ。さらに進むと、任意形状導体上の電荷分布Q（一様でない）を導出することが求められるようになる。

環状ソレノイドのインダクタンス1

【例題】環状ソレノイドの自己インダクタンスを求めよ。（教科書，p.133）

【解答】［手順①］往復電流を流す。

［手順②］磁性体を含むアンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = NI \quad (1)$$

磁界は積分路上で一定値となるので、積分路の円周長をl [m]とすれば

$$Hl = NI \quad (2)$$

従って、磁界は

$$H = \frac{NI}{l} \quad (3)$$

［手順③］磁束密度は

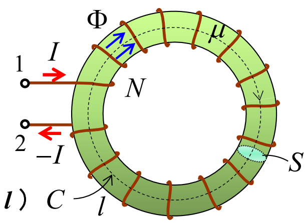
$$B = \mu H = \mu\frac{NI}{l} \quad (4)$$

［手順④］断面内で磁場が一様と仮定すると、磁束は

$$\Phi = \int_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = BS = \frac{\mu NIS}{l} \quad (5)$$

問：磁気等価回路から導出した磁束と比較せよ。

全巻数N回で磁性体コアの環状ソレノイド



積分路（長さ l） C

［手順⑤］磁束鎖交数は

$$\varphi = N\Phi = \frac{\mu N^2 IS}{l} \quad (6)$$

［手順⑥］インダクタンスは

$$L = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu N^2 IS}{l}\frac{1}{I} = \frac{\mu N^2 S}{l} \quad (7)$$

$$= \frac{\mu_r N^2 S}{l} 4\pi \times 10^{-7} \ \mathrm{[H]} \quad (8)$$

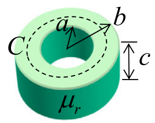
環状ソレノイドのLを大きくするには μ_r, N, S を大きく、l を短くすればよいことが分かる。

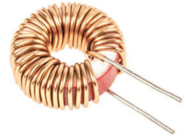
環状ソレノイドのインダクタンス2

【演習】断面が長方形で、比透磁率μ_rのコアをもつ巻数Nの環状ソレノイドがある。ソレノイドの内半径がa [m] 外半径がb [m]、厚さがc [m]であるときの自己インダクタンスを求めよ。ただし、ソレノイド内部の<u>磁束密度は一様とみなせない</u>ものとする。（教科書，演習9.10）

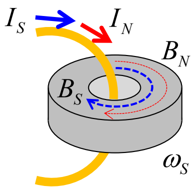
【解答】磁性体アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = NI \quad \Rightarrow H(2\pi r) = NI \quad \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi r}$$





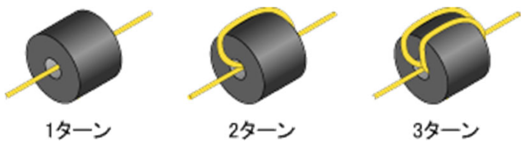
Signal Current I_S
Noise Current I_N



フェライトコアが使われる理由

$Z = j\omega L$

$\omega_S \ll \omega_N \Rightarrow Z_S \ll Z_N$



Lを大きくするにはb, c, Nを大きく、aを小さくすればよい。

https://www.murata.com/ja-jp/products/emc/ferrite/basic/reason
https://www.techno-kitagawa.com/techinfo/tech/ferrite.html

答え $L = \dfrac{\mu_0\mu_r cN^2}{2\pi}\ln\dfrac{b}{a}$ [H]

無限長空芯ソレノイド

【例題】無限長空芯ソレノイドの自己インダクタンスを求めよ。（教科書，p.134）

【解答】

[手順①] 右図で電流Iを流す。

[手順②] アンペアの法則より

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l} = nI \qquad \oint_C \vec{B}\bullet d\vec{l} = \mu_0 nI \qquad (1)$$

磁界は積分路上で一定値となるので

$$H\cdot 1 = nI \qquad (2)$$

従って，磁界は

$$H = nI \qquad (3)$$

[手順③] 磁束密度は

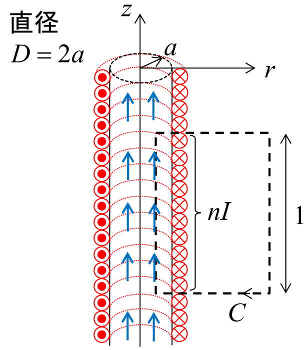
$$B = \mu_0 H = \mu_0 nI \qquad (4)$$

[手順④] 磁束は

$$\Phi = \int_S \vec{B}\bullet d\vec{s} = BS = \mu_0 nIS \qquad (5)$$

[手順⑤] 磁束鎖交数は

$$\varphi = n\Phi = \mu_0 n^2 IS \qquad (6)$$



単位長さあたりの巻数n[回/m]の無限長空芯ソレノイド

[手順⑥] インダクタンスは

$$L = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu_0 n^2 IS}{I} \qquad (7)$$

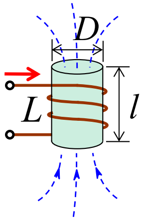
Lを大きくするにはn, Sを大きくすればよい。

$$= \mu_0 n^2 S = 4\pi\times10^{-7} n^2 \pi a^2 \qquad (8)$$

$$= \pi^2 n^2 4a^2 \times 10^{-7}\ \text{[H/m]}$$

$$= \pi^2 n^2 D^2 \times 10^{-7}\ \text{[H/m]} \qquad (9)$$

有限長空芯ソレノイド

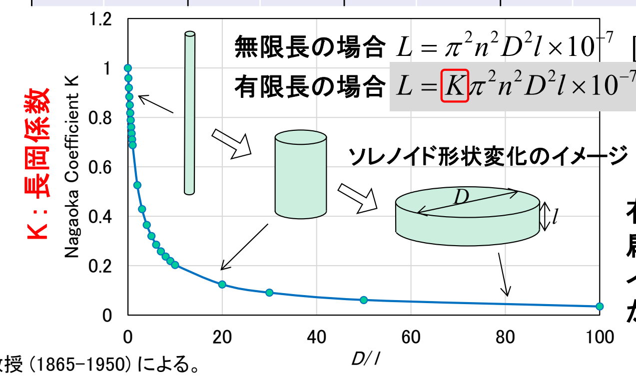


D/l	K	D/l	K	D/l	K	D/l	K
0	1.000	0.6	0.789	3	0.429	9	0.219
0.1	0.959	0.7	0.761	4	0.365	10	0.203
0.2	0.920	0.8	0.735	5	0.320	20	0.124
0.3	0.884	0.9	0.711	6	0.285	30	0.0909
0.4	0.850	1.0	0.688	7	0.258	50	0.0611
0.5	0.818	2.0	0.526	8	0.237	100	0.0350

（教科書，p.134）

無限長の場合 $L = \pi^2 n^2 D^2 l \times 10^{-7}$ [H] (1)

有限長の場合 $L = \boxed{K}\pi^2 n^2 D^2 l \times 10^{-7}$ [H] (2)



有限長コイルは扁平になるほどインダクタンスが小さくなる。

東大 長岡半太郎教授（1865-1950）による。

相互インダクタンスの計算1

【例題】単位長さあたりの巻数がn [回/m]の無限長空芯ソレノイド内に、巻数Nで半径a [m]のコイルが置かれている。相互インダクタンスを求めよ。（教科書，例題9.5）

【解答】

無限長コイル#1が作る磁束密度は既出の結果より、

$$B_1 = \mu_0 nI_1 \qquad (1)$$

#1の磁束Φ_1は

$$\Phi_1 = BS_1 = \mu_0 nI_1 S_1 \qquad (2)$$

このうち、コイル#2と鎖交する磁束Φ_2は

$$\Phi_{21} = BS_2 = \mu_0 nI_1 S_2 = \mu_0 nI_1 \pi a^2 \qquad (3)$$

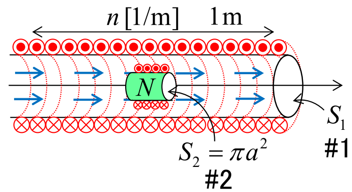
コイル#2の磁束鎖交数ϕ_{21}は

$$\varphi_{21} = N\Phi_{21} = N\mu_0 nI_1 \pi a^2 \qquad (4)$$

従って、相互インダクタンスは

$$M = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = N\mu_0 n\pi a^2\ \text{[H]} \qquad (5)$$

Mを大きくするにはa, n, Nを大きくすればよい。



この場合は空芯（磁性体がない）なので、<u>真空中のアンペアの法則</u>を使っても良い。

$$\oint_C \vec{B}\bullet d\vec{l} = \mu_0 nI$$

より

$$B(1) = \mu_0 nI$$

磁束は

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{B}\bullet d\vec{s} = BS_1 = \mu_0 nIS_1$$

相互インダクタンスの計算2

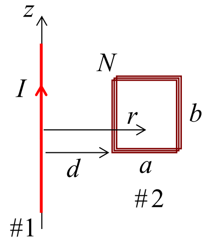
【演習】無限に長い直線導線に電流I [A]が流れている。N巻の長方形コイルa×b [m²]を図のように配置したとき、次の値を求めよ。(教科書，例題9.6)
(1) a×b [m²]の長方形部分を通る磁束と磁束鎖交数
(2) 相互インダクタンス

【解答】
無限長電流#1が作る磁束密度は既出の結果より、

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

#2と鎖交する磁束は

$$\Phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \bullet d\vec{s} = \int_{S_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \bullet ds\hat{\varphi}$$



答え

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d} \quad [\mathrm{Wb}]$$

$$\varphi_{21} = \frac{\mu_0 IbN}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d} \quad [\mathrm{Wb}]$$

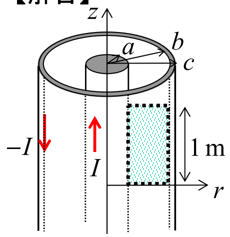
$$M = \frac{\mu_0 bN}{2}\ln\frac{d+a}{d} \quad [\mathrm{H}]$$

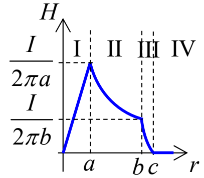
Mを大きくするにはb, N, aを大きく、dを小さくすればよい。

同軸線路のインダクタンス

【演習】内導体の半径がa [m]、外導体の内半径がb [m]、外半径がc [m]の同軸線路がある。内導体と外導体の間の空間は空気で満たされている。
(1) 横軸に距離r [m]、縦軸に磁界H [A/m]として磁界分布をグラフに記入せよ。
(2) 同軸線路1 mあたりの鎖交磁束数ϕと磁気エネルギーW$_m$を求めよ。
(3) 同軸線路1 mあたりの自己インダクタンスを求めよ。ただし、導体の内部インダクタンスは無視する。(教科書，例題9.7 類題)

【解答】

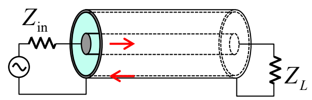




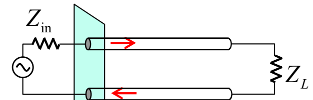
$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}_2 \bullet d\vec{s}$$

$$= \int_{S_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\varphi} \bullet ds\hat{\varphi}$$



同軸線路(不平衡)



平行線路(平衡)

不平衡線路と平衡線路を直接接続すると大きな反射が起きる。
これを抑えるには平衡-不平衡変換器(バラン)の挿入が必要。

答え

$$\begin{cases} H_1 = \dfrac{I}{2\pi a^2}r, \quad H_2 = \dfrac{I}{2\pi r}, \\ H_3 = \dfrac{c^2 - r^2}{2\pi r(c^2 - b^2)}I, \quad H_4 = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \ [\mathrm{Wb}], W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\ln\frac{b}{a} \ [\mathrm{J}]$$

Lを大きくするにはbを大きく、aを小さくすればよい。

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad [\mathrm{H/m}]$$

同軸線路のCとLの計算

ガウスの法則より

If Q [C] is charged in the inner conductor, in the case of $a < r < b$

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q$$

$$\Rightarrow \oint_S D ds = Q \quad \Rightarrow D\oint_S ds = Q \quad \Rightarrow D2\pi rl = Q$$

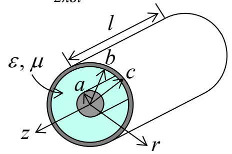
$$\therefore \boxed{D = \frac{Q}{2\pi rl}} \quad \cdots(1)$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \therefore \boxed{E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rl}} \quad \cdots(2)$$

Then the potential difference V is,

$$V = -\int_b^a E dr = -\int_b^a \frac{Q}{2\pi\varepsilon rl}dr = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\left[\ln|r|\right]_b^a = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}(\ln b - \ln a)$$

$$\therefore \boxed{Q = \frac{2\pi\varepsilon lV}{\ln\frac{b}{a}}} \quad \cdots(3)$$



Substitute (3) to (2) produces

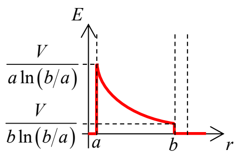
$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rl} = \frac{1}{2\pi\varepsilon rl}\frac{2\pi\varepsilon lV}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}$$

In the case of $r < a$ and $b < r$

$E = 0$

From equation (2)

$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}} \quad [\mathrm{F}]}$$



電磁気Ⅰの
メインテーマ

アンペアの法則より

(i) In the case of $r < a$

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \oint_C H dl = \frac{\pi r^2}{\pi a^2}I$$

$$\Rightarrow H2\pi r = \frac{r^2}{a^2}I$$

$$\therefore H_1 = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

(ii) In the case of $a < r < b$

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \oint_C H dl = I$$

$$\Rightarrow H2\pi r = I$$

$$\therefore \boxed{H_2 = \frac{I}{2\pi r}} \cdots(3)$$

(iii) In the case of $b < r < c$

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \oint_C H dl = I - \frac{\pi r^2 - \pi b^2}{\pi c^2 - \pi b^2}I$$

$$\Rightarrow H2\pi r = \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}I$$

$$\therefore H_3 = \frac{I}{2\pi r}\frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

(iv) In the case of $r > c$

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \oint_C H dl = I - I = 0$$

$$\Rightarrow H2\pi r = 0$$

$$\therefore H_4 = 0$$

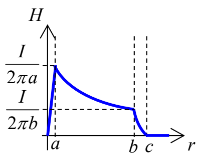
From equation (3)

$$\varphi = \int_0^l \int_a^b B_2 drdz = \int_0^l \int_a^b \frac{\mu I}{2\pi r}drdz = \frac{\mu Il}{2\pi}\left[\ln|r|\right]_a^b$$

$$\therefore \varphi = \frac{\mu Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad [\mathrm{Wb}]$$

$$\boxed{L = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \quad [\mathrm{H}]}$$

電磁気Ⅱの
メインテーマ



特性インピーダンス

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{\mu l}{2\pi}\ln\frac{b}{a}\frac{\ln\frac{b}{a}}{2\pi\varepsilon l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}$$

$$\therefore \boxed{Z_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\frac{b}{a}}$$

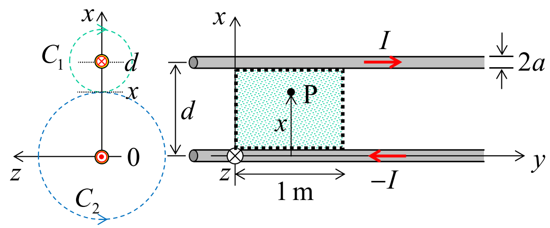
電磁波の
導入テーマ

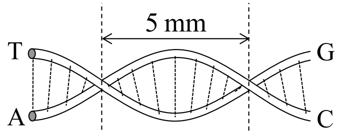
平行線路のインダクタンス

【演習】図に示す直径D=2a [m] の導線が中心間隔d [m]で平行に配置された無限長平行2線がある。平行線路を取り囲む空間は空気で満たされている。
(1) z=0面内の任意の点Pにおける磁束密度ベクトルを位置x [m]の関数で示せ。
(2) 平行線路1 m あたりの鎖交磁束数ϕ[Wb]を求めよ。
(3) a<<d のとき平行線路の1 mあたりの自己インダクタンスを求めよ。ただし、導体の内部インダクタンスは無視する。(教科書，p.136)

【解答】積分路C$_1$, C$_2$について、それぞれアンペアの法則を適用して求めたBをP点で重ね合わせる。

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \\ \vec{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}\hat{z} + \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{z} \end{cases}$$





Lを大きくするにはdを大きく、aを小さくすればよい。

答え $\vec{B} = \left(\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x} + \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(d-x)}\right)\hat{z}$ [T]

$$\varphi = \Phi = \frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a} \quad [\mathrm{Wb/m}]$$

$$L = \frac{\mu_0}{\pi}\ln\frac{d}{a} \quad [\mathrm{H/m}]$$

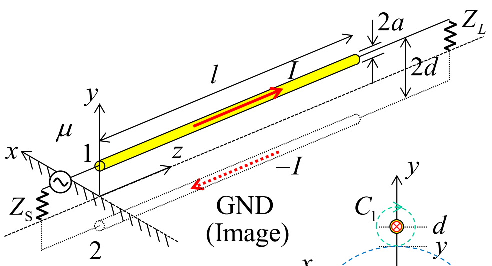
※LANケーブルのようにツイストペアにした場合、Lはどうなるか？

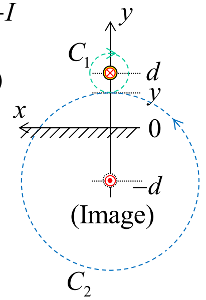
接地線路のインダクタンス

【演習】中心距離d [m]で接地された半径a [m]の線路が透磁率μの媒質で満たされている。単位長さあたりの自己インダクタンスを求めよ。(演習書，応用9.4)

【解答】図のように電流Iとイメージ電流−Iを囲む積分路C_1, C_2を取ると、アンペアの法則より

$$\begin{cases} \vec{H}=\vec{H}_1+\vec{H}_2 \\ \vec{H}=\dfrac{I}{2\pi(d-y)}\hat{x}+\dfrac{I}{2\pi(d+y)}\hat{x} \end{cases}$$





電流とグラウンド間の磁束鎖交数は、z方向単位長さ当たりでは

$$\varphi=\int_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=\int_{z=0}^{1}\int_{y=0}^{d-a}\left\{\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-y)}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d+y)}\right\}dydz$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_{y=0}^{d-a}\left(\frac{1}{d-y}+\frac{1}{d+y}\right)dy$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{-\left[\ln(d-y)\right]_0^{d-a}+\left[\ln(d+y)\right]_0^{d-a}\right\}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(-\ln\frac{a}{d}+\ln\frac{2d-a}{a}\right)=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{2d-a}{a}$$

$a\ll d$ ならば

$$\varphi\simeq\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{2d}{a}$$

インダクタンスは

$$\Rightarrow L=\frac{\varphi}{I}=\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{2d}{a}$$

平行平板のインダクタンス

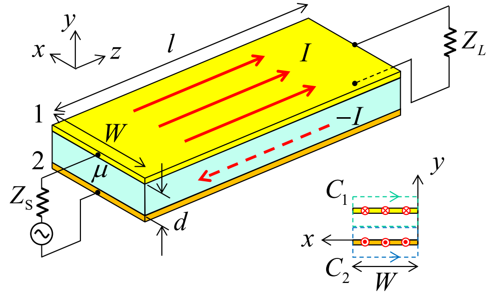
【演習】幅W [m]、間隔d [m]の平行平板導体内部が透磁率μの媒質で満たされている。単位長さあたりの自己インダクタンスを求めよ。

【解答】図のように上側導体電流Iと下側導体電流−Iを囲む積分路C_1, C_2を取ると、アンペアの法則より

$$\oint_{C_1}\vec{H}\bullet d\vec{l}=I, \qquad \oint_{C_2}\vec{H}\bullet d\vec{l}=I$$

$$\Rightarrow H2W=I \qquad \Rightarrow H2W=I$$

$$\Rightarrow H_1=\frac{I}{2W} \qquad \Rightarrow H_2=\frac{I}{2W}$$



重ね合わせより、平板内部の磁界は

$$\vec{H}=\vec{H}_1+\vec{H}_2=\frac{I}{2W}\hat{x}+\frac{I}{2W}\hat{x}=\frac{I}{W}\hat{x}$$

磁束密度は

$$\vec{B}=\mu\vec{H}=\frac{\mu I}{W}\hat{x}$$

磁束鎖交数は、z方向単位長さあたりN=1として

$$\Phi=\varphi=\int_S \vec{B}\bullet d\vec{s}=\int_{y=0}^{d}\int_{z=0}^{1}\frac{\mu I}{W}dzdy=\frac{\mu I}{W}d$$

従って、インダクタンスは

$$L=\frac{\varphi}{I}=\frac{\frac{\mu I}{W}d}{I}=\mu\frac{d}{W}\ \ [\mathrm{H/m}]$$

Lを大きくするにはdを大きく、Wを小さくすればよい。

問：現実問題では電流は平板導体上を一様には流れず、端部に集中して流れる。これを考慮してLを求めよ。

鈴木，デジタル回路のEMC設計技術入門，pp. 26–29，日刊工業新聞社，2011

導体の内部インダクタンス

【演習】透磁率がμで半径a [m]の円柱導体に一様に電流が流れているとき、導体内部の自己インダクタンス(内部インダクタンス)を求めよ。(教科書，p.137)

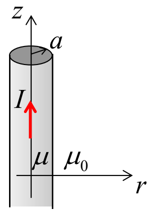
【解答】まず磁界分布を求める。

① r<aの場合

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l}=\frac{\pi r^2}{\pi a^2}I$$

$$H(2\pi r)=\frac{\pi r^2}{\pi a^2}I$$

$$H=\frac{I}{2\pi a^2}r \qquad (1)$$

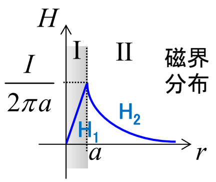


② r>aの場合

$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l}=I$$

$$H(2\pi r)=\frac{\pi r^2}{\pi a^2}I$$

$$H=\frac{I}{2\pi r} \qquad (2)$$



H_2：導体外側に作られる磁界→自己インダクタンス
H_1：導体内部に作られる磁界→内部インダクタンス

円柱導体を透磁率μの磁性体と考えて、微小体積dvあたりの磁気エネルギーを求めると

$$dW_m=\frac{1}{2}\mu H^2(2\pi rdr)\ \ [\mathrm{J}] \qquad (3)$$

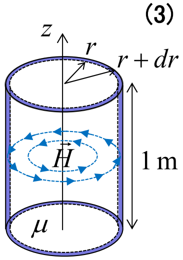
円柱導体全体では(1)より

$$W_m=\int_V dW_m=\int_{r=0}^{a}\mu H^2\pi rdr$$

$$=\int_{r=0}^{a}\mu\left(\frac{I}{2\pi a^2}r\right)^2\pi rdr$$

$$=\frac{\mu}{4\pi a^4}\int_{r=0}^{a}r^3dr$$

$$=\frac{\mu I^2}{4\pi a^4}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^a=\frac{\mu I^2}{16\pi}\ \ [\mathrm{J}] \qquad (4)$$



dv=2πrdr [m³]

内部インダクタンスをLとすれば

$$W_m=\frac{1}{2}LI^2=\frac{\mu I^2}{16\pi} \qquad (5)$$

内部インダクタンスLは物理寸法に無関係

これをLについて求めると

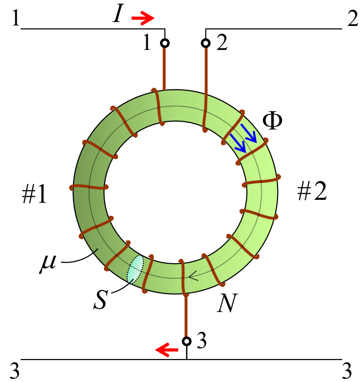
$$\therefore L=\frac{\mu}{8\pi}\ \ [\mathrm{H/m}] \qquad (6)$$

相互インダクタンスの計算3

【演習】端子1, 2 間にコイルを一様にN回巻いた環状ソレノイドがある。図のように端子1, 2 間に端子3を出したとき、端子1, 3 間と端子2, 3の相互インダクタンスMを最大にするには、端子1, 3間の巻数をいくらにすればよいか。また、そのときの相互インダクタンスを求めよ。ただし、磁路と透磁率はμ [H/m]、平均磁路はl [m]であり、断面積はS [m²]である。(教科書，演習9.8)

【解答】1−3間の巻数をN_1とすると、2−3間の巻数は$N-N_1$となる。

3−3端子を共通にしたトランス

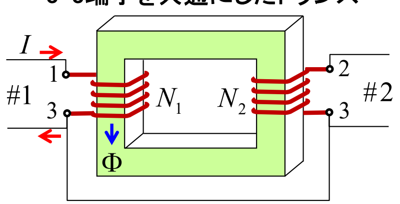


$$\oint_C \vec{H}\bullet d\vec{l}=N_1 I$$

$$Hl=N_1 I$$

$$H=\frac{N_1 I}{l},\ B=\frac{\mu N_1 I}{l}$$

$$\Phi_1=\frac{\mu S N_1 I}{l},\ \varphi_{21}=\frac{\mu S N_1 N_2 I}{l}$$



Mが最大となる条件は

$$\frac{dM}{dN_1}=0$$

答え $\dfrac{N}{2},\ M=\dfrac{\mu S N^2}{4l}\ \ [\mathrm{H}]$

相互インダクタンスの計算4

17

【演習】半径a [m] の円形ループと、その中心軸上にd [m] 離れておかれた断面積S [m²]、長さl [m]、単位長さあたりの巻数n [巻/m]の細長いソレノイドがある。コイル間の相互インダクタンスを求めよ。(教科書，演習9.12)

【解答】円形コイルの中心軸上に作られる磁場(ビオ-サバールの法則より)

$$B=\frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1)$$

円形コイル中心軸上で任意断面Sを貫く磁束は

$$\Phi_{21}=BS=\frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}S \quad (2)$$

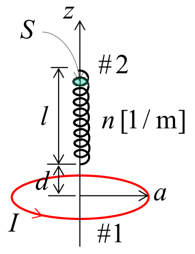
長さdzあたりの巻数はndzなので、磁束鎖交数は

$$\varphi_{21}=ndz\Phi_{21}=\frac{\mu_0 I a^2 nS}{2(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dz \quad (3)$$

これをz=dからz=d+lまで総和して全磁束鎖交数を求めると

$$\varphi_{21}=\int_{z=d}^{d+l}\frac{\mu_0 I a^2 nS}{2(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}dz=\frac{\mu_0 I a^2 nS}{2}\int_{z=d}^{d+l}(z^2+a^2)^{-\frac{3}{2}}dz \quad (4)$$

既出の「電磁気学でよく使う積分公式」を使えば答えが求まる。



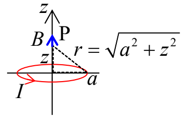
後藤，詳解電磁気学演習，p.284，共立出版

有限長ソレノイドのインダクタンス

18

【演習】有限長ソレノイドに電流I [A] が流れているとき、自己インダクタンスを求めよ。ただし、ソレノイドの断面は円形で、その半径をa [m]、ソレノイドの長さをl [m]、単位長さあたりの巻数をn [回/m] とする。(演習書，p.138)

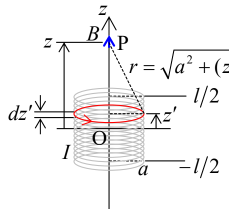
【解答】ビオ−サバールの法則より、z軸上の原点におかれたループ電流が作る磁場は



$$B_z=\frac{\mu_0 I a^2}{2r^3}$$

これが下図のように積層された場合を考える。着目している区間dz'にあるループ電流がP点に作る磁場は

$$dB_z=\frac{\mu_0 I a^2 ndz'}{2r^3}$$



zは観測点までの任意の座標なので、定数dで置き換えて考えてもよい。

積分区間はz'=−l/2から+l/2で、観測点Pの座標を表すzではなく、着目しているループ電流がある座標z'について積分を行う。

$$B_z=\int_{z'=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mu_0 I a^2 ndz'}{2r^3}$$

$$=\int_{z'=-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{\mu_0 I a^2 ndz'}{2\left\{a^2+(z-z')^2\right\}^{3/2}}$$

よく使う積分公式

$$\boxed{\int\frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C}$$

を使えば

$$B_z=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2+a^2}}-\frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2+a^2}}\right)$$

類似問題： https://www.kusamalab.org/lecture/em1/B2_charge_distribution_slide.pdf

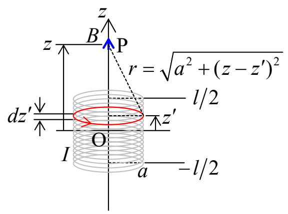
【次頁へ続く】

有限長ソレノイドのインダクタンス

19

【続き】ソレノイド軸上でソレノイド断面Sを貫く磁束は

$$\Phi=B_z S=B_z\pi a^2=\pi a^2\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2+a^2}}-\frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2+a^2}}\right)$$



ソレノイド内部で長さdzあたりの磁束鎖交数は

$$d\varphi=ndz\Phi=ndz\cdot\pi a^2\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2+a^2}}-\frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2+a^2}}\right)$$

これをz=−l/2からz=l/2まで総和して全磁束鎖交数を求めると

$$\varphi=\int_{-l/2}^{l/2}\frac{\mu_0\pi a^2 n^2 I}{2}\left(\frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2+a^2}}-\frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2+a^2}}\right)dz$$

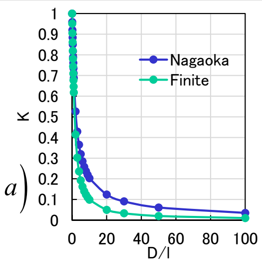
$$=\frac{\mu_0\pi a^2 n^2 I}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\left(\frac{z+l/2}{\sqrt{(z+l/2)^2+a^2}}-\frac{z-l/2}{\sqrt{(z-l/2)^2+a^2}}\right)dz$$

$$=\frac{\mu_0\pi a^2 n^2 I}{2}\left\{\left[\sqrt{(z+l/2)^2+a^2}\right]_{-l/2}^{l/2}-\left[\sqrt{(z-l/2)^2+a^2}\right]_{-l/2}^{l/2}\right\}$$

$$=\frac{\mu_0\pi a^2 n^2 I}{2}\left\{\left(\sqrt{l^2+a^2}-a\right)-\left(a-\sqrt{l^2+a^2}\right)\right\}=\mu_0\pi a^2 n^2 I\left(\sqrt{l^2+a^2}-a\right)$$

従って、インダクタンスは

$$L=\frac{\varphi}{I}=\mu_0\pi a^2 n^2\left(\sqrt{l^2+a^2}-a\right)$$



上野，試作で学ぶ高周波フィルタの設計法，pp. 47-51，総合電子出版社，2002

ノイマンの公式

20

ベクトルポテンシャル

電流素

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}}{r}\quad\cdots(0)$$

線電流

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_C\frac{I}{r}d\vec{l}\quad\cdots(1)$$

面電流

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S\frac{\vec{J}_S}{r}ds\quad\cdots(2)$$

体電流(電流密度)

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}}{r}dv\quad\cdots(3)$$

$$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}\quad\cdots(4)$$

ビオ-サバールの法則

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

⇔

スカラーポテンシャル

点電荷

$$V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

線電荷

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C\frac{\lambda}{r}dl$$

面電荷

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S\frac{\sigma}{r}ds$$

体電荷(電荷密度)

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho}{r}dv$$

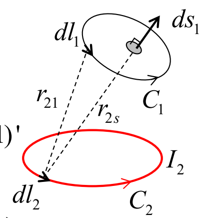
$$\vec{E}=-\nabla V$$

クーロンの法則

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

右図のループC_1, C_2において

$$\begin{cases}\vec{A}_1=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{1}{r_{2s}}d\vec{l}_2 & \cdots(1)'\\ \vec{B}_1=\nabla\times\vec{A}_1 & \cdots(4)'\end{cases}$$



$$\Phi_1=\int_{S_1}\vec{B}_1\bullet d\vec{s}_1=\int_{S_1}(\nabla\times\vec{A}_1)\bullet d\vec{s}_1$$

$$=\oint_{C_1}\vec{A}_1\bullet d\vec{l}_1=\oint_{C_1}\left(\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_2}\frac{1}{r_{21}}d\vec{l}_2\right)\bullet d\vec{l}_1\quad\cdots(5)$$

C_1上の積分になるのでr_{2s}はr_{21}になる。

$$\therefore\Phi_1=\frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{l}_1\bullet d\vec{l}_2}{r_{21}}\quad\cdots(6)$$

$$M_{12}=\frac{\Phi_1}{I_2}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{l}_1\bullet d\vec{l}_2}{r_{21}}$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{dl_1 dl_2\cos\theta}{r_{21}}\quad\cdots(7)$$

dl_1とdl_2を同一のコイル中にとれば、自己インダクタンスを求める式になる。

例えば、中川，電磁気学，p.163，科学技術出版