1.1　変位電流の定義

1.1.1　コンデンサを流れる電流

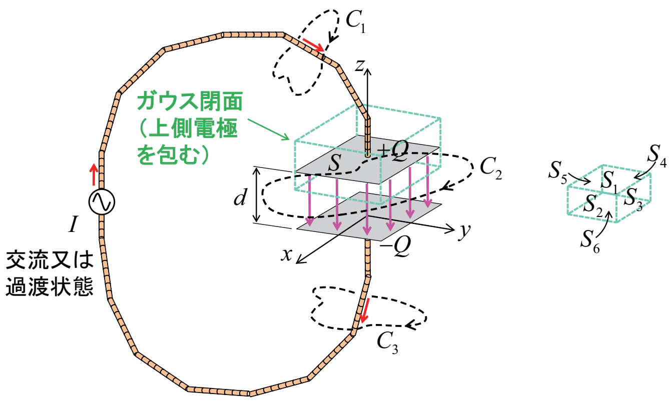

図 1.1　変位電流

図 1.1 に示すように，交流または過渡状態においてコンデンサに流れる電流について考える。ガウスの法則

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q \tag{1.1}$$

を $+Q$ [C] の真電荷が存在する上側電極を包むように適用すると，式 (1.1) の左辺は

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{D} \bullet d\vec{s} + \int_{S_2+S_3+S_4+S_5} \vec{D} \bullet d\vec{s} + \int_{S_6} \vec{D} \bullet d\vec{s} \tag{1.2}$$

となる。ここで，S_1 はガウス閉面の上面，S_2, S_3, S_4, S_5 は 4 つの側面，S_6 は底面を示す．簡単のために，電束 $\vec{D}$ はすべて下側電極の $-Q$ [C] に向かって垂直に入る理想的なコンデンサとすれば[*1]，側面から出る電束密度はゼロと見なせるため，式 (1.2) 右辺第 2 項はゼロになる．また，電極上面から z 方向に出る電束密度もゼロのため，式 (1.2) 右辺第 1 項もゼロになる．従って，式 (1.2) は

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = \int_{S_6} \vec{D} \bullet d\vec{s} \tag{1.3}$$

となる[*2]．ここで，伝導電流の定義と式 (1.1) から導出される次式 (1.4)

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} \tag{1.4}$$

の関係を使って，式 (1.3) の両辺を t で微分すると[*3]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S_6} \vec{D} \bullet d\vec{s} = I \tag{1.5}$$

[*1] 実際のコンデンサの電荷はお互いのクーロン力によって反発し合うため，電極上に一様に分布せず辺縁に集まる性質がある．このため，電気力線は辺縁部からコンデンサの外の空間に染み出すように広がってから反対側の電極に入る．このような性質をフリンジ（へり，外辺）効果と呼ぶ．

[*2] S_6 は閉じていない面なので，積分記号も開いた積分であることに注意．

[*3] 偏微分記号になっているのは，$\vec{D}$ が空間 3 次元，時間 1 次元の 4 つの独立変数からなる変数 $\vec{D}(x, y, z, t)$ であるため，t についての微分を明示するためである．

となる．式 (1.5) 左辺は電極から流出する時間変動電束を示し，右辺は電極へ流入する伝導電流を示している．このように電束の時間変位は電流の次元に等しいが[*4]，導線を流れる伝導電流と区別するために**変位電流**と呼ぶ．所で，電流密度 J [A/m^2] を使って式 (1.4) を変形すると，

$$I = \int_S \vec{J} \bullet d\vec{s} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s} \tag{1.6}$$

となり，右辺の積分記号内の $\partial\vec{D}/\partial t$ は電流密度 $\vec{J}$ と同じ次元を有するので，厳密には $\partial\vec{D}/\partial t$ を変位電流密度と呼ぶべきであるが，慣例としてこれも変位電流と呼んでいる．

1.1.2　電流の種類

　ここで，既出の電流を整理しておく．電磁気学で扱う電流には伝導電流，分極電流，磁化電流，変位電流の 4 つがある．まず，伝導電流は電気回路，電子回路にも出てくる最も馴染みある電流であり，次式 (1.7) で与えられる．

$$I = \frac{dQ}{dt} \ \ [\mathrm{A}] \tag{1.7}$$

また，伝導電流は次式 (1.8) の電流密度で表すことも多い[*5]．

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \ \ [\mathrm{A/m^2}] \tag{1.8}$$

式 (1.8) は次のようにして導出することができる．オームの法則より，

$$I = \frac{V}{R} \tag{1.9}$$

ここで，図 1.2 において成立する以下の関係

$$E = \frac{V}{l}, \quad J = \frac{I}{S}, \quad R = \rho\frac{l}{S} \tag{1.10}$$

を式 (1.9) 代入すると

$$JS = \frac{El}{\rho\frac{l}{S}} = \frac{ElS}{\rho l} \quad \Rightarrow \quad J = \frac{1}{\rho}E = \sigma E \tag{1.11}$$

が求まる．

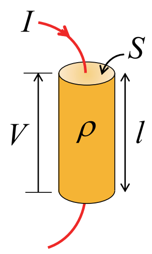

図 1.2　抵抗体と伝導電流

[*4] 式 (1.5) 左辺の単位系は [s^{-1}·C·m^{-2}·m^2]=[C/s] であり，電流の次元 [A] に等しい．
[*5] 導体内部を貫く磁束が時間変化する際に生じる渦電流も伝導電流の一つの形態である．

次に，分極電流は式 (1.12) で与えられる．分極電流は誘電体の分極 $\vec{P}$ [C/m^2] が時間変動する場合に表れるが，誘電体を扱う静電気では時間変動を考えないため，あまり馴染みがない電流である．

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial \chi_e \vec{E}}{\partial t} = \chi_e \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \ \ [\mathrm{A/m^2}] \tag{1.12}$$

ここで，χ_e は分極率（電気感受率）であり，分子構造によって決まる媒質固有の値である．この分極電流は，分極 $\vec{P}$ を意識しなくてもよいように便宜上新たに導入された電束 $\vec{D}$ と同じように変位電流 $\partial\vec{D}/\partial t$ に含めて考えることができる．電束密度は式 (1.13) で与えられる．

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \ \ [\mathrm{C/m^2}] \tag{1.13}$$

式 (1.13) の両辺を t で微分して得られる変位電流 $\partial\vec{D}/\partial t$ は，次式のように真空中の変位電流と分極電流の和として考えることができる．誘電体がなければ，変位電流は真空中の変位電流 $\varepsilon_0 \partial\vec{E}/\partial t$ に等しい．

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \ \ [\mathrm{A/m^2}] \tag{1.14}$$

最後に，磁化電流は式 (1.15) で与えられる．

$$\vec{M} \times \hat{n} = \chi_m \vec{H} \times \hat{n} \ \ [\mathrm{A/m}] \tag{1.15}$$

ここで，χ_m は磁化率（磁気感受率）であり，原子構造または分子構造によって決まる媒質固有の値である．$\hat{n}$ は磁性体の表面を外向きに貫く単位ベクトルである．

1.2　変位電流と変位磁束の導入

1.2.1　アンペアの法則の拡張

変位電流が式 (1.4) または式 (1.6) のように定義されたことで，次式 (1.16) に示すアンペアの法則は，時間変動する電界が存在する場合に拡張することができる．

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I \tag{1.16}$$

アンペアの法則において，右辺は積分路 C に含まれる電流であったから，積分路 C に含まれる変位電流を式 (1.16) に新たに追加すると

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \bullet d\vec{s} \tag{1.17}$$

となる．ただし，式 (1.17) 右辺第 2 項の積分記号は開いた積分であることに注意が必要である．つまり，図 1.3 左下に示すように，左辺の閉路 C の内側の面積が右辺第 2 項目の S に等しいことを意味している．また，電流密度 $\vec{J}$ を使って式 (1.17) の右辺をまとめると，次のように書くこともできる．

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \bullet d\vec{s} \tag{1.18}$$

式 (1.17) および式 (1.18) を**拡張アンペアの法則**または，**アンペア-マクスウェルの法則**と呼ぶ．これで，静磁界に限定されず，時間変動する電場がある場合でもアンペアの法則が適用できるようになった．

1.2.2　保存場の性質の拡張

拡張アンペアの法則と同様にして，次式 (1.19) に示す保存場の性質は，時間変動する磁束が存在する場合に拡張することができる．

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \tag{1.19}$$

ファラデーの法則 $e = -d\varphi/dt$ において，右辺は積分路 C に含まれる磁束であったから，積分路 C に含まれる変位磁束を式 (1.19) に新たに追加すると

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \bullet d\vec{s} \tag{1.20}$$

となる．ただし，式 (1.20) 右辺第 2 項の積分記号は開いた積分であることに注意が必要である．つまり，図 1.3 右下に示すように，左辺の閉路 C の内側の面積が右辺の S に等しいことを意味している．これで，静電界に限定されず，時間変動する磁場がある場合でもファラデーの法則が適用できるようになった．

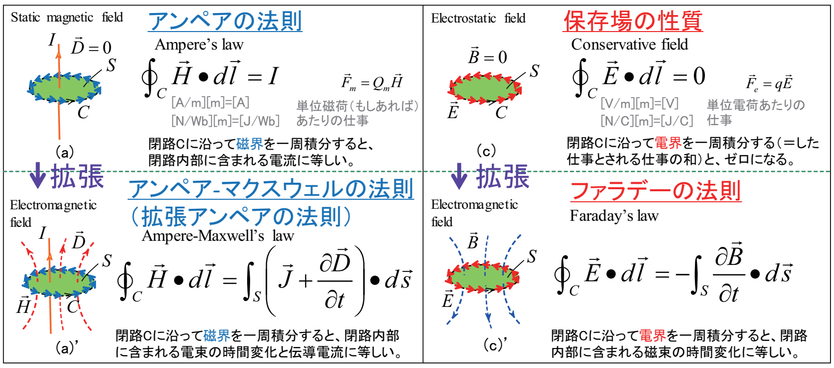

図 1.3　変位電流と変位磁束の導入