マクスウェルの方程式

v1.6 Apr.2023　　番号:________________　氏名:____________________

1. 積分形のマクスウェル方程式

磁場を考えなくても良い空間では，図 1 に示すように閉路 C に沿って電界を 1 周積分するとゼロになる。これを**保存場の性質**[*1]と呼ぶ。

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \tag{1}$$

もしも，対象としている空間に時間的に変動する磁場がある場合はファラデーの法則 $e = -d\varphi/dt$ を使って式 (1) の右辺を修正する必要がある。

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s} \tag{2}$$

これを積分形の**ファラデーの法則**と呼ぶ。図 2 に示すように，式 (2) 左辺の線積分 C は右辺の面積分 S の外周に対応している。同様に，電場を考えなくても良い空間では，図 3 に示すように閉路 C に沿って磁場を 1 周積分すると積分路内部を流れる伝導電流 I になる。これを**アンペアの法則**と呼ぶ。

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I \tag{3}$$

もしも対象としている空間に時間的に変動する電場がある場合は，変位電流 $i_d = \partial D/\partial t$[*2]を使って式 (3) の右辺を修正する必要がある。

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \bullet d\vec{s} \tag{4}$$

これを**アンペア-マクスウェルの法則**または，拡張アンペアの法則と呼ぶ。これに対して，式 (5) および図 5 に示す**ガウスの法則**[*3]と，式 (6) および図 6 に示す**磁束密度に関するガウスの法則**は，閉面 S が十分に小さければ電場や磁場が時間的に変動しても成立する (このことは厳密には微分形のガウスの法則で証明できる)。

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q \tag{5}$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \tag{6}$$

以上 6 つの方程式の説明をしたが，式 (1) と式 (5) をセットにして**静電界**[*4]**の基本方程式**，式 (3) と式 (6) をセットにして**静磁界**[*5]**の基本方程式**，式 (2) と式 (4) と式 (5) と式 (6) をセットにして電磁界[*6]の基本方程式または**マクスウェルの方程式**[*7]と呼ぶ。

2. 微分形のマクスウェル方程式

積分形は方程式の物理的イメージを把握しやすいが，一般的には計算上の扱いやすさという観点から微分形が好まれる傾向がある。積分形と微分形は任意のベクトル $\vec{A}$ に対する次のベクトル公式を使って機械的に変換できる。

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \bullet d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \bullet d\vec{l} \tag{7}$$

$$\int_V \nabla \bullet \vec{A}\, dv = \oint_S \vec{A} \bullet d\vec{s} \tag{8}$$

式 (7) をストークスの定理[*8]，式 (8) をガウスの発散定理[*9]と呼ぶ。一例として，式 (7) の $\vec{A}$ を $\vec{E}$ に置き換えると，式 (7) 左辺と式 (2) 右辺は同じ面積分なので，積分記号内部を比較すれば

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{9}$$

が得られる。同様にして式 (7) の $\vec{A}$ を $\vec{H}$ に置き換えると，式 (4) との比較から

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{10}$$

が得られる。一方，式 (8) の $\vec{A}$ を $\vec{D}$ に置き換えると式 (8) 左辺と式 (5) 右辺は同じ体積分なので, 積分記号内部を比較すれば $Q = \int_V \rho\, dv$ から[*10]

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho \tag{11}$$

が得られる。同様にして式 (8) と式 (6) の比較から

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \tag{12}$$

が得られる。ここで式 (10) の発散をとって式 (11) とベクトル公式[*11]を使うと，次の**電荷保存則** (または**連続の式**) が導出できる。

$$\nabla \bullet \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{13}$$

式 (9) および式 (10) において時間変動がない場合[*12]は次のようになる。

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{15}$$

3. まとめ

静電界の基本方程式は，保存場の性質とガウスの法則から構成され

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = 0 \tag{16}$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q \tag{17}$$

となる。これを微分形で表現すると次式となる。

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{18}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho \tag{19}$$

一方，**静磁界の基本方程式**は，アンペアの法則と磁束密度に関するガウスの法則から構成され，次式となる。

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = I \tag{20}$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \tag{21}$$

これを微分形で表現すると次式となる。

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{22}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \tag{23}$$

電磁界の基本方程式（マクスウェルの方程式）は，ファラデーの法則，アンペア-マクスウェルの法則，ガウスの法則，磁束密度に関するガウスの法則から構成され，次のようになる。

$$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{s} \tag{24}$$

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \bullet d\vec{s} \tag{25}$$

$$\oint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q \tag{26}$$

$$\oint_S \vec{B} \bullet d\vec{s} = 0 \tag{27}$$

これを微分形で表現すると次のようになる。

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{28}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{29}$$

$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho \tag{30}$$

$$\nabla \bullet \vec{B} = 0 \tag{31}$$

電磁界の基本方程式は電磁気学における最上位の法則であり，静電界の基本方程式と静磁界の基本方程式を含んでいる。しかし，電界と磁界に関する連立方程式を解く必要があり難易度は上がる。そこで，静電界や静磁界のように，電界もしくは磁界のみを考えれば十分な場合は，難易度を落とした基本方程式に落として解くことが一般的である。

[*1] 電界の単位は [V/m]=[N/C] であるから，$\vec{E} \bullet d\vec{l}$ は単位電荷を微小距離だけ動かすときの仕事 [J] となる。即ち，する仕事とされる仕事は常に等しいことを示している。富士山形の電位があるとき，登りと下りは同じ仕事になる。この性質は閉回路におけるキルヒホッフの電圧則と同じである。

[*2] 変位電流は電流密度の単位 [A/m^2] であるが，電流の単位 [A] と特に区別せずに一般名称として変位電流と呼んでいる。

[*3] この法則を時間微分すれば節点におけるキルヒホッフの電流則と同じである。

[*4] 対象としている空間において電界が時間的に変化しない。磁場は考えない。

[*5] 対象としている空間において磁界が時間的に変化しない。電場は考えない。

[*6] 対象としている空間において電場も磁場も時間的に変化する。

[*7] 1864 年に J. C. Maxwell が体系整理してまとめた。

[*8] 面積分を線積分に変換するベクトル公式で，2 次元 (面) を 1 次元 (線) の問題に次元を 1 つ落とすことで問題を簡単にできる。

[*9] 体積分を面積分に変換するベクトル公式で，3 次元 (体) を 2 次元 (面) の問題に次元を 1 つ落とせる。面ベクトルは閉面に対して外向きで垂直な方向。

[*10] ここで ρ(ローと読む) は電荷密度 [C/m^3]

[*11] 任意のベクトル $\vec{A}$ に対して $\nabla \bullet \nabla \times \vec{A} = 0$

[*12] 静電場または静磁場のことを指し，それぞれ式 (1) と式 (3) に対応する。

4. ガウスの法則が時間変化に対応できる理由

式 (5) 右辺の電荷 Q が時間的に変化するとき，電荷 Q から有限距離だけ離れたガウス閉面 S 上の電束密度 D には時間的な遅れが生じるはずである[*13]。しかしながら，式 (5) ではこの時間遅れを厳密に説明することが困難である。そこで，式 (11) の両辺を時間微分した次の等式を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \bullet \vec{D} - \rho\right) = 0 \tag{32}$$

次 (32) が成立すれば，時間微分に関する ( ) 内の $\nabla \bullet \vec{D} - \rho$ は時間的に変化がないこと (定常) を示す。即ち $\nabla \bullet \vec{D}$ と ρ の間に時間差はなく，任意時間の $\nabla \bullet \vec{D}(t)$, $\rho(t)$ でも微分形のガウスの法則は成立すると言える。まず，式 (13) の電荷保存則 (連続の式) より

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \bullet \vec{J} \tag{33}$$

右辺の $\vec{J}$ に式 (29) の微分形のアンペア-マクスウェルの法則を代入し，ベクトル公式 $\nabla \bullet \nabla \times \vec{H} = 0$ を適用すると

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \bullet \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) = \nabla \bullet \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial \nabla \bullet \vec{D}}{\partial t} \tag{34}$$

従って，式 (32) が成立する。

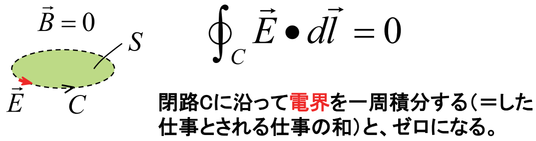

図 1　保存場の性質

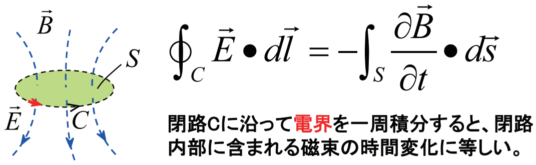

図 2　ファラデーの法則

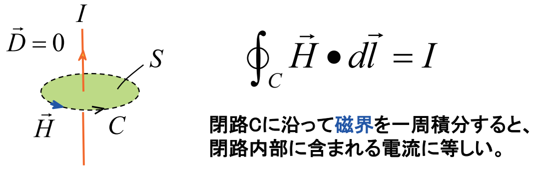

図 3　アンペアの法則

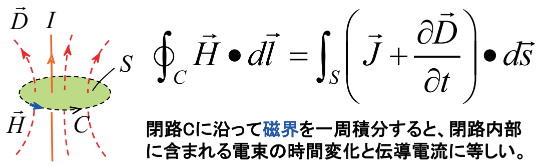

図 4　アンペア-マクスウェルの法則

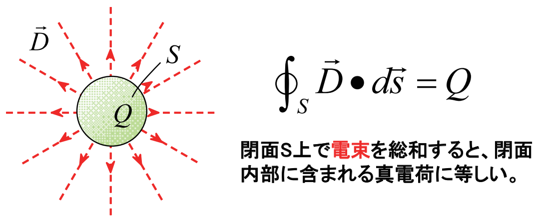

図 5　ガウスの法則

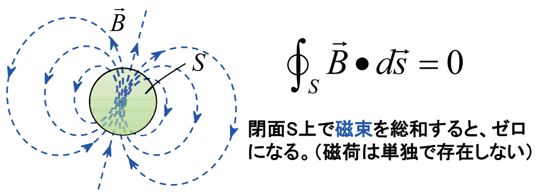

図 6　磁束密度に関するガウスの法則

[*13] 実際には光速 3×10^8 m/s という有限の速度で電荷の変化がガウス閉面上に伝わる。これを近接作用と呼ぶ。